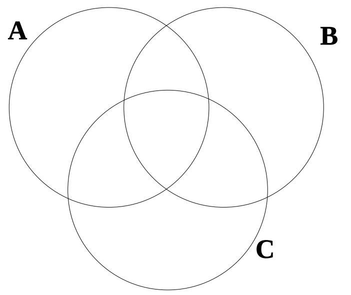
1) **Geben Sie die Menge der Ziffern folgender Zahlen an:**
a) 123456789 b) 10101010 c) 3257123 d) 121121112

2) **A = { x = $\frac{p}{q}$: p {0, 1, 2, 3, 4}, q {-2, -1, 1, 2}}**
B = { x Z: -2 ≤ x ≤ 2}
- **a) Schreiben Sie die Mengen A und B in aufzählender Schreibweise auf.**
- **b) Von welcher Mächtigkeit ist die Menge A?**
- **c) Die Menge A enthält auch ganze Zahlen. Fassen Sie diese ganzen Zahlen aus A in einer neuen Menge C zusammen.**
- **d) Bilden Sie die Potenzmenge von B.**
- **e) Bestimmen Sie B × C.**

3) **P sei die Menge der Primzahlen. Welche Mächtigkeit hat N\P? (Als bekannt wird vorausgesetzt: Es gibt unendlich viele Primzahlen.)**

4) **Beschreiben Sie die Komplementmenge von Z^- bezüglich der Menge Z!**

5) **Zeichnen Sie ein Mengendiagramm für folgende Mengen:**



- **a) A \ (B C) und (A \ B) C**
- **b) A (B \ C) und (A B) \ C**
- **c) A \ (B \ C) und (A \ B) \ C**
- **d) A ∩ (B C) und (A ∩ B) C**

Prüfen Sie jeweils die Gültigkeit des Assoziativgesetzes!

6) **A = { x R | -1 ≤ x ≤ 1}, B = { x Q | -1 ≤ x ≤ 1}**
- **a) Untersuchen Sie, ob die Schnittmenge A ∩ B leer ist.**
- **b) Bilden Sie die Vereinigungsmenge A B.**
- **c) Geben Sie einige Beispiele für Elemente aus A\B an.**
- **d) Sind die beiden Mengen A und B äquivalent?**

7) **Es sei K die Menge der Einwohner des Kantons Graubünden. C sei die Menge der Einwohner der Stadt Chur und B sei die Menge der Bürger der Stadt Chur. Zeichnen Sie ein Mengendiagramm!**

8) **Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke durch Betrachten eines Mengendiagramms:**
a) A ∩ A b) A A c) A\A
d) {}\A e) A ∩ (A ∩ B) f) A ∩ (A B)

Lösungen:

1)
- **a) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}**
- **b) {0, 1}**
- **c) {1, 2, 3, 5, 7}**
- **d) {1, 2}**

2)
- **a) A = {-4, -3, -2, -$\frac{3}{2}$, -1, -$\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, 3, 4},**
  B = {-2, -1, 0, 1, 2}
- **b) |A| = 13**
- **c) C = {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}**
- **d) 1 mit 0, 5 mit 1, 10 mit 2, 10 mit 3, 5 mit 4 und 1 mit 5 Elementen, zusammen 32 Teilmengen.**
- **e) B × C = {(-2, -4), (-2, -3), (-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-2, 4), (-1, -4), (-1, -3), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (-1, 4), (0, -4), (0, -3), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, -4), (1, -3), (1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, -4), (2, -3), (2, -2), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)}**

3) **|N \ P| = |N|**

4) Z_0^+

5) -

6)
- **a) nein**
- **b) A B = A**
- **c) $\sqrt{\frac{1}{2}}$, 0,1011011101111..., $\frac{\pi}{4}$**
- **d) nein**

7) -

8)
- **a) A**
- **b) A**
- **c) {}**
- **d) {}**
- **e) A∩B**
- **f) A**

1) **Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke durch Betrachten eines Mengendiagramms:**
   a) A (A\B) b) A ∩ (A\B) c) A\(A B)
   d) B (A\B) e) A\(B\A) f) A\(A\B)

2) **Desgleichen:**
   a) (A B) (A\B) b) (A B) ∩ (A\B) c) (A ∩ B) (A\B)
   d) (A B) \ (B\A) e) (A\B) ∩ (A ∩ B) f) (A\B)\(B\A)

3) **Es sei die Grundmenge G ={10, 11, …, 28, 29} gegeben. M sei die Menge aller Zahlen aus G, bei welchen mindestens eine ihrer Ziffern ungerade ist. Notieren Sie $\overline{M}$ in aufzählender Form und beschreiben Sie $\overline{M}$ durch die typische Eigenschaft ihrer Elemente.**

4) **Zeichnen Sie Mengendiagramme für folgende Mengen: (G = Grundmenge, A G, B G)**
   a) A ∩ $\overline{B}$ b) $\overline{A}$ $\overline{B}$ c) $\overline{A}$ ∩ $\overline{B}$ d) $\overline{A}$ B

5) **A = {a, b, c, d, e}, B = {1, 2, 3}**
   a) Bestimmen Sie die Produktmengen A × B und B × B.
   b) Welche Mächtigkeit haben die Mengen A × B und B × B?
   c) Geben Sie eine Methode an, wie man allgemein die Mächtigkeit einer Produktmenge bestimmen kann.

6) **A = {(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (4, a), (4, b), (4, c), (8, a), (8, b), (8, c), (16, a), (16, b), (16, c)}**
   a) Geben Sie die Menge A in beschreibender Form an!
   b) Die Menge A kann als Produkt zweier anderer Mengen dargestellt werden. Geben Sie diese beiden Mengen an!

7)

NAME	WOHNORT	CLUB
Meier	Chur	Fussball
Müller	Chur	Tennis
Huber	Tamins	Fussball
Meier	Tamins	Tennis
Huber	Tamins	Tennis

Die Tabelle gibt eine Aufstellung einiger Personen mit ihrem Wohnort und der Mitgliedschaft in einem Verein. Geben Sie Mengen an, aus denen man durch Produktbildung (kartesisches Produkt) eine Menge mit mindestens den hier aufgezählten Wertetripeln erhält.

8) **Ein Anwalt will die Leistungen, die er für seine Mandanten erbringt, geordnet erfassen, damit er am Schluss für jeden Fall eine übersichtliche Rechnung präsentieren kann. Zu beachten ist, dass ein Mandant gleichzeitig mehrere Fälle hängig haben kann. Die Mengenlehre hilft, hier Ordnung in die Buchhaltung zu bringen. Definieren Sie Mengen, durch deren Produktbildung alle Geschäftsvorfälle in diesem Anwaltsbüro beschrieben werden können.**

Lösungen:

1) a) A
   b) A\B
   c) {}
   d) A B
   e) A
   f) A ∩ B
2) a) A B
   b) A\B
   c) A
   d) A
   e) {}
   f) A\B
3) $\overline{M}$ = {20, 22, 24, 26, 28}, beide Ziffern sind gerade
4) -
5) a) A × B = {(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1), (e, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 2), (e, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3), (e, 3)}, B × B = {(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)}
   b) |A × B| = 15, |B × B| = 9
   c) |A × B| = |A| • |B|
6) a) A = {(2^x, y) | 0 ≤ x ≤ 4 x Z y {a, b, c}}
   b) A = {1, 2, 4, 8, 16} × {a, b, c}
7) A = {Meier, Müller, Huber}, B = {Chur, Tamins}, C = Fussball, Tennis}
8) A = Menge der Adressen, F = Menge der Fälle, B = Menge der Buchungen. Jeder Geschäftsvorfall ist dann Element von A × F × B.

Bilden Sie die Wahrheitswerttabellen:

1) a) (¬A B) ↔ A b) (A (B C)) → B

2) a) (A B) ¬A ¬B b) ((A → B) → A) → A

3) a) (A ¬B) → (C A) b) (A ↔ ¬B) (B → A)

Bilden Sie die verkürzten Wahrheitswerttabellen:

4) a) ((A → B) → B) ¬A b) (¬A ¬B) → (B ↔ C)

5) a) (A ↔ (A ¬A)) ↔ ¬A b) ((A → B) → C) → ((C → A) → (D → A))

6) a) (A → B) → ((B → C) → (A → C)) b) (A B) (A ¬B) (¬A B) (¬A ¬B)

7) ((A C) (B ¬C)) ↔ ((¬A C) (¬B ¬C))

Vereinfachen Sie:

8) a) ((¬(¬(A C))) (¬A)) = b) ((A (¬B)) (C (¬A))) =

9) a) (((A (¬B)) C) (¬A)) = b) ((¬A) → (B → (¬(A C)))) =

10) a) (((A B) → (¬C)) ((((¬B) C) B))) = b) ((A (¬(¬B))) ↔ (B ↔ (C B))) =

11) a) ((B ↔ (C B)) ↔ (A (¬(¬B)))) = b) ((¬(A B)) (C (¬B))) =

12) ((((A (¬B)) → A) (A (¬(¬B)))) (¬A)) =

13) a) ((A → (¬(B C))) → ((¬A) → (¬B))) = b) (((A B) → (¬C)) ((¬B) C)) =

14) a) ((A (¬(¬B))) ↔ (B ↔ (C B))) = b) ((B ↔ (C B)) ↔ (A (¬(¬B)))) =

15) a) (((¬A) (B C)) → (A ↔ (¬B))) = b) ((A → (¬(¬B))) (¬(A C))) =

16) a) (((A → (¬A)) → B) → (A → B)) = b) ((¬A) → (A → B))

17) **Formulieren Sie sprachlich das exakte Gegenteil folgender Aussagen:**
a) **Heute scheint die Sonne**
b) **Im Kino: Die Plätze in den ersten 3 Reihen Parterre oder in der letzten Reihe Balkon sind frei.**

18) **Aussage A: Die Tomate ist blau.**
Aussage B: Die Banane ist krumm.
Prüfen sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:
a) A B b) A B c) ¬A B d) ¬A ¬B

19) **Beim Besuch einer ägyptischen Pyramide gelangen Sie in eine kleine Grabkammer, in der zwei Vasen stehen. Glücklicherweise haben Sie gelernt, Hieroglyphen zu entziffern, und können deshalb lesen, was auf den Vasen und dem Täfelchen davor steht.**
Auf dem Täfelchen vor den Vasen lesen Sie: "In einer dieser beiden Vasen befindet sich das Geheimnis der ewigen Jugend. Sie dürfen eine der Vasen mitnehmen. Nehmen Sie aber beide Vasen mit, ereilt Sie der Fluch der Pharaonen!"
In die Vase links von Ihnen ist folgendes eingraviert: "Aussage A: Das Geheimnis befindet sich nicht in dieser Vase." Auf der Vase rechts von Ihnen steht: "Aussage B: Genau eine der beiden Aussagen A oder B ist wahr."
Welche Vase nehmen Sie mit?

