4 Differentialrechnung

In der Praxis treffen wir immer wieder auf Situationen, in denen sich Grössen verändern, z.B. im Laufe der Zeit oder bei einer Veränderung des Beobachtungspunktes. Natürlich ist der Betrag der Veränderung auch von Interesse. Wie schnell die Änderung eintritt, bzw. wie stark sie bei einem definierten Schritt bei der Verlegung des Beobachtungspunktes ist, ist ebenfalls interessant und wichtig. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns also mit der *Änderungsrate* einer Grösse, und zwar nicht nur, wenn ein messbarer Schritt gemacht wird, sondern auch, wenn dieser Schritt praktisch unendlich klein wird. Wir werden also einen *infinitesimalen* Prozess einleiten, der uns von der *durchschnttlichen* Änderungsrate zur *momentanen* führen wird.

4.1 Infinitesimale Prozesse

Infinitesimale Prozesse, so sagt der Ausdruck, sind solche, die gestartet werden und dann *ohne Ende* laufen. Oftmals wird gesagt, dass der Prozess *ins Unendliche* geht. Dieser Ausdruck ist allerdings nicht sehr glücklich, weil wir mit dem Unendlichen nicht umgehen können. Wir können aber einen Prozess starten. Und dann brechen wir ihn einfach nicht mehr ab. In der Mathematik gelingt es aber, bei solchen infinitesimalen Prozessen überraschenderweise oftmals dennoch ein *endliches* Ergebnis zu erhalten. Das folgende Beispiel soll dies zeigen.

Gegeben ist ein gleichschenkeliges, rechtwinkeliges Dreieck mit der Hypotenuse a_1 und den Katheten a_2. Nun soll über einer Kathete ein zweites gleichschenkeliges, rechtwinkeliges Dreieck errichtet werden, wobei diese Kathete nun als neue Hyotenuse dient. Das neue Dreieck soll ausserhalb des ersten Dreiecks liegen. Der Prozess wird dann in gleicher Weise ohne Ende fortgesetzt.

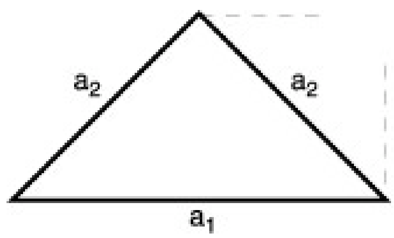

Abbildung 22: Infinitesimalprozess

Wir betrachten die Fläche, die von all diesen Dreiecken überdeckt wird, und stellen fest, dass sie endlich ist. Offenbar ist es also möglich, dass *unendlich viele* Dinge zusammen einen *endlichen Wert* ergeben können.

Zum Umgang mit Änderungsraten studieren wir nun das *Kapitel 1.3 Speichern von Flüssigkeiten* aus dem Buch *Borer, Physik, Ein systemdynamischer Zugang für die Sekundarstufe II.*

4.2 Ableitung von Funktionen

Gegeben ist die Funktion f durch folgende Definition:
$f : A \rightarrow B$
$f : x \rightarrow y = f(x)$

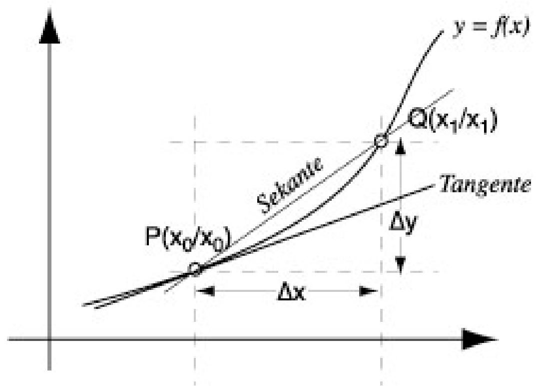

Abbildung 23: Das Tangentenproblem

Durch die Kurvenpunkte $P(x_0, y_0)$ und $Q(x_1, y_1)$ wird eine *Sekante* gelegt. Die Steigung der Sekante ist:

$m_s = \tan \alpha_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Wird nun der Punkt Q auf der Kurven gegen den Punkt P hin verschoben, wird der Abstand δx kleiner. im Extremfall wird der Punkt Q den Punkt P erreichen, der Abstand Δx geht nach 0 und aus der Sekante wird die *Tangente* an die Kurve im Punkt P. Bei diesem Prozess wird aus der *Sekantensteigung* die *Tangentensteigung*. In der Praxis berechnet man diese Tangentensteigung durch die *1. Ableitung der Funktion f nach x*. Hinter dieser 1. Ableitung steckt ein sogenannter Grenzwertprozess, der aber hier nicht näher erläutert werden soll. Für uns ist wichtig, die Ableitungen (auch *Differentialquotienten*) der verschiedenen Funktionen bestimmen zu können.

4.2.1 Höhere Ableitungen

Wenn man die Steigung der Tangenten für alle x bestimmt, sieht man, dass diese Steigungswerte eine neue Funktion von x bilden, es ist die Funktion f'. Diese Funktion kann wieder abgeleitet werden. somit erhält man die 2. Ableitung der Ausgangsfunktion und bezeichnet sie mit f''. Diesen Prozess kann man fortsetzen, sodass der Mathematiker auch die n-te Ableitung erzeugen kann, welche mit $f^{(n)}$ bezeichnet wird. Man spricht dann: 'f-n-Strich'.

4.2.2 Schreibweise der Ableitungen

Die 1. Ableitung einer Funktion f wird als f' bezeichnet. Somit kann der Wert der 1. Ableitung mit $f'(x)$ oder auch y' bezeichnet werden. Gebräuchlich sind noch weitere Bezeichnungen, welche insbesondere den Ausdruck *Differentialquotient* hervorheben:
$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy} f(x)$ sprich: 'dy-nach-dx' bzw. 'd-nach-dx von f(x)'

Für die 2. Ableitung haben sich folgende Bezeichnungen eingeführt:
$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$
sprich: 'd-2-y-nach-dx-Quadrat'

4.3 Ableitungsregeln

4.3.1 Allgemeine Regeln

Konstante Funktion $(c)' = 0$

Konstanter Faktor $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

Summe und Differenz $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Produktregel $(u(x) \cdot v(x))' = (u \cdot v)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = u'v + uv'$

Quotientenregel $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Kettenregel $(f(g(x))' = f'(u) \cdot g'(x)$ mit $u = g(x)$

4.3.2 Potenzfunktionen und ganz rationale Funktion

Potenzregel

$f : A \to B$
$f : x \to y = x^n$ mit $n \in \mathbb{R}$

$y' = f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
Mit der Potenzregel und mit den allgemeinen Ableitungsregeln können sofort die ganz rationalen Funktionen abgeleitet werden. Summen kann man gliedweise ableiten und konstante Faktoren bleiben erhalten.

Ganz rationale Funktion

$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} ... a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
$y' = n \cdot a_n x^{n-1)+(n-1} \cdot a_{n-1} x^{n-2} + (n-2) \cdot a_{n-2} x^{n-3} ... 2a_2 x^1 + a_1$

Spezialfälle der ganz rationalen Funktion sind die *konstante Funktion* mit der Gleichung $y = c$ und die *lineare Funktion* mit der Gleichung $y = ax + b$. In Auswertung der allgemeinen Regel gilt:
$y = c = c \cdot x^0$
$y' = 0$

und
$y = ax + b = ax^1 + bx^0$
$y' = a$

Beispiel 1: Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung $y = x^3$. Bestimmen Sie die Steigung der Tangente im Kurvenpunkt $P(2, y)$.

Wir bilden die 1. Ableitung der gegebenen Funktion. Sie ist:
$y' = f'(x) = 3 \cdot x^2$
Nun wird diese Ableitung an der Stelle $x = 2$ ausgewertet und man erhält:
$f'(2) = 3\c{d}ot 2^2 = 12$
Aus dem Wert der Tangentensteigung könnten man nun auch den Steigungswinkel der Tangente berechnen. Es gilt:
$m_t = \tan \alpha_t = 12$
$\alpha_t = 85.2°$
Für diese Berechnung musste die y-Koordinate des Punktes P nicht bekannt sein.

