5 Integralrechnung

5.1 Das unbestimmte Integral

Wird eine Funktion f abgeleitet, so erhält man die Ableitungsfunktion f'. Nun kann man sich fragen, ob es einen Weg zurück gibt, d.h. ob man aus der Ableitungsfunktion f' die Originalfunktion f gewinnen kann. Wir probieren dies an einem konkreten Beispiel aus:

Gegeben ist eine ganz rationale Funktion durch die Gleichung:
$f\colon y = f(x) = 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 7x + 2$
$f'\colon y' = f'(x) = 15x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 12x - 7$

Beim Ableiten wurde die Potenzregel verwendet: $y = x^n$ führt zu $y' = n\,x^{n-1}$. Diese Regel könnte man ja umkehren, d.h. den Exponenten um 1 erhöhen und die neue Potenz durch den neuen Exponenten dividieren. Dass bei der Umkehrung konstante Faktoren erhalten bleiben und dass Summen bzw. Differenzen gliedweise behandelt werden, kann man aus den allgemeinen Ableitungsregeln herleiten. Den Umkehrvorgang nennen wir *Integrieren.* Wir bilden also das *unbestimmte Integral.*

$y = f(x) = \int f'(x)\ dx = \int \left(15x^4 - 16x^3 + 6x^2 + 12x - 7\right)\ dx = 15\frac{x^5}{5} - 16\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2} - 7\frac{x^1}{1} + C$

Der Summand C am Schluss wurde eingeführt, weil die Originalfunktion f noch einen konstanten Summanden aufweist. dieser kann offenbar nicht mehr aus der Ableitung durch Integrieren rekonstruiert werden. Möchte man also aus der 1. Ableitung die Originalfunktion vollständig rekonstruieren, muss man für die Bestimmung der sogenannten *Integrationskonstanten* eine Bedingung aufstellen, mit der das C berechnet werden kann. Im oben dargestellten Beispiel könnte die Bedingung aussagen, dass die Originalkurve z.B. durch den Punkt $P(0/2)$ gehen soll. Setzt man also in der letzen Gleichung für $x = 0$ und für $y = 2$ ein, wird C den Wert 2 erhalten und die Originalfunktion ist wieder hergestellt.

Das unbestimmte Integral ist die Umkehrung der 1. Ableitung einer Funktion, die auch *Stammfunktion* genannt wird. Der Ausdruck Stammfunktion kommt daher, dass alle Funktionen, die sich mit dem Parameter C ergeben, dieselbe 1. Ableitung haben. Üblicherweise schreibt man für die Stammfunktionenschar $F(x)+C$ und für die Integrandfunktion $f(x)$. Mit diesen Bezeichnungen kann man schreiben:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

wobei gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

In gleicher Weise wie beim oben ausgeführten Beispiel mit einer ganz rationalen Funktion kann man bei anderen Funktionen auch die Ableitungsregeln umkehren und erhält Regeln für das Integrieren. Die Integrationskonstante C ist in jedem Fall als Summand beim Berechnen des unbestimmten Integrals aufzuführen. Im folgenden werden die sogenannten *Grund-* oder *Stammintegrale* zusammengestellt. Diese Integrale finden sich auch in einschlägigen Formelsammlungen.

5.1.1 Allgemeine Regeln

Konstante Funktion $\int a\ dx = ax + C$

Konstanter Faktor $\int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx$

Summe und Differenz $\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$

Produkte, Quotienten, verkettete Funktionen Für Produkte, Quotienten und verkettete Funktionen gibt es keine einfache und allgemeingültige Integrationsregel. Es gibt Integrationsverfahren wie *Integration durch Substitution*, *partielle Integration* oder *Integration nach einer Partialbruchzerlegung*. Diese Verfahren sind für spezielle Situationen geeignet und müssen in jedem Einzelfall überprüft werden. Das Integrieren von beliebigen Funktionen ist Erfahrungssache und kann auch in verschiedenen Fällen erfolglos bleiben. Formelsammlungen enthalten häufig umfangreiche Integraltafeln, an denen man sich bei Integrationsproblemen orientieren kann. Heute können auch verschiedene Taschenrechner und Computerprogramme (z.B. Computeralgebrasysteme CAS) Integrale nicht nur numerisch sondern auch formal lösen.