1) **Drehschieber-Vakuumpumpen:**
In der Tabelle sind der Pumpentyp, die Anzahl Stufen, das Saugvermögen und der Preis von Drehschieber-Vakuumpumpen von Balzers angegeben. Definieren Sie jeweils ein Fuzzy-Set zu folgenden Eigenschaften:

a) einstufig **b) sehr kleines Saugvermögen** **c) teuer**
d) Mittelklasse **e) preiswert** **f) hoher Enddruck**

Typ	Stufen	Saugvermögen [m³/h]	Enddruck [mbar]	Preis [Fr.]	a	b	c	d	e	f
UNO 1.5A	1	1.5	$<6\cdot 10^{-2}$	1'375.00						
DUO 1.5A	2	1.5	$<6\cdot 10^{-3}$	2'290.00						
UNO 004 B	1	4.2	$<3\cdot 10^{-2}$	3'005.00						
UNO 008 B	1	8.4	$<3\cdot 10^{-2}$	3'480.00						
UNO 016 B	1	16.2	$<3\cdot 10^{-2}$	4'820.00						
DUO 004 B	2	4.2	$<2\cdot 10^{-3}$	3'525.00						
DUO 008 B	2	8.4	$<2\cdot 10^{-3}$	4'255.00						
DUO 004 B	2	16.2	$<2\cdot 10^{-3}$	5'410.00						
UNO 030 A	1	34	$<3\cdot 10^{-2}$	6'690.00						
UNO 060 A	1	68	$<3\cdot 10^{-2}$	10'640.00						
UNO 120 A	1	120	$<3\cdot 10^{-2}$	14'510.00						
UNO 250 A	1	250	$<3\cdot 10^{-2}$	23'280.00						
DUO 030 A	2	34	$<2\cdot 10^{-3}$	8'480.00						
DUO 060 A	2	68	$<2\cdot 10^{-3}$	12'630.00						
DUO 120 A	2	120	$<2\cdot 10^{-3}$	20'750.00						
DUO 250 A	2	250	$<2\cdot 10^{-3}$	28'990.00						
BA 501	1	500	$<6\cdot 10^{-2}$	37'240.00						

2) **Hotel in Chur: z = zentral, b = Bahnhofsnähe, g = für Gruppen geeignet, r = romantisch**

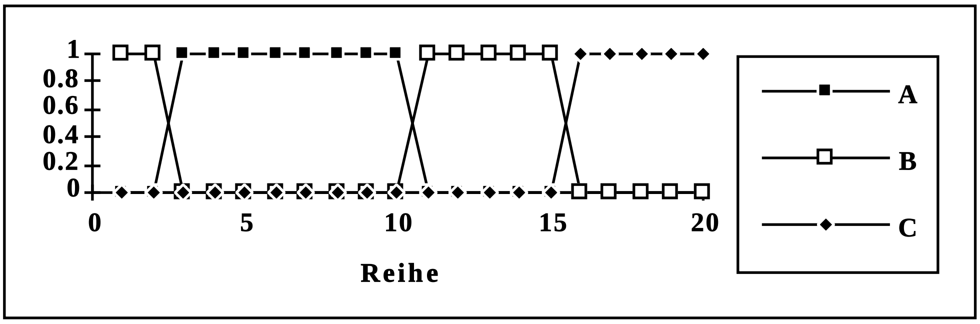
		z	b	g	r	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{C}$
ABC-Terminus	Ottostrasse 8	0.8	1	0,2	0			
Annahof	Tittwiesenstrasse 3	0.4	1	0,3	0			
Chur	Welschdörfli 2	0,6	0	0,8	0,3			
City	St. Martinsplatz 4	1	0.2	0,3	0,3			
Drei Könige	Reichsgasse 18	1	0.4	1	0,6			
Duc de Rohan	Masanserstrasse 44	0.5	0,4	1	0,5			
Franziskaner	Kupfergasse 18	1	0,2	0,2	0,4			
Freieck	Reichsgasse 50	1	0,4	0,5	0,3			
Krone	Kronengasse 3	1	0,2	0,3	0,2			
Marsöl	Süsswinkelgasse 25	0.9	0	1	0,4			
Post	Poststrasse 11	1	0,4	0,4	0			
Rebleuten	Pfisterplatz 1	1	0,3	0,2	1			
Rosenhügel	Malixerstrasse 32	0,5	0	0,8	0			
Rütli	Welschdörfli 18	0,6	0	0,1	0,5			
Schweizerhaus	Kasernenstrasse 10	0.3	0	0,1	0,3			
Sommerau	Emserstrasse 4	0	0	1	0,2			
Stern	Reichsgasse 5	1	0,4	0,8	1			
Surselva	Welschdörfli 14	0,6	0	0,3	0,2			

$\tilde{A}$ beschreibt die romantischen Hotels in Bahnhofsnähe, $\tilde{B}$ die zentralen, für Gruppen geeigneten Hotels und $\tilde{C}$ die Hotels, welche romantisch oder zentral gelegen sind.
Bestimmen Sie für $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ und $\tilde{C}$ die α-Level-Sets mit jeweils α = 0,5.

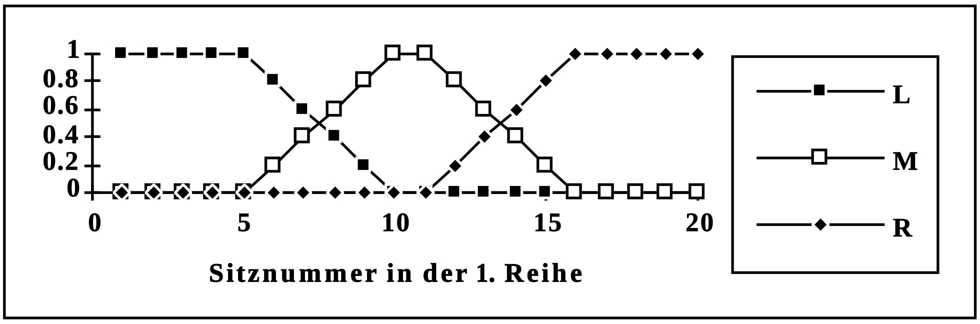
Theaterbillet: Die Graphik zeigt einen Sitzplan im Theater:

R																					R
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	**1**
2	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	**2**
3	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	**3**
4	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	**4**
5	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	**5**
6	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	**6**
7	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	**7**
8	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	**8**
9	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	**9**
10	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	**10**
11	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	**11**
12	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	**12**
13	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	**13**
14	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	**14**
15	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	**15**
16	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	**16**
17	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	**17**
18	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	**18**
19	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	**19**
20	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	**20**

Das folgende Diagramm gibt die Zugehörigkeitsgrade für die Preiskategorien der Billette (A, B, C) an. Beschreiben Sie mit Worten Fuzzy-Sets $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, welche durch die unten definierten Zugehörigkeitsfunktionen beschrieben werden.



Die Sitze in jeder Reihe können mit den Ausdrücken "Links", "Mitte", "Rechts" charakterisiert werden. Die folgende Graphik gibt die Zugehörigkeitswerte an, die dazugehörigen Fuzzy-Sets werden mit $\tilde{L}$, $\tilde{M}$, $\tilde{R}$ bezeichnet.



Ein Platz gilt als "gut", wenn er von der Kategorie A Mitte ist. Als "schlecht gelten die Plätze der Kategorie C, welche mit mindestens 0.8 zugehörig zu "Links" oder "Rechts" beschrieben sind. Färben Sie im Sitzplan die "guten" Plätze rot und die "schlechten" Plätze grün.

Bestimmen Sie $\tilde{L} \cap \tilde{B}$ (blau) und charakterisieren Sie das neue Set mit Worten.

Ebenso: $\tilde{M}$ $\tilde{A}$ (gelb).

Welchen Zugehörigkeitswert zu $\tilde{L} \cap \tilde{B}$ haben die Sitze mit den Nummern 23 und 268?

Welchen Zugehörigkeitswert zu $\tilde{M}$ $\tilde{A}$ haben die Sitze mit den Nummern 168 und 354?

1) Verwandeln Sie in eine Dezimalzahl:

a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{31}{32}$ c) $\frac{17}{1024}$ d) $\frac{23}{25}$
e) $\frac{314}{625}$ f) $\frac{2}{7}$ g) $\frac{5}{11}$ h) $\frac{15}{13}$
i) $\frac{5}{37}$ j) $\frac{1}{6}$ k) $\frac{17}{22}$ l) $\frac{23}{29}$

2) Verwandeln Sie in einen gewöhnlichen Bruch:

a) 0,28 b) 4,3875 c) 0,328 d) 0,09375
e) 5,8 f) 0,1 g) 0,01 h) 0,001

3) a) $0{,}0\overline{01}$ b) $0{,}\overline{001}$ c) $0{,}\overline{7}$ d) $0{,}\overline{13}$
e) $1{,}\overline{27}$ f) $0{,}\overline{216}$ g) $0{,}0\overline{74}$ h) $4{,}2\overline{43}$

4) Welche Zahl wird durch folgende Intervallschachtelung dargestellt?

a) [1;2], [1,6;1,7], [1,66;1,67], [1,666;1,667], [1,6666;1,6667], …
b) [0;1], [0,2;0,3], [0,22;0,23], [0,222;0,223], [0,2222;0,2223], …
c) [3;4], [3;3,1], [3;3,01], [3;3,001], [3;3,0001], …

5) Stellen Sie folgende Zahlen durch eine Intervallschachtelung dar:

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{7}{11}$ c) $\frac{1}{7}$ d) 2,5 e) 4

Geben Sie bei d) und e) je zwei Möglichkeiten an!

6) Welche der folgenden Zahlen sind rational, welche nicht?

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{3{,}24}$ c) $\sqrt{6{,}4}$ d) $\sqrt{0{,}49}$
e) $\sqrt{0{,}016}$ f) $\sqrt{0{,}9}$ g) $\sqrt{0{,}09}$ h) $\sqrt{0{,}004}$
i) $\sqrt{2{,}56}$ j) $\sqrt{10{,}24}$ k) $\sqrt{0{,}00025}$ l) $\sqrt{0{,}0025}$

7) Nach welchem Gesetz ist vermutlich die Reihenfolge der Ziffern bei den nachstehenden nicht abbrechenden Dezimalzahlen gewählt? Welche Zahlen sind rational?

a) 1,21666… b) 4,6363363336… c) 0,3557575757…
d) 0,5050050005… e) 2,7287272727… f) 3,21012101…

Lösungen:

1)
- a) 0.875
- b) 0.96875
- c) 0.0166015625
- d) 0.92
- e) 0.5024
- f) $0.\overline{285714}$
- g) $0.\overline{45}$
- h) $1.\overline{153846}$
- i) $0.\overline{135}$
- j) $0.1\overline{6}$
- k) $0.7\overline{72}$
- l) $0.\overline{7931034\ldots}$
  $\overline{48275862\ldots}$
  $\overline{0689655172413}$

2)
- a) $\frac{7}{25}$
- b) $\frac{351}{80}$
- c) $\frac{41}{125}$
- d) $\frac{3}{32}$
- e) $\frac{29}{5}$
- f) $\frac{1}{10}$
- g) $\frac{1}{100}$
- h) $\frac{1}{1000}$

3)
- a) $\frac{1}{990}$
- b) $\frac{1}{999}$
- c) $\frac{7}{9}$
- d) $\frac{13}{99}$
- e) $\frac{14}{11}$
- f) $\frac{8}{37}$
- g) $\frac{37}{495}$
- h) $\frac{4201}{990}$

4)
- a) $1.\overline{6}$
- b) $0.\overline{2}$
- c) 3

5) -

6)
- a) rational
- b) rational
- c) irrational
- d) rational
- e) irrational
- f) irrational
- g) rational
- h) irrational
- i) rational
- j) rational
- k) irrational
- l) rational

7)
- a) rational
- b) irrational
- c) rational
- d) irrational
- e) rational
- f) rational

1) $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 6 - 2i$, $z_3 = -2 + 4i$
   a) Berechnen Sie: $z_1 + z_2 - z_3$, $3z_1 - 2z_2 + z_3$
   b) Bestimmen Sie z: $z_1 + z = z_2$, $3z_1 - 2z = 3z_3 - 2z_2$

2) Berechnen Sie x und y:
   a) $(7 - 3i) + (x + yi) = 5 + 4i$ b) $(x + 8i) - (3 + yi) = -1 - 2i$
   c) $(4 + 5i) \bullet (x + yi) = 5 - 4i$ d) $(x + yi) \bullet (8 - 9i) = 3 + 4i$

3) Ist die Menge $M = \{z \quad C \mid z = bi \quad b \quad R\}$ eine Gruppe bezüglich a) der Addition, b) der Multiplikation?