Beispiel 2: Auch Wurzeln kann man als Potenzen darstellen Deshalb gilt für die Ableitung der Wurzelfunktionen auch die Potenzregel.
$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Beispiel 3: Gesucht ist die Tangentensteigung der Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 8$ an der Stelle $x = -1$.
Wir bestimmen zunächst die 1. Ableitung allgemein:
$y' = 12x^3 - 6x^2 + 10x - 4$
Nun werten wir die 1. Ableitung an der Stelle $x = -1$ aus:
$y'(-1) = f'(-1) = 12 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) - 4 = -32$

4.3.3 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

Exponentialfunktion mit Basis e: $(e^x)' = e^x$

Allgemeine Exponentialfunktion: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Der natürliche Logarithmus: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Die allgemeine Logarithmusfunktion: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

4.3.4 Trigonometrische Funktionen

Sinusfunktion: $(\sin x)' = \cos x$

Cosinusfunktion: $(\cos x)' = -\sin x$

Tangensfunktion: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Cotangensfunktion: $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$

4.3.5 Zyklometrische Funktionen

Arcussinusfunktion: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Arcuscosinusfunktion: $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Arcussinusfunktion: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Arcustangensfunktion: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Arcuscotangensfunktion: $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

4.3.6 Weitere Beispiele

Anwendung von Produkt- und Quotientenregel: Produkte und Quotienten dürfen nicht gliedweise abgeleitet werden. Vielmehr gelten eigene Ableitungsregeln.

$y = x \cdot \ln x$ Produktregel: $u'v + uv'$
$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$y = \frac{3x^2-5}{4x^3+2x^2}$ Quotientenregel: $\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$y' = \frac{6x \cdot (4x^3+2x^2)-(3x^2-5) \cdot (12x^2+4x)}{(4x^3+2x^2)}$

Anwendung der Kettenregel: Bei ineinandergeschachtelten Funktionen beginnt man mit der Ableitung der äusseren Funktion und multipliziert mit den Ableitungen der jeweils nächst inneren Funktion.
Es soll die 1. Ableitung der Funktion mit der Gleichung $y = \sin(2x-3)$ gebildet werden.
$y' = \cos(2x-3) \cdot (2) = 2 \cdot \cos(2x-3)$

Ebenso für $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$
$y' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{2x}{2}\right) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Extremewertprobleme: Mit der 1. Ableitung einer Funktion kann das relative Maximum oder Minimum der Funktionswert ermittelt werden. Ein relatives Maximum zeigt sich darin, dass vor der entsprechenden Stelle die Funktionswerte ansteigen und nachher abfallen. Im Maximum selbst ist die Steigung Null, die Tangente an die Funktionskurve ist also waagrecht. Ähnlich ist es bei einem relativen Minimum. Auch hier ist die Steigung Null. Wenn man also Maximum oder Minimum sucht, muss man die 1. Ableitung Null setzen und auf die Funktionsvariable lösen. Die zu maximierende bzw. zu minimierende Funktion wird oft als *Zielfunktion* bezeichnet.
Es ist allerdings noch zu prüfen, ob die erhaltene Stelle zu einem Maximum oder zu einem Minimum führt. Allgemeine Überlegungen zum Kurvenverlauf können die Zuordnung klären (z.B. die graphische Darstellung des Funktionsgraphen). Die Differentialrechnung bietet aber auch ein Entscheidungskriterium an. In einem Maximum muss die 2. Ableitung negativ, in einem Minimum muss sie positiv sein, wobei die 3. Ableitung in jedem Fall ungleich Null sein muss. Diese Methode wird man anwenden, wenn man mit einfacheren Mitteln nicht zum Ziel kommt.

Das folgende Beispiel soll die Berechnung eines Minimums zeigen:
Um Energie zu sparen ist es sinnvoll, bei einem Haus von vorgegebenem Volumen die Oberfläche zu minimieren. Vorgegeben ist eine Kubatur von 1800m^3 und die Hausform. Der Grundriss soll ein Rechteck sein und es wird ein Flachdach aufgesetzt, Die Gesamthöhe soll $h = 6$ m betragen. Wie sollen Länge und Breite des Rechtecks der Grundfläche gewählt werden, damit die angegebenen Bedingungen erfüllt werden?