5.1.2 Grund- oder Stammintegrale

Die Grund- oder Stammintegrale sind unmittelbar aus den Ableitungsregeln hergeleitet. Integrationsverfahren wie Integration durch Substitution oder nach Partialbruchzerlegung sowie die partielle Integration haben zum Ziel, das gegebene Integral in ein Grund- oder Stammintegral zu transformieren.

Potenzregel

$\int x^n \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad$ für $n \neq -1$

Achtung: $\int \frac{1}{x} \; dx = \int x^{-1} \; dx = \ln|x| + C$

Exponentialfunktion

$\int e^x \; dx = e^x + C$
$\int a^x \; dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

Trigonometrische Funktionen

$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$
$\int \cos x \; dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \; dx = \tan x + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \; dx = -\cot x + C$

Zyklometrische Funktionen

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C_1 = arccosx + C_2$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C_1 = -\text{arccot}\, x + C_2$

Hyperbel- und Areafunktionen

$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$
$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C$
$\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \text{arsinh}\, x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \text{arcosh}\, |x| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \qquad$ für $|x| > 1$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \begin{cases} \text{artanh}\, x + C_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} + C_1 & \text{für} \quad |x| < 1 \\ \text{arcoth}\, x + C_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x+1}{x-1} + C_2 & \text{für} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

5.2 Das bestimmte Integral

5.2.1 Von der Änderungsrate zur Änderung

Die 1. Ableitung einer Funktion wurde als momentane Änderungsrate des Funktionswertes eingeführt. Sie gibt also an, wie stark sich der Funktionswert verändert, wenn ein winzig kleiner (die Mathematik spricht vom Grenzwert Δx nach Null) Schritt in x-Richtung gemacht wird. Betrachten wir also ein $\Delta x = dx$, so verändert sich der y-Wert an der Tangente um $dy = f'(x)\,dx$. Dieses Ergebnis kann aber in einem Koordinatensystem, in dem die $f'(x)$-Werte aufgetragen sind, als Fläche eines Rechtecks mit der Höhe $f'(x)$ und der Breite dx interpretiert werden. Und wenn man kontinuierlich lauter solche Rechtecke aneinander reiht, erhält man die Fläche zwischen der $f'(x)$-Kurve und der x-Achse.
Wir wechseln nun die Bezeichnungen: Statt f' schreiben wir f und statt f schreiben wir F. Dann können wir die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse als unendliche Summe von unendlich schmalen Rechtecken aufschreiben:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\,\Delta x_i = \int\limits_{x_1=a}^{x_2=b} f(x)\,dx$$

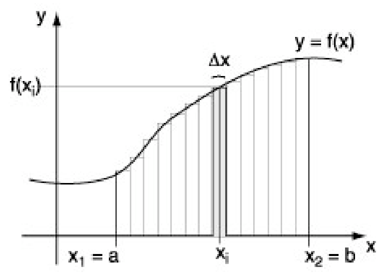

Abbildung 27: Bestimmtes Integral und Fläche

Diese Summe wird auch als *bestimmtes Integral* der Funktion f in den Grenzen von $x_1 = a$ bis $x_2 = b$ bezeichnet. Wir können also das bestimmte Integral als unendliche Summe von unendlich schmalen Rechtecken interpretieren.