4) Stellen Sie die folgenden Zahlen und die dazu konjugiert komplexen Zahlen in der Gauss'schen Zahlenebene dar:
   a) $z = 3 + 2i$ b) $z = 5 - 3i$ c) $z = -4 + 5i$

5) Stellen Sie die folgenden Zahlen in der trigonometrischen Form dar:
   a) $-2 + 9i$ b) $6 - 4i$ c) $3 + 8i$ d) $8 - 12i$

6) Berechnen Sie die Potenzen:
   a) $(2 + i)^2 =$ b) $(-4 + 2i)^4 =$ c) $(6 + 3i)^8 =$
   d) $(-3 - i)^3 =$ e) $(i - 1)^5 =$ f) $(2 - i)^4 =$

7) Berechnen Sie die Quotienten durch geeignetes Erweitern der Brüche und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch Division in der trigonometrischen Form:
   a) $\frac{2 + i}{3 - i} =$ b) $\frac{-4 - 2i}{-4 + 2i} =$ c) $\frac{7 + 8i}{i - 1} =$ d) $\frac{i}{i+2} =$

8) Bestimmen Sie alle Wurzel in der Menge C:
   a) $z^2 = -2$ b) $z^2 = 8$ c) $z^3 = -8$ d) $z^5 = 32$
   e) $z^4 = 16$ f) $z^8 = 256$ g) $z^2 = i$ h) $z^2 = -i$

9) Bestimmen Sie alle Wurzel in der Menge C:
   a) $z^3 = -8i$ b) $z^4 = 24i - 7$ c) $z^3 = 2 + 2i$
   d) $z^2 = 5 + 12i$ e) $z^3 = 27i$ f) $z^2 = 2i$

Lösungen

1) a) 13 - 3i, 1 + 17i b) 1 - 5i, 16,5 - 3,5i
2) a) x = -2, y = 7 b) x = 2, y = 10
   c) x = 0, y = -1 d) x = -0,083, y = 0,41
3) a) ja b) nein
4) -
5) a) 9,2/102,5° b) 7,2/326,3°
   c) 8,54/69,4° d) 15,1/303,7°
6) a) 5/53,1° b) 400/253,7° c) 4100625/212,5°
   d) 31,6/235,3° e) 5,66/315° f) 25/253,7°
7) a) 0,5 + 0,5i
   b) 0,6 + 0,8i
   c) 0,5 - 7,5i
   d) 0,2 + 0,4i
8) a) 1,41/ 90°, 270°
   b) 2,82/ 0°, 180°
   c) 2/ 60°, 180°, 300°
   d) 2/ 0°, 72°, 144°, 216°, 288°
   e) 2/ 0°, 90°, 180°, 270°
   f) 2/ 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°
   g) 1/ 45°, 225° h) 1/ 135°, 315°
9) a) 2/ 90°, 210°, 330°
   b) 2,24/ 26,6°, 116,6°, 206,6°, 296,6°
   c) 1,41/ 15°, 135°, 255°
   d) 3,6/ 33,7°, 213,7°
   e) 3/ 30°, 150°, 270°
   f) 1,41/ 45°, 225°

1) Schreiben Sie mit Zehnerpotenzen:

a) 207'485 = ...

b) 35'723 = ...

c) 50'003 = ...

d) 3'407'299 = ...

e) 400'299'753 = ...

f) 3'000'000'401 = ...

2) Schreiben Sie folgende Dualzahlen mit Zweierpotenzen auf und berechnen Sie den dezimalen Wert der Zahlen:

a) 1001_2 = ...

b) 10110_2 = ...

c) 11100_2 = ...

d) 1000111_2 = ...

e) 111011001_2 = ...

f) 100101110_2 = ...

g) 101111010_2 = ...

h) 100111111_2 = ...

3) Verwandeln Sie folgende Dezimalzahlen in Dualzahlen:

a) 46_{10} = ...

b) 53_{10} = ...

c) 112_{10} = ...

d) 423_{10} = ...

e) 819_{10} = ...

f) 2428_{10} = ...

g) 3713_{10} = ...

h) 12928_{10} = ...

Lösungen:

1) a) $2 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
b) $3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$
c) $5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^0$
d) $3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 +$
$+ 9 \cdot 10^0$
e) $4 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 9 \cdot 103 + 7 \cdot 10^2 +$
$+ 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$
f) $3 \cdot 10^9 + 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^0$

2) a) 9_{10}
b) 22_{10}
c) 28_{10}
d) 71_{10}
e) 473_{10}
f) 302_{10}
g) 378_{10}
h) 319_{10}

3) a) 101110_2
b) 110101_2
c) 1110000_2
d) 110100111_2
e) 1100110011_2
f) 100101111100_2
g) 111010000001_2
h) 11001010000000_2

4) Verwandeln Sie folgende Dualzahlen in Hexadezimalzahlen:

a) 100100110111_2 .... b) 101110111101_2 .... c) 110110001011_2 ....

d) 11100110011_2 .... e) 10001111010_2 .... f) 111000101101011_2 ....

g) 1101101011101_2 .... h) 1011011101110_2 .... i) 1101001110110111_2 ....

5) Verwandeln Sie folgende Hexadezimalzahlen in Dualzahlen:

a) $37A4_{16}$ .... b) $BC51_{16}$ .... c) $A0F_{16}$ ....

d) $75C3_{16}$ .... e) $D8A_{16}$ .... f) $AFF2_{16}$ ....

g) $9C3D_{16}$ .... h) $F6_{16}$ .... i) $5E41_{16}$ ....

6) Verwandeln Sie die gegeben Zahlen ins angegebene System:

a) 359_{10} = ...$_2$ = ...$_8$ = ...$_{16}$

b) $4CA3_{16}$ = ...$_2$ = ...$_8$ = ...$_{10}$

c) 716_8 = ...$_2$ = ...$_{10}$ = ...$_{16}$

d) 100110101_2 = ...$_8$ = ...$_{10}$ = ...$_{16}$

e) 2744_{10} = ...$_2$ = ...$_8$ = ...$_{16}$

f) $F5B_{16}$ = ...$_2$ = ...$_8$ = ...$_{10}$

g) 1427_8 = ...$_2$ = ...$_{10}$ = ...$_{16}$

h) 1110110101_2 = ...$_8$ = ...$_{10}$ = ...$_{16}$

Lösungen:

4)
- a) 937_{16}
- b) BBD_{16}
- c) $D8B_{16}$
- d) 733_{16}
- e) $47A_{16}$
- f) $716B_{16}$
- g) $1B5D_{16}$
- h) $16EE_{16}$
- i) $D3B7_{16}$

5)
- a) 0011'0111'1010'0100$_2$
- b) 1011'1100'0101'0001$_2$
- c) 1010'0000'1111$_2$
- d) 0111'0101'1100'0011$_2$
- e) 1101'1000'1010$_2$
- f) 1010'1111'1111'0010$_2$
- g) 1001'1100'0011'1101$_2$
- h) 1111'0110$_2$
- i) 0101'1110'0100'0001$_2$

6)
- a) $359_{10} = 101100111_2 = 547_8 = 167_{16}$
- b) $4CA3_{16} = 100110010100011_2 = 46243_8 =$
  $= 19619_{10}$
- c) $716_8 = 111001110_2 = 462_{10} = 1CE_{16}$
- d) $100110101_2 = 465_8 = 309_{10} = 135_{16}$
- e) $2744_{10} = 101010111000_2 = 5270_8 = AB8_{16}$
- f) $F5B_{16} = 111101011011_2 = 7533_8 = 3931_{10}$
- g) $1427_8 = 1100010111_2 = 791_{10} = 317_{16}$
- h) $1110110101_2 = 1665_8 = 949_{10} = 3B5_{16}$

1) Um den absoluten Nullpunkt der Temperatur zu bestimmen, kann man in einem eingeschlossenen Gas bei konstantem Volumen die Temperatur und den Druck messen. Die nebenstehende Tabelle gibt die Messwerte an. Bestimmen Sie die 1. und die 2. Regressionsgerade und berechnen Sie daraus den absoluten Nullpunkt.
Es gilt: Wenn der Druck auf Null gesenkt wird, ist der absolute Nullpunkt der Temperatur erreicht.

Temperatur °C	Druck mbar
25	990.9
30	1008.5
35	1023.4
40	1035.6
50	1064.0
60	1095.2
70	1126.3
80	1153.4
85	1177.8
90	1207.6
93	1226.6

2) Verkehrsunfälle in Österreich 1985:
Die Tabelle gibt eine Übersicht über die Anzahl der Unfälle mit Personenschaden und die Anzahl der Toten nach Bundesland aufgeschlüsselt.
Stellen Sie die Anzahl Unfälle mit Personeneschaden in Relation zur Anzahl der Toten dar und bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten.
Beurteilen Sie, ob es sinnvoll ist, eine Regressionsgerade in die Grafik zu legen. Wenn ja, berechnen Sie die 1. Regressionsgerade und zeichnen Sie sie ein.

Bundesland	Unfälle mit Personenschaden	Tote
Burgenland	1147	80
Kärnten	3835	131
Niederösterreich	8809	412
Oberösterreich	9129	239
Salzburg	3271	124
Steiermark	8232	276
Tirol	3931	153
Vorarlberg	2220	67
Wien	7572	138

3) Leitfähigkeit von Metallen:
Die Tabelle gibt den elektrischen Widerstand und die Wärmeleitfähigkeit einiger Metalle an.
Stellen Sie die elektrische Leitfähigkeit in Relation zur Wärmeleitfähigkeit dar und bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten.
Beurteilen Sie, ob es sinnvoll ist, eine Regressionsgerade in die Grafik zu legen. Wenn ja, berechnen Sie die 1. Regressionsgerade und zeichnen Sie sie ein.

	elektrischer Widerstand $\frac{\Omega mm^2}{m}$	Wärmeleitfähigkeit $\frac{W}{mK}$
Aluminium	0.027	220
Blei	0,208	34,8
Eisen	0,10	74
Gold	0.022	312
Kupfer	0.0172	384
Nickel	0.087	91
Quecksilber	0.96	8.2
Silber	0.016	407
Zink	0.061	112
Zinn	0,11	65

1) **Ein Glücksrad ist in 7 Sektoren eingeteilt, denen die Wahrscheinlichkeiten p(1) = $\frac{1}{7}$, p(2) = $\frac{1}{5}$, p(3) = $\frac{1}{3}$, p(4) = $\frac{1}{15}$, p(5) = $\frac{2}{21}$, p(6) = $\frac{1}{35}$, p(7) = $\frac{2}{15}$ zugeordnet sind. Nun sind folgende Ereignisse definiert:**
A = {x | x ungerade}, B = {x | x ist Quadratzahl}, C = {x | x > 5}, D = {x | x ≤ 3}. Berechne: w(A), w(B), w(C), w(D), w(A ∩ B), w($\overline{B}$ D), w($\overline{A}$ $\overline{B}$), w(C D), w($\overline{C}$ ∩ $\overline{D}$), w(D $\overline{C}$). ***(3)***