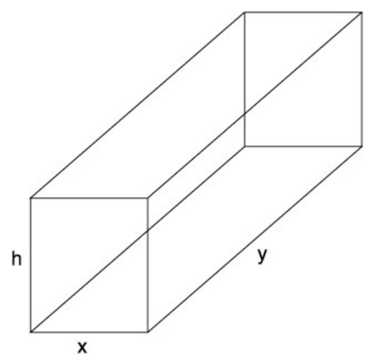

Abbildung 24: Oberfläche minimieren

Die Oberfläche F wird als Summe aller Begrenzungsflächen (das sind 6 Rechtecke) berechnet.
Es gilt nun: $F = 2(xy + xh + yh)$
Mit der Bedingung für die Kubatur erhält man die Gleichung:
$V = xyh = 1800$
und daraus für $y = \frac{1800}{hx} = \frac{1800}{6x} = \frac{300}{x}$

Somit ergibt sich für die *Zielfunktion*: $F(x) = 2\left(x\frac{300}{x} + x \cdot 6 + \frac{300}{x} \cdot 6\right) = 2\left(300 + 6x + \frac{1800}{x}\right)$

Die 1. Ableitung ist: $F'(x) = 2\left(6 - \frac{1800}{x^2}\right)$
Die Lösung der Gleichung $F'(x) = 2\left(6 - \frac{1800}{x^2}\right) = 0$ ergibt: $x_{1/2} = \pm\sqrt{300} = \pm 17.32$ m
Hier ist nur die positive Lösung brauchbar, die mit der 2. Ableitung auf das Minimum getestet wird:
$F''(x) = 2\left(-2\frac{1800}{x^3}\right)$
$F''\left(\sqrt{300}\right) = 2\left(-2\frac{1800}{\sqrt{300}^3}\right) < 0$
Somit ist auch bewiesen, dass der gefundene Wert für x ein Minimum der Zielfunktion ergibt.

Nun wird noch der y-Wert ermittelt: $y = \frac{300}{x} = \frac{300}{\sqrt{300}} = \sqrt{300} = 17.32$ m
Die Lösung mit minimaler Oberfläche ergibt also einen quadratischen Grundriss.

Links im Internet: Zu Anwendungen der Differentialrechnung empfiehlt sich der folgende Link:
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html

4.4 Aufgaben

1) Bilden Sie die 1. Ableitung von den Funktionen mit den gegebenen Gleichungen:
a) $y = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 12$ b) $y = 5\sqrt{x} + 3\ln x$ c) $y = 3\frac{1}{x^2} - \frac{5}{x}$ d) $y = 7\cos x + 23x^8$
e) $y = 2\tan x + 3\sin x$ f) $y = 5x^{-3} - 4x^{-2} + 3x^{-1} - 7$ g) $y = \frac{2}{3}x^7 + \frac{2x^6}{7}$ h) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

2) Bilden Sie die 1. Ableitung mit der Produktregel:
a) $y = x \cdot \ln x$ b) $y = x^2 \cdot e^x$ c) $y = 3x^2 \cdot \sin x$ d) $y = (x+1)\sqrt{x}$
e) $y = (3x^2 - 1) \cdot (x^4 + 2x^2)$ f) $y = 3x^2 \cdot \log_2 x$ g) $y = 7e^x \cdot \sin x$ h) $y = \left(\frac{3}{x^2} - 2x^2\right) \cdot \lg x$

3) Bilden Sie die 1. Ableitung mit der Quotientenregel:
a) $y = \frac{x}{x-1}$ b) $y = \frac{3x^2-2x}{x^2+1}$ c) $y = \frac{\sin x}{\ln x}$ d) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$
e) $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ f) $y = \frac{\ln x}{x}$ g) $y = \frac{7e^x}{\sin x}$ h) $y = \left(\frac{3\lg x}{x^2} - 2x^2\right)$