5.2.2 Bestimmtes Integral und Stammfunktion

Wir wissen, dass Integrieren das Aufsuchen der Stammfunktion bedeutet. Nun haben wir noch gesehen, dass das bestimmte Integral in den Grenzen von $x_1 = a$ bis $x_2 = b$ eine feste Fläche ergibt. Das unbestimmte Integral $\int f(x)\;dx = F(x) + C$ ist die Stammfunktion F der Integrandfunktion f. Diese Stammfunktion F kann man für verschiedene x auswerten. So soll z.B. x die Werte $x_1 = a$ und $x_2 = b$ annehmen und wir erhalten: $F(a) + C$ bzw. $F(b) + C$. Die Differenz dieser Auswertungen ist $F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. Sie ist konstant, also ein fester Wert, und dieser Wert ist gleich der Fläche zwischen Kurve und x-Achse in den Grenzen von $x_1 = a$ bis $x_2 = b$.

Wenn man den Wert eines bestimmten Integrals berechnen will, geht man folgendermassen vor:

1. Berechnen der Stammfunktion: $[F(x)]_a^b$
2. Einsetzen der Grenzen: 'obere Grenze – untere Grenze': $F(b) - F(a)$

Beim unbestimmten Integral wird auch die Integrationskonstante C aufgeschrieben. Bei der Berechnung des bestimmten Integrals wird auch die Stammfunktion ermittelt. Dabei kann man die Integrationskonstante weglassen, da sie bei der Differenzbildung ohnehin wegfällt.

Beispiel: $\int\limits_1^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] = \left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{26}{3}$

5.2.3 Rechenregeln für bestimmte Integrale

$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$

$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$

5.3 Anwendungsbeispiele

Die Berechnung von unbestimmten und bestimmten Integralen findet in der Technik eine breite Anwendung. Differentialgleichungen geben den Zusammenhang zwischen einer Grösse und ihren Ableitungen an. Die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung wird häufig durch Berechnen von unbestimmten Integralen gewonnen. Für Flächen- und Volumsberechnungen werden bestimmte Integrale verwendet. Mit sogenannten Doppel- oder Dreifachintegralen können z.B. Volumina von Körpern mit verschieden definierten Begrenzungsflächen, aber auch Flächenmomente, Trägheitsmomente und der Schwerpunkt eines Körpers ermittelt werden. In diesem Kurs bschränken wir uns auf die Berechnung von Flächen und Rotationskörpern.

5.3.1 Flächenberechnung

Mit dem bestimmten Integral kann man die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse in den gegebenen Grenzen direkt berechnen. Dann ist es aber auch nicht schwierig, die von zwei Kurven eingeschlossene Fläche zu ermitteln.

5.3.2 Fläche zwischen zwei Kurven

Gegeben sind die Kurven mit den Gleichungen $y = x^3 - 4x$ und $y = x \cdot (x-2)(x-3)$. Gesucht ist die von diesen beiden Kurven eingeschlossene Fläche.

Um die gesuchte Fläche zu erkennen, werden die Kurven in ein Diagramm gezeichnet. Die erste Kurve ist eine Parabel 3. Ordnung mit den Nullstellen $-2, 0, 2$, die zweite Kurve ist ebenfalls eine Parabel 3. Ordnung, hat aber die Nullstellen $0, 2, 3$.

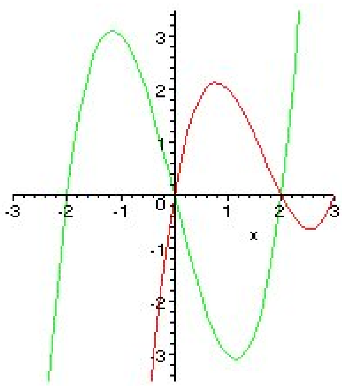

Abbildung 28: eingeschlossene Fläche

Aus der Zeichnung geht hervor, dass in den Grenzen von $x_1 = 0$ bis $x_2 = 2$ eine Fläche von den beiden Kurven eingeschlossen wird. Wenn die Schnittpunkte der Kurven nicht so offensichtlich wie in diesem Fall sind, muss man sie durch Lösen des entsprechenden Gleichungssystems berechnen. Zu bedenken ist, dass der Wert eines bestimmten Integrals negativ ist, wenn die Kurve unterhalb der x-Achse liegt, die Funktionswerte also dort negativ sind. Das kommt uns in diesem Fall gelegen. Wenn wir die Differenz der Funktionsterme zwischen oberer und unterer Kurve integrieren, erhalten wir die Summe der Flächenteile.