2) **Eine Urne enthält 100 Kugeln mit den Nummern 00, 01, 02, ..., 99. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Es sei X die erste und Y die zweite Ziffer ihrer Nummer. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse, die folgendermassen festgelegt sind: a) X = 3, b) Y ≠ 4, c) X ≠ Y, d) X > Y, e) X ≤ Y, f) X + Y = 9, g) X < 4 Y < 3, h) X > 4 Y < 4, i) X + Y ≠ 8, k) X ≠ 5 Y ≠ 4, l) X*Y > 49.** ***(4)***

3) **In einer Urne befinden sich Kugeln mit den Nummern a) 0 bis 9, b) 00 bis 99, c) 000 bis 999, d) 0000 bis 9999. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Nummer die Ziffer 9 enthält?** ***(5)***

4) **In einer Stadt gibt es 2000 Motorräder mit den Nummern 1 bis 2000. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das die Nummer des nächstern vorbeifahrenden Motorrades mit 1 beginnt?** ***(7)***

5) **Ein Klub hat 100 Mitglieder. Eine Befragung ergab, dass 48 Männer und 12 Frauen Sport treiben, und 16 Männer und 24 Frauen keinen Sport treiben. Eine Person wird zufällig ausgewählt.**
a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein Mann ist, eine Frau ist, Sport treibt, keinen Sport treibt, ein sporttreibender Mann ist?
b) Mir wurde gesagt, dass die ausgewählte Person ein Mann (eine Frau) sei. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie Sport treibt? ***(9)***

6) **Ein Vater sagt zu seinem Sohn: "Du bekommst mehr Taschengeld, wenn du von drei Tennispartien, die du abwechselnd gegen mich und deine Mutter spielst, zwei hintereinander gewinnst." Der Vater ist der stärkere Spieler. Soll der Junge zuerst gegen den Vater oder gegen die Mutter spielen?** ***(10)***

7) **Abel und Kain schiessen gleichzeitig auf dasselbe Ziel. Sie treffen mit den Wahrscheinlichkeiten 4/5 bzw. 7/10. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ziel mindestens einmal getroffen wird?** ***(13)***

8) **| EVA | | EVAEVA | Abel darf eine der beiden Urnen wählen. Dann zieht er aus der gewählten Urne zufällig drei Buchstaben ohne Zurücklegen. Wenn er das Wort EVA zieht, bekommt er einen Preis. Welche der Urnen ist günstiger?** ***(14)***

9) **Abel und Kain haben je zwei Kugeln. Sie schiessen abwechselnd auf eine Glasflasche. Abel beginnt. Sie treffen mit den Wahrscheinlichkeiten 1/3 bzw. 1/4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Abel die Flasche zerstört?** ***(15)***

10) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in sechs Würfen eines L-Würfels lauter verschiedene Augenzahlen zu erzielen?** ***(17)***

Lösungen:

1) w(A) = 0,295;
w(B) = 0,21;
w(C) = 0,162;
w(D) = 0,676;
w(A ∩ B) = 0.143
w($\overline{B}$ D) = 0,933
w($\overline{A}$ $\overline{B}$) = 0.857
w(C D) = 0,838;
w($\overline{C}$ ∩ $\overline{D}$) = 0,162;
w(D $\overline{C}$) = 0,838

2) a) 0,1
b) 0,9
c) 0,9
d) 0,45
e) 0,55
f) 0,1
g) 0,12
h) 0,2
i) 0,91
k) 0,81
l) 0,1

3) a) 0,1
b) 0,19
c) 0,271
d) 0,3439

4) 0,5555

5) w(M) = 0,64;
w(F) = 0,36;
w(S) = 0,60;
w(N) = 0,40;
w(M | S) = 0,48;
w(S | M) = 0,75;
w(S | F) = $\frac{1}{3}$

6) V - M - V

7) $\frac{47}{50}$

8) linke Urne $\frac{1}{6}$, rechte Urne $\frac{1}{15}$

9) 0,5

10) $\frac{6!}{6^6}$ = 0,0154

1) | 2; 3; 4; 5 | | 4; 5; 6; 7 | | 1; 2; 5; 8; 10 |

Aus jeder der drei Urnen wird eine Zahl zufällig gezogen, und die drei Zahlen werden
a) multipliziert
b) addiert.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis gerade ist? *(16)*

2) **Von zehn Zahlen sind fünf positiv und fünf negativ. Zwei Zahlen werden zufällig ohne Zurücklegen gezogen und multipliziert. Ist es günstiger, auf ein positives oder ein negatives Produkt zu setzen? *(18)***

3) **Ein L-Würfel wird sechsmal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, lauter ungerade Augenzahlen zu werfen? *(23)***

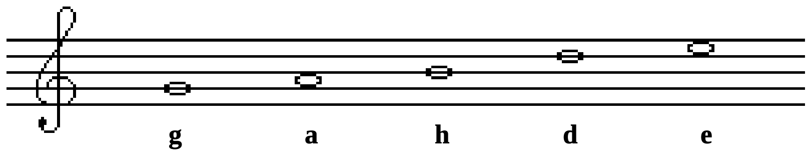
4) **Ein L-Würfel wird viermal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, lauter "5" oder "6" zu werfen? *(24)***

5) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem 52-Blatt-Kartenspiel**
a) zwei Könige
b) das Herz-As und die Karo-7 zu ziehen? *(29)*

6) **Ein milder Lehrer macht seine Noten auf folgende Weise: Er wirft drei Würfel gleichzeitig und nimmt die grösste der drei auftretenden Augenzahlen. Wieviele Prozent Sechser gibt er? *(26)***

7) **Zwei hintereinanderliegende Strassenkreuzungen werden mit Lichtsignalen geregelt. Bei der ersten Kreuzung dauert die Rotphase 35 s, die Gelbphase 15 s und die Grünphase 90 s. Bei der zweiten Kreuzung dauert in derselben Fahrrichtung die Rotphase 60 s, die Gelbphase 15 s und die Grünphase 75 s.**
a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autofahrer auf beiden Ampeln gleichzeitig grün sieht?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens bei einer Ampel rot sieht? *(28)*

8) **Ein moderner Komponist verwendet für seine Kompositionen die aufgeschriebene Fünftonleiter:**



Er will einen dreistimmigen Akkord (keine gleichen Töne) komponieren, wozu er drei Töne dieser Tonleiter zufällig auswählt. Er schreibt die fünf Töne auf Zettel und zieht drei davon ohne Zurücklegen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er den Dreiklang g-h-d nicht komponieren muss? *(31)*

9) **Bei einem Kinderspiel muss man mit der Hand eines der Symbole Stein, Schere oder Papier anzeigen. Es spielen immer zwei miteinander, und zwar zeigen sie die Symbole gleichzeitig an. Dabei schlägt Papier den Stein, der Stein die Schere und die Schere das Papier. Das Spiel ist unentschieden, wenn beide das gleiche anzeigen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass a) jemand gewinnt, wenn er Schere anzeigt, b) das Spiel unentschiedenen ausgeht, c) das Spiel zweimal hintereinander unentschieden ausgeht? *(34)***

10) **In einem Betrieb sollen zwei Mitarbeiter mit Fremdsprachenkenntnissen aufgenommen werden. Es melden sich dafür zwanzig Personen. Fünf sprechen Französisch, drei Italienisch, acht Englisch und vier Spanisch. Da die Art der Fremdsprache gleichgültig ist, werden die beiden durch das Los ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass a) beide Englisch sprechen, b) keiner Spanisch spricht, c) mindestens einer Italienisch spricht, d) einer Französisch und einer Spanisch spricht? *(35)***

Lösungen:

1) a) 0,9
b) 0,5

2) w(+) = $\frac{4}{9}$; w(-) = $\frac{5}{9}$

3) $\frac{1}{64}$

4) $\frac{1}{81}$

5) a) $\frac{1}{221}$ b) $\frac{1}{1326}$

6) $\frac{91}{216}$

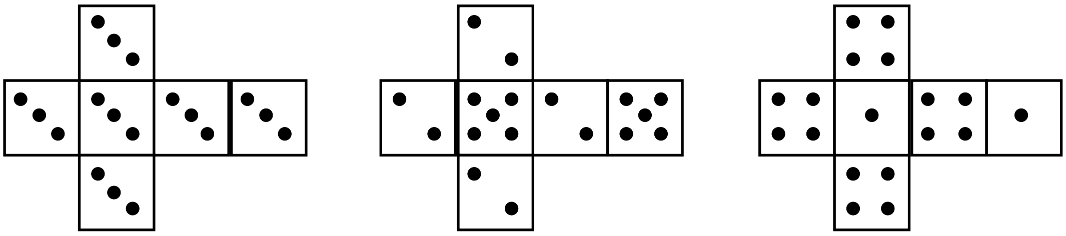
7) a) 0,321
b) 0,54

8) 0,9

9) a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{9}$

10) a) $\frac{14}{95}$
b) $\frac{12}{19}$
c) $\frac{27}{95}$
d) $\frac{2}{19}$

1) **Man stellt einen roten, einen grünen und einen blauen gefälschten Würfel gemäss folgender Zeichnung her:**



rot **grün** **blau**

Die drei Würfel werden gemeinsam geworfen. Dann gilt: Der rote zeigt meist höhere Werte als der grüne, der grüne meist höhere Werte als der blaue, und der blaue weist meistens höhere Werte als der rote auf. Berechne die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten! ***(36)***

2) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, im Schweizer Zahlenlotto (45 Zahlen) alle Zahlen (6 Zahlen) richtig zu tippen? (Die Zusatzzahl wird nicht berücksichtigt). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens einen Fehltip zu haben?** ***(60)***

3) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln a) lauter gleiche Zahlen, b) genau zwei gleiche Zahlen zu werfen?** ***(61)***

4) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen von vier Karten aus einem Spiel von 52 Blatt vier Karten von verschiedener Farbe zu ziehen?** ***(62)***

5) **Eine Klasse hat 16 Schüler. Zwölf davon sind gute Leichtathleten. Durch das Los werden drei Schüler ausgewählt und zu einer Mannschaft zusammengestellt. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft nur aus guten Leichtathleten besteht?** ***(63)***

6) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Wurf mit fünf Würfeln a) genau vier, b) genau drei, c) genau zwei gleiche Augenzahlen zu werfen? d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, fünf ungleiche Augenzahlen zu werfen?** ***(64)***

7) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, im Toto (12 Tips) einen Elfer zu machen?** ***(65)***

8) **Lisa hat an jeden ihrer fünf Verehrer einen Brief geschrieben. Auch die Umschläge sind fertig, aber sie kommt nicht dazu, sie einzustecken und abzuschicken. Diese Arbeit nimmt ihr der hilfsbereite Bruder Max ab. Max aber kann noch nicht lesen, und so ist die Zuordnung der Briefe zu den Umschlägen zufällig. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sämtliche Briefe einem falschen Empfänger zugeschickt werden?** ***(66)***

9) **Um bei einer Musikbox eine Platte zu hören, muss man eine Buchstabentaste und eine Zifferntaste niederdrücken. Es sind Tasten mit den Buchstaben A bis H und den Ziffern 0 bis 9 vorhanden. Eine unentschlossene Person drückt blind auf zwei verschiedene Tasten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person eine Platte zu hören bekommt?** ***(69)***

10) **An einer Strassengabelung stehen drei Wegweiser, die in die drei verschiedenen Strassenrichtungen weisen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Wegweiser richtig aufgestellt sind?** ***(37)***

11) **Peter schlägt Paul ein Spielchen vor: "Du darfst 3 Würfel werfen. Treten dabei Sechser auf, so hast du gewonnen. Wenn keine Sechser vorkommen, habe ich gewonnen." Paul überlegt rasch, dass für jeden Würfel die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ beträgt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste oder der zweite oder der dritte eine Sechs aufweisen ist also $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Das Spiel scheint ihm sehr fair zu sein. Würden Sie auch so überlegen? Rechnen Sie nach!** ***(80)***

Lösungen:

1) $w(r>g) = \frac{2}{3}$;
$w(g>b) = \frac{5}{9}$;
$w(b>r) = \frac{2}{3}$

2) a) $1{,}23 \cdot 10^{-7}$
b) $4{,}8 \cdot 10^{-6}$

3) a) 1/36
b) 5/12

4) 0,1055

5) 0,393

6) a) 0,0193
b) 0,154
c) 0,463
d) 0,0926

7) $4{,}52 \cdot 10^{-5}$

8) 0,367

9) 0,523

10) $\frac{1}{6}$

11) nein; w(keine 6) = 0,58

Untersuchen Sie, ob die Menge der angegebenen Vektoren linear unabhängig ist.