4) Bilden Sie die 1. Ableitung mit der Kettenregel:
a) $y = \sin(2x^2 - 1)$ b) $y = \left(3x^2 - 4x + 7\right)^{12}$ c) $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$ d) $y = \left(2x^3 + 4\cos(2x - 3)\right)^5$
e) $y = \ln\sin 2x$ f) $y = 2 \cdot \tan^2(3x - 1)$ g) $y = e^{-2x^2}$ h) $y = 10^{\ln 2x}$

5) Vermischte Aufgaben: Bilden Sie die 1. Ableitung:
a) $y = 2x^2 \cdot \sin(3x)$ b) $y = x \cdot \cos 2x$ c) $y = \frac{x-1}{(3x^2+2)}$ d) $y = \frac{x^2}{\cos^2 x}$
e) $y = \tan\sin(2x - \pi)$ f) $y = x^2 \cdot e^{-x^2}$ g) $y = \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-5}}$ h) $y = e^{\sin 3x}$

6) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die gegebene Kurve an der Stelle x_0:
a) $y = x^3 + 2x - 5$, $x_0 = 0$
b) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$
c) $y = x^4 - 3x^3$, $x_0 = 1$

7) An welchen Stellen hat die gegebene Kurve horizontale Tangenten?
a) $y = x^5 - \frac{65}{3}x^3 + 180x$ b) $y = (2x - 1)^3 \cdot (2x + 1)^2$

8) Bilden Sie die 2. Ableitung.
a) $y = 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + 12$ b) $y = \frac{2x^4 - x}{x^2+1}$ c) $y = x^{2n} + 2x^n + 1$ d) $y = \frac{x}{x^2+1}$

9) Eine Funktion steigt, wenn die 1. Ableitung positiv ist, sie fällt, wenn die 1. Ableitung negativ ist. Für welche Bereiche sind die gegebenen Funktionen f steigend, bzw. fallend?
a) $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 36x + 2$ b) $f(x) = x^4 - 8x^2$
c) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

10) Der Gewinn ist die Differenz zwischen Einnahmen und Ausgaben. Unser Modell beruht darauf, dass die Einnahmen mit der Anzahl verkaufter Teile x nicht linear sondern mit der Wurzelfunktion dieser Anzahl steigt, da zur Steigerung des Umsatzes immer wieder Aktionen gemacht und Preisrabatte gewährt werden müssen. Es gilt also für die Einnahmenfunktion: $E(x) = k \cdot \sqrt{x}$. Die Ausgaben steigen bei unserem Produkt mit der Anzahl verkaufter Teile auch nicht proportional. Die Ausgabenfunktion soll hier mit $A(x) = a \cdot x^{\frac{3}{2}}$ modelliert werden.
Für welche Anzahl verkaufter Teile x wird der Gewinn maximal, wenn $k = 3000$ und $a = 10$ ist?

11) Im einführenden Beispiel zur Extremwertberechnung wurde ein sehr einfaches Modell zur Energieverbrauchsoptimierung angewendet. Insbesondere wurde nicht berücksichtigt, dass ein Haus Aussenflächen mit unterschiedlichem Wärmeübergangseigenschaften hat. Charakterisiert werden diese Flächen durch den *U-Wert*, der die pro Sekunde abgegebene Energie pro m^2 und Kelvin angibt.
Wir verfeinern also das Hausmodell und berücksichtigen folgende U-Werte:

Fläche	U-Wert $\left[\frac{W}{m^2K}\right]$
Boden	0.20
Dach	0.15
Mauerwerk	0.30
Fenster	0.70

Gleich bleibt die Kubatur mit $V = 1800$ m^3 und die Gebäudehöhe mit $h = 6$ m. Es wird ferner angenommen, dass die gesamte Fensterfläche 30% der totalen Wandfläche ausmacht.
a) Bestimmen sie unter diesen Umständen die Seitenlängen des Hauses.
b) Wie sieht es aus, wenn auf drei Seiten des Hauses gleichmässig die Fensterflächen verteilt sind und von dieser Fläche 30% ausmachen und die vierte Seite kein Fenster aufweist?

12) Ein Pavillon besteht aus einer Schalenkonstruktion aus Beton mit kreisförmigem Grundriss. Die Schale kann mathematisch als Rotation der Kurve $y = 4 \cdot e^{-\frac{x^2}{6}}$ um die vertikale Achse in den Grenzen von $x_1 = -5$ m bis $x_2 = 5$ m beschrieben werden.

