

Differentialgleichungen

Definition:

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekanntes Funktion $y = y(x)$ bis zur n -ten Ordnung auftreten, heisst gewöhnliche Differentialgleichung.

Differentialgleichungen

Implizite Form:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Explizite Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Differentialgleichungen

Beispiele:

$$y' = 2x$$

Explizite DGL 1. Ordnung

$$x + yy' = 0$$

Implizite DGL 1. Ordnung

$$y' + yy'' = 0$$

Implizite DGL 2. Ordnung

Differentialgleichungen

Lösungen einer Differentialgleichung

- Eine gewöhnliche Differentialgleichung lösen heisst eine Funktion $y = y(x)$ suchen, welche mit **all** ihren Ableitungen die Differentialgleichung **identisch** erfüllt.
- Die Lösung ist also die Funktion $y = y(x)$.
 - *allgemeine Lösung*
 - *spezielle oder partikuläre Lösung.*

Differentialgleichungen

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

allgemeine Lösung: $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$

Anfangsbedingungen:

$$y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$$

Randbedingungen:

$$y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_n)$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung

implizit: $F(x, y, y') = 0$

explizit: $y' = f(x, y)$

Richtungsfeld

Gegeben ist die DGL: $y' = f(x, y)$

1. Ableitung = Steigung m

$$m = f(x, y)$$

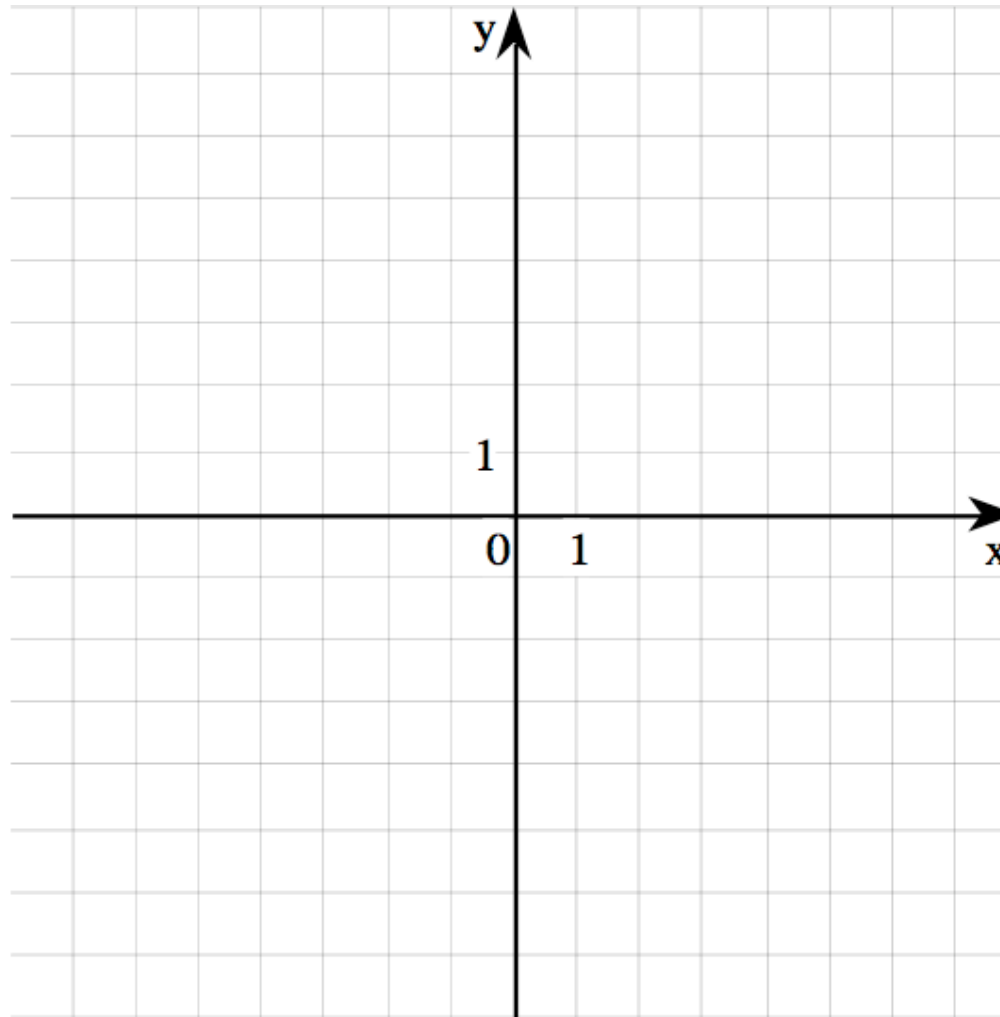
Das Richtungsfeld: Beispiel

$$y' = -\frac{x}{y}$$

y \ x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	1.0	0.9	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	0.1	0.0	-0.1	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.8	-0.9	-1.0
7	1.1	1.0	0.9	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	-0.1	-0.3	-0.4	-0.6	-0.7	-0.9	-1.0	-1.1
6	1.3	1.2	1.0	0.8	0.7	0.5	0.3	0.2	0.0	-0.2	-0.3	-0.5	-0.7	-0.8	-1.0	-1.2	-1.3
5	1.6	1.4	1.2	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1.0	-1.2	-1.4	-1.6
4	2.0	1.8	1.5	1.3	1.0	0.8	0.5	0.3	0.0	-0.3	-0.5	-0.8	-1.0	-1.3	-1.5	-1.8	-2.0
3	2.7	2.3	2.0	1.7	1.3	1.0	0.7	0.3	0.0	-0.3	-0.7	-1.0	-1.3	-1.7	-2.0	-2.3	-2.7
2	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	0.5	0.0	-0.5	-1.0	-1.5	-2.0	-2.5	-3.0	-3.5	-4.0
1	8.0	7.0	6.0	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0	0.0	-1.0	-2.0	-3.0	-4.0	-5.0	-6.0	-7.0	-8.0
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-1	-8.0	-7.0	-6.0	-5.0	-4.0	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
-2	-4.0	-3.5	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
-3	-2.7	-2.3	-2.0	-1.7	-1.3	-1.0	-0.7	-0.3	0.0	0.3	0.7	1.0	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7
-4	-2.0	-1.8	-1.5	-1.3	-1.0	-0.8	-0.5	-0.3	0.0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.3	1.5	1.8	2.0
-5	-1.6	-1.4	-1.2	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
-6	-1.3	-1.2	-1.0	-0.8	-0.7	-0.5	-0.3	-0.2	0.0	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	1.0	1.2	1.3
-7	-1.1	-1.0	-0.9	-0.7	-0.6	-0.4	-0.3	-0.1	0.0	0.1	0.3	0.4	0.6	0.7	0.9	1.0	1.1
-8	-1.0	-0.9	-0.8	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.1	0.0	0.1	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	0.9	1.0

Das Richtungsfeld: Beispiel

$$y' = -\frac{x}{y}$$



Das Richtungsfeld: Beispiel

$$y' = -\frac{x}{y}$$