1) a) $\vec a = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec b = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \vec c = \begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix}$ b) $\vec a = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec b = \begin{pmatrix}1\\-3\\6\end{pmatrix}, \vec c = \begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$

2) a) $\vec a = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \vec b = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec c = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \vec d = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ b) $\vec a = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\3\end{pmatrix}, \vec b = \begin{pmatrix}0\\3\\2\\0\end{pmatrix}, \vec c = \begin{pmatrix}0\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$

3) $\vec a = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \vec b = \begin{pmatrix}6\\14\\-4\end{pmatrix}, \vec c = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

4) **Sind die drei Vektoren $\vec a, \vec b, \vec c$ linear abhängig? Falls sie linear abhängig sind, ist eine Beziehung zwischen ihnen herzustellen.**

a) $\vec a = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, \vec b = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}, \vec c = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ b) $\vec a = \begin{pmatrix}2\\-1\\7\\3\end{pmatrix}, \vec b = \begin{pmatrix}1\\4\\11\\-2\end{pmatrix}, \vec c = \begin{pmatrix}3\\-6\\3\\8\end{pmatrix}$

5) **Kann der Vektor $\vec u = \begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec a = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \vec b = \begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}, \vec c = \begin{pmatrix}1\\-5\\7\end{pmatrix}$ dargestellt werden?**

6) **Prüfen Sie, ob die Menge $\{\vec a, \vec b, \vec c\}$ eine Basis des 3-dimensionalen Vektorraumes V^3 ist. Stellen Sie den Vektor $\vec d$ durch diese Basisvektoren dar!**

$\vec a = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec b = \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}, \vec c = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}, \vec d = \begin{pmatrix}3\\8\\-7\end{pmatrix}$

7) **Die Menge $\{\vec a, \vec b, \vec c\}$ sei Basis des 3-dimensionalen Vektorraums V^3. Die Vektoren $\vec x$, $\vec y$ und $\vec z$ sind folgendermassen definiert:**

$\vec x = 3\vec a - \vec b + \vec c$

$\vec y = \vec a + \vec b + \vec c$

$\vec z = \vec a + \vec b - \vec c$

Ist die Menge $\{\vec x, \vec y, \vec z\}$ auch Basis von V^3? Wenn ja, stellen Sie die ursprünglichen Basisvektoren $\vec a$, $\vec b$ und $\vec c$ durch die neuen Basisvektoren dar.

8) **Die Menge $\{\vec a, \vec b\}$ sei Basis des 2-dimensionalen Vektorraums V^2. Die Vektoren $\vec x$ und $\vec y$ sind folgendermassen definiert:**

$\vec x = 2\vec a - \vec b$

$\vec y = \vec a + 3\vec b$

Ist die Menge $\{\vec x, \vec y\}$ auch Basis von V^2? Wenn ja, stellen Sie den Vektor $\vec d = 3\vec a - 2\vec b$ durch die neuen Basisvektoren dar.

Lösungen:

1) a) l.u.
   b) l.u.
2) a) l.a.
   b) l.u.
3) l.a.
4) a) l.u.
   b) l.a., $\vec c = 2\vec a - \vec b$
5) nein
6) $\vec d = \frac{3}{2}\vec a + \frac{3}{2}\vec b - \vec c$
7) ja,
   $\vec a = \frac{1}{4}\vec x + \frac{1}{4}\vec z$,
   $\vec b = -\frac{1}{4}\vec x + \frac{1}{2}\vec y + \frac{1}{4}\vec z$,
   $\vec c = \frac{1}{2}\vec y - \frac{1}{2}\vec z$
8) ja, $\vec d = \frac{11}{7}\vec x - \frac{1}{7}\vec y$

1) **Stellen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte A(5/8/-3) und B(4/-3/-9) auf.**

2) **Bestimmen Sie die gegenseitige Lage folgender beiden Geraden. Im Fall, dass sich die Geraden schneiden, bestimmen Sie den Winkel zwischen den Geraden.**

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 4.5 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6.5 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ d) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

3) **Stellen Sie die Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C auf (Parameterform und allgemeine Ebenengleichung):**

a) A(1/-1/2), B(-2/0/3), C(3/1/-2) b) A(5/2/1), B(-6/3/-2), C(2/5/2)

c) A(1/-2/4), B(3/-3/2), C(2/5/-2) d) A(7/4/-5), B(9/2/-10), C(5/-2/-20)

4) **Bestimmen Sie die Schnittpunkte von Gerade und Ebene:**

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $2x - y + 3z + 1 = 0$

d) $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $x + 2y - 5z + 9 = 0$

5) **Bestimmen Sie den Schnittpunkt der drei Ebenen:**

a) $4x + 3y + z - 13 = 0$, $2x - 5y + 3z - 1 = 0$, $7x - y - 2z + 1 = 0$

b) $6x - 2y - z - 1 = 0$, $3x - 5y + z + 4 = 0$, $2x - y - 3z + 14 = 0$

6) **Gesucht ist die Projektion des Punktes P(3/1/-1)**

a) auf die Ebene $x + 2y + 3z - 30 = 0$,

b) auf die Ebene $3x + y + z - 20 = 0$.

7) **Eine Pyramide hat als Grundfläche das Dreieck mit den Ecken A(4/-1/3), B(2/1/5), C(-1/-2/0) und die Spitze S(0/-5/5). Berechnen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes von S bezüglich der Grundflächenebene ABC.**

Lösungen:

1)

2) a) zusammenfallend
b) windschief
c) windschief
d) S(5/3/4), 32.5°

3) a) $x + 7y + 4z - 2 = 0$
b) $x + 2y - 3z - 6 = 0$
c) $4x + 2y + 3z - 12 = 0$
d) $5y - 2z - 30 = 0$

4) a) S(-6/13/16)
b) S(1/2/-5)
c) S(1/-3/-2)
d) S(1/0/2)

5) a) S(1/2/3)
b) S(2/3/5)

6) a) Q(5/5/5)
b) Q(6/2/0)

7) S'(2/3/-1)

1) Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Ebenen und die Gleichungen der Schnittgeraden:

a) $2x + 3y + 4z - 6 = 0$ und $3x - 2y - z + 4 = 0$

b) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ und $x + z + 6 = 0$

c) $x - 2y + 3z - 1 = 0$ und $2x + 3y - z + 6 = 0$

d) $2x - y + 2z - 3 = 0$ und $x + y + z = 0$

2) Berechnen Sie die Längen der Höhen und die Innenwinkel im Dreieck ABC:

a) A(-3/7), B(-5/-7), C(7/2) **b) A(-3/4), B(-4/-3), C(8/6)**

3) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P(6/1/-2) von der Ebene durch die drei Punkte A(3/2/1), B(-1/-1/4), C(-5/0/-5).

4) Gegeben ist die Ebene ε: $2x - 4y + z - 4 = 0$. Ermitteln Sie eine Parameterform dieser Ebene.

5) Gegeben sind die Ebene ε: $2x - 3y + 5z - 2 = 0$ und der Punkt P(3/-1/5). Legen Sie durch den Punkt P eine Gerade g, welche parallel zur Ebene ε und die y-Achse schneidet.

Lösungen:

1) a) 90°,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix}$$

b) 80,4°,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) 92°,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{7} \\ -\frac{8}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) 83,6°

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) a)

b)

3) 3

4)

5)

6)

1) **Bilden Sie das Produkt der Matrizen:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2) **Man berechne** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$**, wobei n eine natürliche Zahl sein soll.**

3) **Berechnen Sie die Matrix X aus der folgenden Matrizengleichung:** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \bullet X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

4) **Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1}:**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

5) **Gegeben ist die Matrix** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **Gesucht ist ein Vektor** $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ **sodass gilt:** $A \bullet \vec{y} = 3\vec{y}$

6) **Es sei** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ **Berechnen Sie a)** $A^2 + 3A - 10E$ **b)** $2A^2 - 3A + 5E$

7) **Es sei** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **Berechnen Sie a)** $A^2 + 2A - 11E$ **b)** $2A^3 - 4A + 5E$

8) **Ermitteln Sie den Rang folgender Matrizen:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 10 & 7 \\ -7 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 14 & 9 & 9 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

Lösungen:

1) a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

4) a)
b)

5)

6) a) 0
b)

7) a)
b)

8) a) 2
b)
c)

1) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} k-1 & 2 & 3 \\ 1 & k-3 & 4 \\ 1 & 4 & k-3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$

2) Entwickeln Sie folgende Determinanten:
a) nach der 1. Spalte b) nach der 1. Zeile c) nach der 3. Spalte d) nach der 2. Zeile

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} k-1 & 2 & 3 \\ 1 & k-3 & 4 \\ 1 & 4 & k-3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$

3) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 6 & 8 & 4 & -4 & 2 \\ 9 & 0 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 8 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & -4 & -2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

4) Berechnen Sie die folgenden n-zeiligen Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

Lösungen:

1) a)
b)
c)
d)

2) c) $k^3 - 7k^2 - 6k + 42$

3) a) -12
b) 156
c)
d)
e)

4) a) n+1
b)

1) Lösen Sie folgende homogenen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 2y - z &= 0 \\ 4x + 5y - 3z &= 0 \\ x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

2) Lösen Sie die folgenden inhomogenen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - 5y + z &= 4 \\ 2x + y - z &= 1 \\ x + 6y - 2z &= -3 \\ 4x - 9y + z &= 9 \\ x - 16y + 4z &= 8 \end{aligned}$$

3) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

4) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5) Die Funktion f bidlet den R^3 auf den R^2 ab. Dabei wird die Transformation durch die Matrix A beschrieben:

f: $R^3 \rightarrow R^2$
f: $\vec{x} \rightarrow \vec{y} = A \bullet \vec{x}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) **Untersuchen Sie f auf die Eigenschaften surjektiv, injektiv, bijektiv:**

b) **Bestimmen Sie den Bildvektor von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.**

c) **Welcher Vektor $\vec{b}$ wird auf den Vektor $\vec{b}' = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ abgebildet?**

Lösungen:

3) a) 3/-1; (k/k), (-k/k)
b) 2/1; (0/k), (k/-5k)
c) -3; (k/2k)
d) 4; (k/-k)

4) a) 1; (k/0/-k)
b) 2/1/-1; (3k/2k/k), (0/k/k), (0/k/-k)
c) 1, -1;
d) 1, -1;