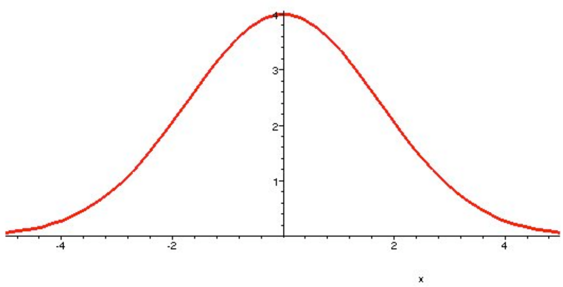

Abbildung 25: Schalenkonstruktion

Auf der Höhenlinie, bei der das Gefälle der Schale maximal ist, soll eine ringförmige Wasserleitung eingebaut werden. Mit welcher Länge der Leitung ist zu rechnen (ohne Zuführungen)?

13) Nochmals Schale von Aufgabe 12. Es soll im Innenraum ein Kreiszylinder mit vertikaler Symmetrieachse eingebaut werden. Der Kreiszylinder soll seine Grundfläche auf dem Boden der Schale haben und mit seinem oberen Rand die Schale berühren. Bestimmen Sie die Masse (Radius der Grundfläche und Höhe) des Zylinders so, dass sein Volumen maximal wird.

14) Ein Korbbogen wird aus mehreren Kreisen zusammengesetzt. So kann man z.B. einen solchen Bogen erzeugen, indem man 2 Kreise mit kleinem Radius mit den Mittelpunkten auf der x.Achse und symmetrisch zur y-Achse gelegen zeichnet. Dann wird ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt auf der y-Achse mit grösserem Radius gezeichnet und zwar so, dass der grosse Kreis die kleinen Kreise berührt. Somit werden an der Übergangsstelle vom kleinen Kreis auf den grossen Kreis die Kreistangenten identisch sein.
Die kleineren Kreisbögen sind durch folgende Gleichungen gegeben: $y = \pm\sqrt{1-(x\pm 3)^2}$ der grössere Kreisbogen hat die Gleichung $y = \pm\sqrt{25-x^2} + y_0$
Bestimmen Sie y_0 so, dass der grössere Kreis die kleineren berührt. Berechnen Sie die Koordinaten der Berührungspunkte.

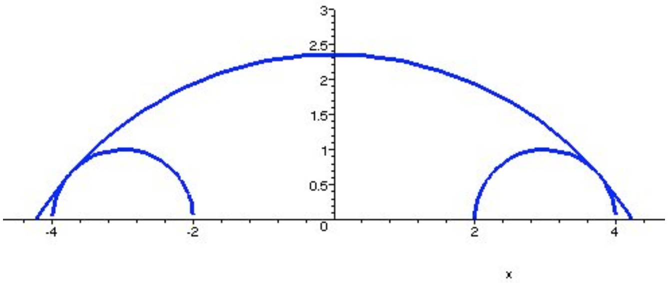

Abbildung 26: Korbbogen

4.5 Lösungen

1) a) $y' = 12x^2 - 10x + 7$, b) $y' = \frac{5}{2\sqrt{x}}$, c) $y' = \frac{-6}{x^3} + \frac{5}{x^2}$, d) $y' = -7\sin x + 184x^7$, e) $y' = \frac{2}{\cos^2 x} + 3\cos x$, f) $y' = -15x^{-4} + 8x^{-3} - 3x^{-2}$, g) $y' = \frac{14}{3}x^6 + \frac{12}{7}x^5$, h) $y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

2) a) $y' = \ln(x) + 1$, b) $y' = 2\,xe^x + x^2e^x$, c) $y' = 6\,x\sin(x) + 3\,x^2\cos(x)$, d) $y' = \sqrt{x} + 1/2\,\frac{x+1}{\sqrt{x}}$, e) $y' = 6\,x\left(x^4 + 2\,x^2\right) + \left(3\,x^2 - 1\right)\left(4\,x^3 + 4\,x\right)$, f) $y' = 6\,\frac{x\ln(x)}{\ln(2)} + 3\,\frac{x}{\ln(2)}$, g) $y' = 7\,e^x\sin(x) + 7\,e^x\cos(x)$, h) $y' = -2\,\frac{2\,\ln(x) + 2\,\ln(x)x^4 - 1 + x^4}{x^3\ln(10)}$