$\int\limits_0^2 \left(x \cdot (x-2)(x-3) - \left(x^3 - 4x\right)\right)\,dx = \int\limits_0^2 \left(x^3 - 5x^2 + 6x - x^3 + 4x\right)\,dx = \int\limits_0^2 \left(-5x^2 + 10x\right)\,dx = \left[-5\frac{x^3}{3} + 10\frac{x^2}{2}\right]_0^2 =$
$\left[-5 \cdot \frac{8}{3} + 10 \cdot \frac{4}{2}\right] - [0] = -\frac{40}{3} + 20 = \frac{20}{3} = 6.7$

Generell kann man die von zwei Kurven mit den Gleichungen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ eingeschlossene Fläche folgendermassen berechnen:

$$\text{Fläche } A = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

5.3.3 Volumen von Rotationskörpern

Gegeben ist eine Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$. Diese Kurve soll in den Grenzen von $x_1 = a$ bis $x_2 = b$ um die x-Achse rotieren, wobei sie einen Rotationskörper umhüllt. Gesucht ist das Volumen dieses Körpers. Das bestimmte Integral bietet eine gute Lösung für das Problem. Bei der Flächenberechnung sind wir von schmalen Rechtecken ausgegangen und haben die Summe von unendlich vielen, unendlich schmalen Rechtecken gebildet. Den Rotationskörper kann man in ganz schmale Scheiben schneiden.

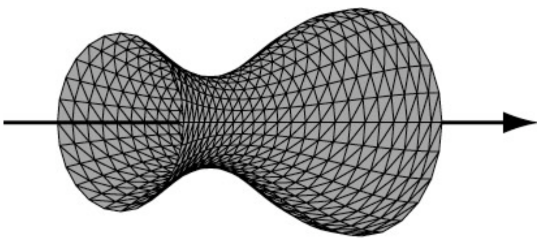

Abbildung 29: Rotationskörper

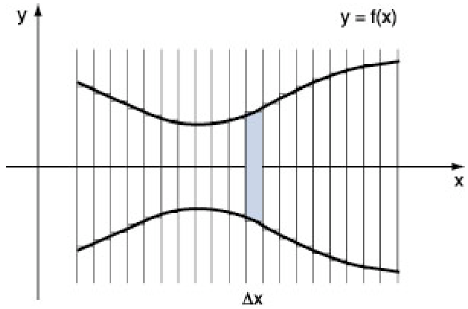

Abbildung 30: Rotationskörper: Schnitt

Die Scheiben sind Zylinder mit dem Radius $f(x)$ und der Höhe Δx. Das Volumen eines solchen Zylinders ist:
$V_{Zyl} = (f(x_i))^2\,\pi\,\Delta x_i$

Und die unendliche Summe ergibt dann:

$$V_{Rotationskrper} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i))^2\,\pi\,\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2\,\pi\,dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx$$

5.4 Aufgaben

1) a) $\int \left(2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x + 2\right)\, dx$ b) $\int \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\, dx$
c) $\int \left(3x^2 - 5x + 1 - \frac{2}{x}\right)\, dx$ d) $\int \left(5x^5 + 3\sqrt{x^3}\right)\, dx$

2) a) $\int \left(e^x - \frac{1}{x}\right)\, dx$ b) $\int (2\sin x + \cos x)\, dx$
c) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{6}{sin^2 x}\right)\, dx$ d) $\int \left(3\sqrt[3]{x^2}\right)\, dx$