5) a)
b)
c)

1) Suchen Sie das allgemeinde Glied der folgenden Zahlenfolgen:

a) $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots$

b) $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \ldots$

c) $0, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{15}{8}, \frac{12}{5}, \frac{35}{12}, \frac{24}{7}, \ldots$

d) $1, 1, \frac{7}{5}, \frac{15}{7}, \frac{31}{9}, \frac{63}{11}, \frac{127}{13}, \ldots$

2) Von welchem Glied an sind die folgenden Zahlenfolgen monoton wachsend oder abnehmend?

a) $\left\langle \frac{n^2 - 12n}{2n - 1} \right\rangle$

b) $\left\langle \frac{2n + 1}{3n - 2} \right\rangle$

c) $\left\langle \frac{2^n}{n^2} \right\rangle$

d) $\left\langle \frac{n^2}{2n^2 - 1} \right\rangle$

e) $\langle n^2 - 6n \rangle$

f) $\left\langle \frac{n^2 - 10n}{n + 2} \right\rangle$

3) Sind die angegebenen Zahlenfolgen nach oben oder nach unten beschränkt?

a) $\left\langle \frac{n+1}{2n - 1} \right\rangle$

b) $\left\langle (-1)^n \frac{n}{2n + 1} \right\rangle$

c) $\left\langle \frac{n^2}{2^n} \right\rangle$

d) $\left\langle \frac{n^2}{2n^2 - 1} \right\rangle$

4) Man bestimme die ersten vier Glieder der rekursiv definierten Folgen:

a) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$

b) $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 1$

c) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n$

d) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + n$

5) Man berechne a_{12} aus der Vorschrift: $a_1 = x, a_2 = y, a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$

6) Zeigen Sie, dass die Folge sin 1000°, sin 10000°, sin 100000°, … konstant ist.

Lösungen:

1) a) $\frac{2n - 1}{n}$

b) $\frac{n + 1}{3n + 2}$

c) $\frac{n^2 - 1}{2n}$

d) $\frac{2^n - 1}{2n - 1}$

2) a) wachsend für n N

b) abnehmend für n N

c) wachsend für $n \geq 3$

d) abnehmend für n N

e) wachsend für $n \geq 3$

f) wachsend für $n \geq 3$

3) a) k = 0, K = 2

b) k = -1, K = 1

c) k = 0, K = 2

d) k = 0, K = 1

4) a) 1, 3, 7, 15

b) 2, 5, 11, 23

c) 1, 2, 4, 7

d) 2, 3, 5, 8

5)

6) -

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

1) Aus der Rekursionsformel $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 4a_n + 4^n$ folgt für alle $n \quad N$ $a_n = n \cdot 4^{n-1}$

2) Aus der Rekursionsformel $a_1 = 0,\ a_{n+1} = 4a_n + 4^n$ folgt für alle $n \quad N$ $a_n = (n - 1) \cdot 4^{n-1}$

3) Aus der Rekursionsformel $a_1 = x + y - 1,\ a_{n+1} = x + y - \frac{xy}{a_n}$ folgt für alle $n \quad N$:
$$a_n = \frac{(x^{n+1} - y^{n+1}) - (x^n - y^n)}{(x^n - y^n) - (x^{n-1} - y^{n-1})}$$

4) Aus den Rekursionsformeln $a_1 = x + y,\ a_2 = x^2 + xy + y^2,\ a_{n+2} = (x + y)a_{n+1} - xya_n$ folgt für alle $n \quad N$ und für $x \neq y$: $a_n = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$

5) Man suche eine Formel für a_n aus den Rekursionsformeln $a_0 = 2,\ a_1 = 3,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ und beweise sie.

6) x_n sei die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Suchen Sie für x_n eine Summenformel und beweisen sie diese Formel.

7) Suchen Sie eine Summenformel für x_n und beweisen Sie die Formel:
   a) $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$
   b) $x_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots$
   c) $x_n = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots$
   d) $x_n = \frac{1}{a(a + b)} + \frac{1}{(a + b)(a + 2b)} + \frac{1}{(a + 2b)(a + 3b)} + \ldots$ (für $a, b > 0$)

8) Beweisen Sie:
   a) $3 + 7 + 11 + \ldots + (4n - 1) = 2n^2 + n$
   b) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$
   c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - 2^{1-n}$
   d) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3} n(4n^2 - 1)$

9) Beweisen Sie:
   a) $\frac{1}{1 + x} + \frac{2}{1 + x^2} + \frac{4}{1 + x^4} + \ldots + \frac{2^n}{1 + x^{2^n}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{1 + x^{2^k}} = \frac{1}{x - 1} + \frac{2^{n+1}}{1 - x^{2^{n+1}}}$ für $|x| \neq 1$.
   b) $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)\ldots(1 + x^{2^{n-1}}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}$ für $x \neq 1$.
   c) $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x - 1)}{2!} - + \ldots = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{x - 1}{n}$
   d) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n - 1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$ für $\sin x \neq 0$.

10) a) $2^n > n$ für $n \quad N$ b) $2^n > n^3$ für $n \geq 10$ c) $n! > 2^n$ für $n \geq 4$.

11) a) $\frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ für $n \geq 2$
   b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ für $n \geq 2$

1) **Berechnen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert der Folgen:**

a) $\left\langle \frac{2n^2 - n}{n^2 + n - 1} \right\rangle$

b) $\left\langle \frac{3^n + 1}{n^2} \right\rangle$

c) $\left\langle \frac{2n^2 - 3}{4n} \right\rangle$

d) $\left\langle \frac{3^n + 2(-1)^n}{n} \right\rangle$

e) $\left\langle \frac{3^n + 2n(-1)^n}{n} \right\rangle$

f) $\left\langle \frac{3^n - 3^{n-1}}{2 + 3^n} \right\rangle$

g) $\left\langle \frac{(2n - 1)^4}{(n - 1)^4} \right\rangle$

h) $\left\langle \frac{(2n - 1)^3}{1 - n^3} \right\rangle$

i) $\left\langle \frac{6n - n^2}{5n - 4} \right\rangle$

2) **Gegeben ist eine Folge $< a_n >$ und eine positive Zahl ε. Bestimmen Sie den Grenzwert g der Folge und eine natürliche Zahl N so, dass $|a_n - g| < \varepsilon$ für alle $n > N$ wird:**

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\varepsilon = 0{,}01$

b) $a_n = \frac{3}{n + 2}$, $\varepsilon = 0{,}1$

c) $a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$, $\varepsilon = 0{,}01$

d) $a_n = \frac{4n}{2n^2 + 9n}$, $\varepsilon = 0{,}1$

e) $a_n = \frac{4n}{2n - 1}$, $\varepsilon = 0{,}01$

f) $a_n = \frac{3}{n + 2}$, $\varepsilon = 0{,}1$

g) $a_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}$, $\varepsilon = 0{,}01$

h) $a_n = \frac{2n + 1}{4n}$, $\varepsilon = 0{,}01$

3) **Welche Häufungspunkte vermuten Sie bei den folgenden Zahlenfolgen? Sind die Folgen auch konvergent?**

a) $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, \ldots$

b) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{2}{3}, \frac{9}{11}, \frac{5}{7}, \frac{11}{13}, \ldots$

c) $0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, -\frac{7}{8}, \ldots$

d) $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}, \ldots$

Lösungen:

1)
- a) 2
- b) ∞
- c) ∞
- d) ∞
- e) ∞
- f) $\frac{2}{3}$
- g) 16
- h) -8
- i) $-\infty$

2)
- a) g = 0, N = 10000
- b) g = 0
- c) g = 0, N = 49
- d) g = 0
- e) g = 2
- f) g = 0
- g) g = 1, N =
- h) g = 0.5

3)
- a) 0, div.
- b) 1, konv.
- c) 1, -1, div.
- d) 1, 2, div.

1) **Man berechne die Summe:**
a) $250 + 244 + 238 + \ldots + 40$ b) $6 + 15 + 24 + \ldots + 168$
c) $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 2187$

2) **Wieviele Glieder der arithmetischen Folge 6, 12, 18, ... ergeben die Summe 1800?**

3) **Wieviele Glieder der geometrischen Folge 6, 12, 24, ... ergeben die Summe 6138?**

4) **Wie viele Glieder der arithmetischen Folge 6, 12, 18, ... muss man nehmen, damit a) das letzte Glied, b) ihre Summe grösser als 1000 ist?**

5) **Wie viele Glieder der geometrischen Folge 6, 12, ... muss man nehmen, damit a) das letzte Glied, b) ihre Summe grösser als 10000 ist?**

6) **Wie gross ist die Summe aller durch 177 teilbaren vierzehnstelligen Zahlen?**

7) **Wie gross ist die Summe aller Potenzen von 2 (mit natürlichen Exponenten), die kleiner als 10000 sind?**

8) **Um wieviel % vermehrt sich ein auf Zinseszins angelegtes Kapital in 13 Jahren bei 7% Zins?**

9) **Herr Müller macht mit 50 bei seiner Bank eine Einmaleinlage von Fr. 100'000 aus der er ab 65 bis zum 80 Altersjahr eine Rente mit jährlicher Auszahlung finanzieren möchte. Der Zinssatz beträgt 4%. Berechnen Sie die Jahresraten der Rente.**

10) **Bei einem Hauskauf wird als Übergabetermin der 1.April vereinbart, der Wert des Hauses beträgt zu diesem Zeitpunkt Fr. 1'500'000. Am 1. Februar wird der Vertrag unterzeichnet, in dem eine Zahlung in Raten bestimmt wurde, und zwar bei Unterzeichnung Fr. 100'000, dann jeweils auf 1. Januar während 5 Jahren (also 5 Mal) gleich grosse Raten. Es wird mit einem Zins von 2% p.a. gerechnet. Wie gross sind die Raten?**

11) **Beim Durchdringen einer Glasplatte verliert Licht 5% seiner Intensität.**
a) **Wieviel % verliert es, wenn es durch 20 solcher Glasplatten geht?**
b) **Wie viele Glasplatten braucht man, bis die Intensität nur noch 1% beträgt?**

12) **Berechnen Sie die Summe folgender geometrischer Reihen:**
a) $2 + \frac{3}{2} + \ldots$ b) $2 - \frac{3}{2} +- \ldots$ c) $1 + 0{,}01 + \ldots$ d) $1 - 0{,}99 +- \ldots$

13) **Für welche Werte von x konvergieren die Reihen:**
a) $1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 3\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 3\right)^2 + \ldots$
b) $1 - \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 -+ \ldots$

14) **Die Summer der ersten drei Glieder einer geometrischen Folge ist 78, die Summe der restlichen Glieder ist 3. Bestimmen Sie die ersten 3 Glieder.**

15) **Die Summe einer konvergenten unendlichen geometrischen Reihe mit lauter positiven Summanden ist 1, die Summe der Quadratwurzeln ihrer Summanden dagegen 2. Bestimmen Sie das Anfangsglied und den Quotient der Reihe.**

16) **Ein Gummiball wird aus der Höhe h = 2m fallen gelassen und fällt und steigt abwechselnd, wobei bei jedem Aufprall seine kinetische Energie um 19% abnimmt.**
a) Wie lang dauert der ganze Vorgang?
b) Welchen Weg legt der Ball total zurück?