3) a) $y' = -(x-1)^{-2}$, b) $y' = 2\,\frac{3\,x + x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$, c) $y' = \frac{\cos(x)\ln(x)x - \sin(x)}{(\ln(x))^2 x}$, d) $y' = -1/2\,\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)^{3/2}}$, e) $y' = 2\,\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$, f) $y' = -\frac{-1+\ln(x)}{x^2}$, g) $y' = 7\,\frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{(\sin(x))^2}$ h) $y' = 3\,\frac{1}{x^3\ln(10)} - 6\,\frac{\ln(x)}{x^3\ln(10)} - 4\,x$

4) a) $y' = 4\,\cos\left(2\,x^2 - 1\right)x$, b) $y' = 12\,\left(3\,x^2 - 4\,x + 7\right)^{11}(6\,x - 4)$, c) $y' = 2\,\frac{x}{x^2+1}$, d) $y' = 5\,\left(2\,x^3 + 4\,\cos(2\,x - 3)\right)^4 (6\,x$ e) $y' = 2\,\frac{\cos(2\,x)}{\sin(2\,x)}$, f) $y' = 4\,\tan(3\,x - 1)\left(3 + 3\,(\tan(3\,x - 1))^2\right)$, g) $y' = -4\,xe^{-2\,x^2}$, h) $y' = \frac{10^{\ln(2\,x)}\ln(10)}{x}$

5) a) $y' = 4\,x\sin(3\,x) + 6\,x^2\cos(3\,x)$, b) $y' = \cos(2\,x) - 2\,x\sin(2\,x)$, c) $y' = -\frac{3\,x^2 - 2 - 6\,x}{(3\,x^2+2)^2}$, d) $y' = 2\,\frac{x(\cos(x) + x\sin(x))}{(\cos(x))^3}$, e) $y' = -2\,\left(1 + (\tan(\sin(2\,x)))^2\right)\cos(2\,x)$, f) $y' = 2\,xe^{-x^2} - 2\,x^3e^{-x^2}$, g) $y' = -2\,\frac{5+3\,x}{(2\,x^2-5)^{3/2}}$, h) $y' = 3\,\cos(3\,x)\,e^{\sin(3\,x)}$

6) a) $P(0/-5)$, $y'(0)=2=m$, t: $y=2x-5$, b) $P(1/1)$, $y'(1)=\frac{1}{2}=m$, t: $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, c) $P(1/-2)$, $y'(0)=-5=m$, t: $y=-5x+3$

7) a) $-3,-2,2,3$; b) $-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

8) a) $y''=36x^2+12x-8$, b) $y''=\frac{4x^6+12x^4-6x^3+24x^2+2x}{(x^2+1)}$, c) $y''=2n\left(2n-1\right)x^{2n-2}+2n\left(n-1\right)x^{n-2}$, d) $y''=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$

9) a) steigend für: $x<-4\vee x>3$, fallend für $-4<x<3$
b) steigend für: $-2<x<0\vee x>2$, fallend für $x<-2\vee 0<x<2$
c) steigend für: $x<-1\vee x>1$, fallend für: $-1<x<1$
d) steigend für: $0<x<2$, fallend für: $x<0\vee x>2$

10) $x=\frac{k}{3a}=100$

11) a) $x=17.32$ m, $y=17.32$ m
b) $x=16.04$ m, $y=18.71$ m

12) $x=\sqrt{3}$ m $=1.73$ m, $y=2.43$ m, Umfang $=2\sqrt{3}\,\pi$ m $=10.88$ m

13) $r=\sqrt{6}$ m $=2.45$ m, $h=\frac{4}{e}$ m $=1.47$ m

14) Lösung für $x>0$: $y_0=-\sqrt{7}$ m $=-2.65$ m, Berührpunkt $P(3.75$ m $/0.66$ m$)$