3) a) $\int \left(\frac{2x^2 - 3x^3 + 4x^4}{x^3}\right)\, dx$ b) $\int \left(\frac{2}{3\sqrt{x}}\right)\, dx$ c) $\int \left(\frac{2\sqrt{x} - 3x}{\sqrt{x}}\right)\, dx$ d) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)\, dx$

4) a) $\int_2^3 \left(\frac{2}{x^2}\right)\, dx$ b) $\int_0^2 \left(2x^2 - 4x\right)\, dx$ c) $\int_{-1}^1 \left(-3x^3 + 4x^2 - 2\right)\, dx$ d) $\int_1^e \left(\frac{e}{x}\right)\, dx$

5) a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)\, dx$ b) $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{2}{\cos^2 x}\right)\, dx$ c) $\int_{-2}^0 (x + \sin x)\, dx$ d) $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)\, dx$

6) a) $\int_0^1 (e^x)\, dx$ b) $\int_1^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)\, dx$ c) $\int_2^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\, dx$ d) $\int_0^2 \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\, dx$

7) Berechnen Sie die Fläche zwischen Kurve und x-Achse zwischen den beiden Nullstellen:
a) $y = -3\,x^2 + 4\,x - 1$ b) $y = x^3 - 4\,x^2$

8) Die Kurven mit den Gleichungen schliessen eine Fläche ein, deren Grösse zu berechnen ist:
$y = (x-2)\,(x+3)\,(x-1)$ und $y = (x-2)^2\,(x-1)$

9) Berechnen Sie die von Sinus- und Cosinuskurve zwischen zwei benachbarten Schnittpunkteneingeschlossene Fläche!

10) Wird eine Schraubenfeder durch eine Kraft F verlängert, nimmt sie Energie auf (Spannungsenergie). Für die Kraft gilt das Hooke'sche Gesetz: $F = k \cdot x$, wobei k die Federkonstante ist. Welche Energie nimmt die Feder mit der Federkonstanten $k = 0.30$ N/m bei einer Verlängerung von $x_1 = 0$ m auf $x_2 = 0.20$ m auf?

11) Durch die Gleichung $x^2 + 4y^2 = 4$ ist eine Ellipse in der x-Ebene gegeben. Welches Volumen hat der Rotationskörper, der durch Rotation dieser Ellipse um die x-Achse entsteht?

12) Die Sinuskurve rotiert in einem Abschnitt zwischen zwei benachbarten Nullstellen um die x-Achse. Charakterisieren Sie den dabei entstehenden Rotationskörper und berechnen Sie das Volumen.

5.5 Lösungen

1) a) $1/3\,x^6 - 4/5\,x^5 + 3/4\,x^4 - 1/3\,x^3 - 5/2\,x^2 + 2\,x$
   b) $1/3\,x^3 + x^{-1}$
   c) $x^3 - 5/2\,x^2 + x - 2\,\ln(x)$
   d) $5/6\,x^6 + 6/5\,\sqrt{x^3}x$

2) a) $e^x - \ln(x)$
   b) $-2\,\cos(x) + \sin(x)$
   c) $2\tan x + 6\cot x$
   d) $9/5\,x^{5/3}$

3) a) $2\,x^2 - 3\,x + 2\,\ln(x)$
   b) $4/3\,\sqrt{x}$
   c) $2\,x - 2\,x^{3/2}$
   d) $3\,\mathrm{arsinh}\,(x) - x$

4) a) $\frac{1}{3}$, b) $-\frac{8}{3}$, c) $-\frac{4}{3}$, d) e

5) a) 1, b) -4, c) -3.416, d) 0

6) a) 1.718, b) 8.89, c) 0.375, d) 1.11

7) a) $\frac{4}{27}$, b) $\frac{64}{3}$

8) $\frac{5}{6}$

9) $2\sqrt{2}$

10) 0.006 J

11) $\frac{8}{3}\,\pi$

12) $\frac{1}{2}\,\pi^2$