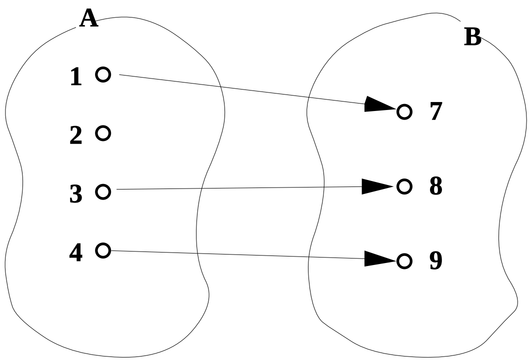
17) **Eine Stiftung hat ein Eigenkapital von Fr. 5'000'000. Wieviel kann bei einem Zinssatz von 3% jährlich ausgeschüttet werden, wenn das Kapital nicht verbraucht werden soll?**

Lösungen:

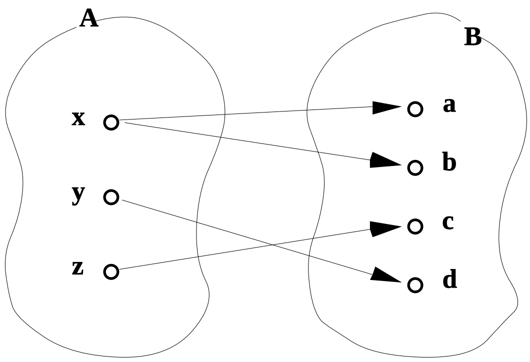
1) a)
b)
c)
2)
3)
4) a)
b)
5) a) $n = 12$
b)
6) 2'914'735
7)
8)
9)
10)
11) a)
b)
12) a)
b)
c)
d)
13) a) $1 < x < 4$
b)
14) $a_1 = 54$, $q = \frac{1}{3}$
15)
16) a)
b)
17)

1) **Welche der folgenden Pfeildiagramme definieren eine Funktion A → B?**

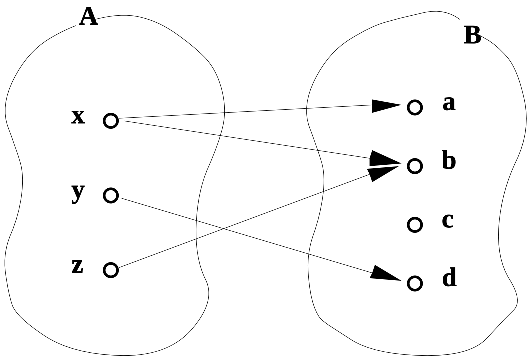
a)



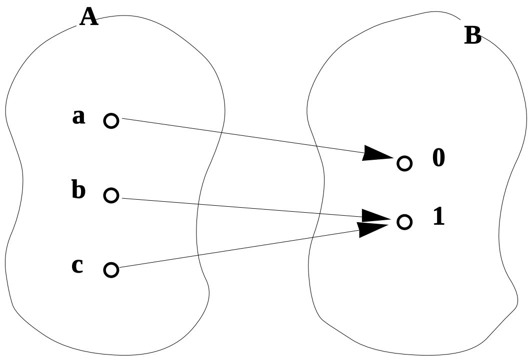
b)



c)

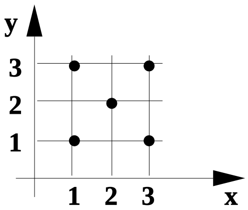


d)

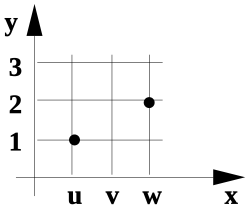


2) **Welche der folgenden Koordinatendiagramme definieren eine Funktion?**

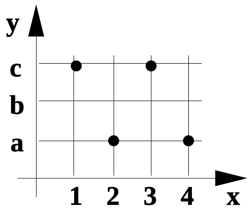
a)



b)



c)



3) **Gegeben ist die Funktion f: R → R. Berechnen Sie die Werte f(0), f(1), f(-1), f(a), f(x + Δx)**

a) $f(x) = x^3 - x$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

4) **Gegeben ist die Funktion f**
f: R → R
f : x → y = f(x) = $x^2 - 2x + 3$
Berechnen Sie:

a) $f(2)$, $f(3) - f(-3)$, $f(a)$, $f(x) - f(-x)$ b) $f(x - 2)$, $f(x^2)$, $f(2x + 3)$, $f(a + h) - f(a)$
c) $f(x^2 - 2x + 3)$ d) $f(x + h) - f(x - h)$

5) **Bestimmen Sie den grösstmöglichen reellen Definitionsbereich folgender Funktionen:**

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

6) **Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion f: R → R. Ist f surjektiv?**

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = x - |x|$ c) $f(x) = x \cdot |x|$
d) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ e) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ f) $f(x)\ \frac{x^2}{1 + x^2}$

7) **Suchen Sie den Wertebereich der Funktion f. In jedem Fall gelte $f(x) = x^2$. Ist f surjektiv, injektiv, bijektiv?**

a) f: [0, 4] → R b) f: [-2, 4[→ R
c) f:]-1, 1] → R d) f: {x | x ≤ -3 x R} → R

1) Es seien A = {3, 5, 7, 9, 11, 13} und B = {6, 10, 14, 18, 22, 26} gegeben. Die Menge A wird durch die Funktion f auf B abgebildet, und zwar soll die Abbildung bijektiv sein. Machen Sie einen Vorschlag für eine Funktionsgleichung, durch welche eine solche Abbildung beschrieben wird!

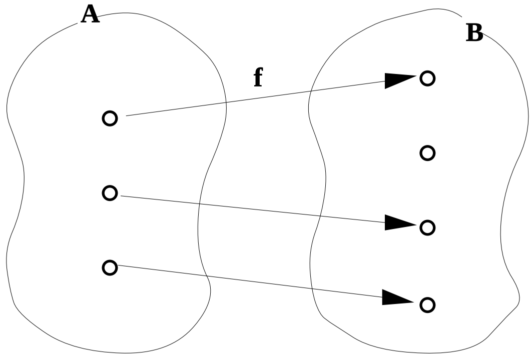
2) f: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}$ (y = [x] ist die Gauss'sche Klammerfunktion,
f: $x \rightarrow y = -\frac{1}{2}x\,[x]$ [x] bedeutet: grösste ganze Zahl ≤ x)

Untersuchen Sie, ob die gegebene Funktion surjektiv oder injektiv ist?

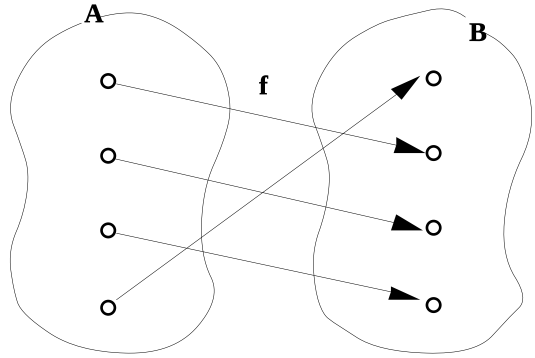
3) A = {Meier, Müller, Huber}, B = {Chur, Zürich, Basel}
f: M → Z mit M   A × B
Die Abbildung ist durch folgende Wertetripel gegeben:
(Meier, Chur, 3700), (Meier, Basel, 5000), (Müller, Zürich, 5000), (Huber, Chur, 7000), (Huber, Zürich, 4000)
Ist die Funktion f surjektiv, injektiv, bijektiv?

4) Welche der folgenden durch Diagramme definierten Funktionen sind injektiv? Welche sind surjektiv?

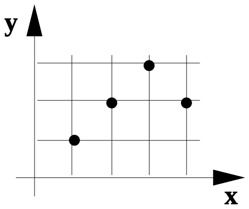
a)



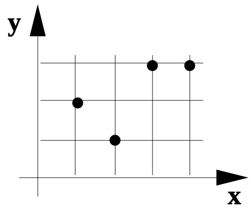
b)



c)



d)



5) Ist die Funktion f surjektiv, injektiv, bijektiv?

a) f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
f: $x \rightarrow y = f(x) = x^2 + x + 2$

b) f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
f: $x \rightarrow y = f(x) = x^3 - 1$

c) f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_0^+$
f: $x \rightarrow y = f(x) = (x - 2)^2$

d) f: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$
f: $x \rightarrow y = f(x) = 2x$

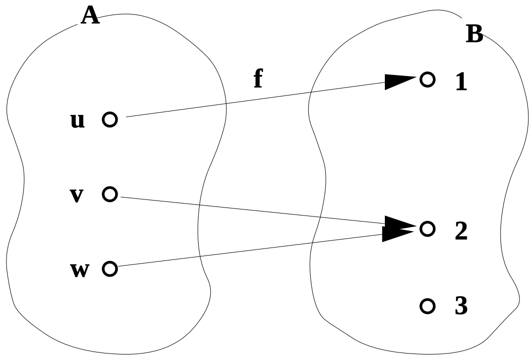
e) f: $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$
f: $(x,y) \rightarrow z = f(x,y) = \text{kgV}(x,y)$

f) f: A → A, A = Menge aller lebenden oder gestorbenen Menschen
f: x → y = f(x) = Mutter von x

6) Zeigen Sie durch Angabe einer passenden bijektiven Funktion, dass die folgenden Mengen gleichmächtig sind:

a) N und Menge der positiven geraden ganzen Zahlen
b) Z und $\mathbf{N}_0$
c) A = {x   R | 0 < x ≤ 1} und B = {x   R | x ≥ 1}
d) R und {x   R | 0 ≤ x < 1}

1) Bestimmen Sie $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(3)$:



2) Bilden Sie sofern möglich die Umkehrfunktion!

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{1, 2\}$

$f: A \to B \times C$

$f: x \to y = f(x)$ mit $f(1) = (a, 1)$, $f(2) = (a, 2)$, $f(3) = (b, 1)$, $f(4) = (b, 2)$, $f(5) = (c, 1)$, $f(6) = (c, 2)$

3) Welche der folgenden Funktionen haben eine Umkehrfunktion?

a) $f: R_0^+ \to R_0^+$
$f: x \to y = f(x) = (x - 1)^2$

b) $f: R \to R$
$f: x \to y = f(x) = 1 - x^3$

c) $f: R_0^+ \to R_0^+$
$f: x \to y = f(x) = (x + 1)^2$

d) $f: [-1, 1] \to [0, 1]$
$f: x \to y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

4) Bilden Sie sofern möglich die Umkehrfunktion!

a) $f: N \to R$
$f: x \to y = \sqrt{x} - 1$

b) $f: R^+ \to \{y \quad R: y > -1\}$
$f: x \to y = x^2 - 1$

5) Bilden Sie die zusammengesetzte Abbildung $h = g \circ f$!

$f: N \to Z$
$f: x \to y = -2x$

$g: Z \to Q$
$g: y \to z = \frac{1}{2} y^3$

6) Bilden Sie die zusammengesetzte Abbildung $h = g \circ f$!

$f: Z \to Q$
$f: x \to y = \frac{|x| + x}{2}$

$g: Q \to R$
$g: y \to z = \frac{|y| - y}{2}$

7) Bilden Sie die zusammengesetzte Abbildung $h = g \circ f$!

$f: N \to R$
$f: x \to y = \sqrt{x} - 1$

$g: R \to R$
$g: y \to z = y^2 - 4$

8) Spalten Sie die folgenden Funktionen in zwei umkehrbare Teilfunktionen auf:

a) $f: R \to R$
$f: x \to y = f(x) = |x|$

b) $f: [-1, 1] \to R$
$f: x \to y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

c) $f: R \to R$
$f: x \to y = f(x) = - x^2$

d) $f: R \to R$
$f: x \to y = f(x) = - (x - 3)^2$

e) $f: R \to R$
$f: x \to y = f(x) = \frac{1}{2} x^2 + 2$

f) $f: R \to R$
$f: x \to y = f(x) = \frac{1}{2} x^2 - x - \frac{1}{2}$

9) Nennen Sie geometrische Abbildungen, die mit ihrer inversen identisch sind.

Lösungen:

1) keine Funktion

2) $f^{-1}: B \times C \to A$
$f^{-1}: y \to x = f^{-1}(y)$ mit
$f^{-1}(a,1) = 1$, $f^{-1}(a,2) = 2$
usw.

3) a) nein
b) ja
c) neine
d) nein

4) a) nicht surjektiv
b) $f^{-1}: \{y \quad R: y > -1\} \to R^+$
$f^{-1}: y \to x = \sqrt{y + 1}$

5)

6)

7)

8)

9)

1) **Die Menge der reellen Zahlen R bildet einen Körper. Überprüfen Sie diese Aussage.**

2) **Die Menge der Zahlen $a + b\sqrt{2}$ mit a, b Q ist hinsichtlich der vier Grundrechenarten abgeschlossen (mit Ausnahme der Division durch 0). Überprüfen Sie diese Aussage!**

3) **Prüfen Sie, ob folgende Mengen bezüglich der angegebenen Verknüpfung Gruppen sind!**
a) $(N_0,+)$ b) $(\{1,-1\},\bullet)$ c) $(Z,+)$ d) $(Z,\bullet)$

4) **Ebenso:**
a) $(M,\bullet)$ $M = \{1, 2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}, 8, \frac{1}{8}, \ldots\}$
b) Die Menge der Parallelverschiebungen bezüglich ihrer Verkettung.
c) Die Menge der Kongruenzabbildungen bezüglich der Verkettung.

5) **Ebenso:**
a) $(Q,\bullet)$ b) $(N,\circ)$ mit: $a \circ b = \max(a,b)$

6) **Ebenso:**
Gegeben ist die Menge M = {a, b}. Die Verknüpfung ist durch eine Tabelle definiert:

a)

∘	a	b
a	a	b
b	b	b

b)

∘	a	b
a	b	a
b	b	b

c)

∘	a	b
a	b	a
b	a	b

d)

∘	a	b
a	a	a
b	b	b

7) **Wie Nr. 4): M = {a, b, c, d}**

a)

∘	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

b)

∘	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	d	b	a	c
c	b	d	c	a
d	c	a	b	d

Lösungen:

1) ja
2) ja
3) a) nein
b) ja
c) ja
d) nein
4) a) ja
b) ja
c) ja
5) a) nein
b) nein
6) a) nein
b) nein
c) ja
d) nein
7) a) ja
b) nein

1) **Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen:**

a) $f: R \rightarrow R$

$f: x \rightarrow y = \frac{2}{3}x - 3$

b) $f: Z \rightarrow Q$

$f: x \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

c) $f: R \rightarrow R$

$f: x \rightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$

d) $f: Z^{-} \rightarrow Q$

$f: x \rightarrow y = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$

2) **Der Zeichenbereich ist die Menge R × R. Zeichnen Sie folgende Teilmengen von R × R, welche folgendermassen charakterisiert sind:**

a) $(x + 2y > 3) \quad (2x - 3y + 3 < 0)$

b) $(2x - 3y - 3 \geq 0) \quad (3x + 2y - 3 > 0)$

3) **Zeitversetzter freier Fall zweier Kugeln (L. Papula)**
Zwei Kugeln fallen im luftleeren Raum im zeitlichen Abstand von 2 s aus gleicher Höhe und jeweils aus der Ruhe heraus. Wie verändert sich der Abstand d der beiden Kugeln im Laufe der Zeit t? Skizzieren Sie den Verlauf dieser Weg-Zeit-Funktion.

4) **Bestimmen Sie den Scheitel der Parabel und zeichnen Sie:**

a) $y = 2x^2 - 2x - \frac{5}{2}$ b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 1$ c) $y = -\frac{3}{2}x^2 + 4x - 1$ d) $y = \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{23}{12}$

5) **Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen $f: R \rightarrow R$**

a) $x \rightarrow |x + 1|$ b) $x \rightarrow |x| + |x + 1|$ c) $x \rightarrow \big|\, ||x| - 1| - 1 \,\big|$ d) $x \rightarrow x + |x|$

6) **Lösen Sie folgende Gleichungen:**

a) $|x - 3| = 2x + 3$ b) $|x| - 3 = 2x + 3$ c) $x - 3 = 2|x + 3|$

d) $|x - 3| = |2x + 3|$ e) $|x - 3| = 2|x| + 3$ f) $|x| - 3 = 2|x| + 3$

7) **Zeichnen Sie die Graphen folgender Relationen:**

a) $(|x - 2| < 3) \quad (|y - 1| < 2)$ b) $|x - 2| + |y + 1| < 3$ c) $|x + 2y + 2| < 4$

d) $1 \leq |x - y| \leq 2$ e) $|x| + y < x + |y|$ f) $|x| - 2y + 2 < 0$

g) $x + |y| < 1$ h) $|x - y| < 2x$ i) $|x + y| + |x - y| = 4$

8) **Zugspannung in einem rotierenden Stab (L. Papula)**
Ein zylindrischer Stab der Länge l rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch das Ende des Stabes gehende, zu ihm senkrecht verlaufende Achse.

a) **Bestimmen Sie die durch die Zentrifugalkräfte hervorgerufene Zugspannung σ an einer beliebigen Schnittstelle x und skizzieren Sie den Spannungsverlauf längs des Stabes.**
b) **An welcher Schnittstelle erreicht die Zugspannung ihren Maximalwert?**
c) **Welchen Wert darf die Winkelgeschwindigkeit nicht überschreiten, wenn die aus materialtechnischen Gründen höchstzulässige Zugspannung σ_0 beträgt?**
(A: Querschnittsfläche des Stabes, ρ: konstante Dichte des Stabmaterials)

9) **Lösen Sie folgende Ungleichungen:**

a) $30 < x^2 + x < 90$ b) $30 < x^2 + x \quad x^2 + x < 90$ c) $14 \leq 9x - x^2 \leq 18$

d) $-5 < (x - 3)(x - 9) < 7$ e) $|x^2 - 7x + 1| < 9$ f) $|13x - x^2| > 30$

g) $0 < 2x^2 - 10 < x$ h) $x \leq x^2 \leq x + 1$ i) $\frac{2x^2 + 5x - 3}{6x^2 - x - 2} < 0$

1) Die Kurve f mit der Gleichung $y = 2^x$ wird abgebildet. Zeichnen Sie die Originalkurve und die Bildkurve ins gleiche Koordinatensystem und nennen Sie die Gleichung der Bildkurve (1 Einheit ≙ 2 Häuschen)
   a) Verschiebung in positiver x-Richtung um 3 Einheiten
   b) Achsenspiegelung an der y-Achse
   c) Zentrische Streckung bezüglich des Ursprungs mit Streckfaktor $\frac{1}{2}$
   d) Axiale Streckung bezüglich der x-Achse mit Streckfaktor $\frac{1}{2}$

2) h ist die Bildkurve von f: $y = 4^x$. Nennen Sie eine mögliche Abbildung.
   a) h: $y = 4^{x+2}$
   b) h: $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
   c) h: $y = \frac{1}{10} \cdot 4^x$
   d) h: $y = -\frac{1}{2} \cdot 4^x$
   e) h: $y = -4^{-x}$
   f) h: $y = 2^x$
   g) h: $y = \left(\sqrt{2}\right)^{-x}$
   h) h: $y = 4^{x+1} + 1$

Lösungen:

2) a) Verschiebung $x_0 = -2$
   b) Spiegelung an y-Achse
   c) axiale Streckung bez. x-Achse $\left(k = \frac{1}{10}\right)$
   d) Spiegelung an x-Achse und axiale Streckung bez. x-Achse $\left(k = \frac{1}{2}\right)$
   e) Spiegelung an x- und y-Achse = Punktspiegelung an O
   f) axiale Streckung bez. y-Achse $\left(k = 2\right)$
   g) axiale Streckung bez.y-Achse $\left(k = 4\right)$ und Spiegelung an y-Achse
   h) Verschiebung $x_0 = -1$, $y_0 = 1$

1) Gegeben ist eine Funktion f durch die Gleichung y = f(x) und eine Zahlenfolge $< a_n >$. Bilden Sie zur gegebenen Folge, welche Sie als x-Werte-Folge betrachten, die zugehörige Funktionswertefolge. Bestimmen Sie den Grenzwert der Funktionswertefolge.

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$ b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $a_n = \frac{2n}{n+1}$ c) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 2}$, $a_n = \frac{n-1}{n}$

d) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 1}$, $a_n = -\frac{n}{n+1}$ e) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$

2) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ c) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ d) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3x^2 - 27}{2x^2 - 18}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{4x}$ f) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - 16}$ g) $\lim\limits_{x \to 4} \left| \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - 16} \right|$ h) $\lim\limits_{x \to 1} (x - [x])$

3) Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Funktionen mit $x \to \infty$:

a) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 1}{3x^3 + 2x - 1}$ b) $f(x) = \frac{5x^3 - 7}{3x^4 + 2x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{4x^2 - 1}$ d) $f(x) = \frac{3x^4 - 3x^3 + x + 2}{6x^4 + 2x^2 - 3}$

4) Untersuchen Sie die Funktion f(x) bezüglich ihrer Stetigkeit an der Stelle a.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ $a = 1$ b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{2^x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$ $a = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ $a = 0$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \neq 3 \\ 9 & \text{für } x = 3 \end{cases}$ $a = 3$

5) Suchen Sie die Unstetigkeitsstellen der Funktion f(x) in ihrem Definitionsbereich D:

a) $f(x) = |x| \cdot x - 2|x - 1|$, D = R b) $f(x) = |x| - [x]$, D = R

c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $D = \{x \quad R \mid x \geq 1\}$ d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \quad Q \\ 1 & \text{für } x \quad R \backslash Q \end{cases}$ D = R

6) Die Funktion f(x) ist ein einem möglichst grossen Bereich aus R definiert. Sie hat aber an einer oder mehreren Stellen eine Definitionslücke. Können Sie die Funktion in diese Lücken stetig hinein fortsetzen? Wenn ja, definieren Sie die Funktion in der Lücke.

a) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ b) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ c) $f(x) = \frac{|x| - 1}{x^2 - 1}$ d) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

e) $f(x) = \frac{1}{|x|}$ f) $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ g) $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$

7) Gegeben ist eine Funktion f(x), die an der Stelle x_0 stetig ist. In welcher δ-Umgebung von x_0 muss x liegen, damit $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{100}$ ist?

a) $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $x_0 = -2$ b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x_0 = 1$

Lösungen:

1) a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{2}{3}$
c) ∞
d) $\frac{5}{2}$
e) 12

2) a) 4
b) -8
c) $-\frac{1}{3}$
d) $\frac{3}{2}$
e) $\frac{1}{2}$
f) ∞
g) ∞
h) -

3) a) $\frac{2}{3}$
b) 0
c) ∞
d) $\frac{1}{2}$

4) a) stetig
b) unstetig
c) unstetig
d) stetig

5) a) stetig
b) unstetig für alle ganzen x
c) stetig
d) überall unstetig

6) a) $x_0 = 2$, $f(x_0) = 12$
b) $x_1 = 1$, $f(x_1) = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$, nein
c) $x_1 = 1$, $f(x_1) = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$, $f(x_2) = \frac{1}{2}$
d) $x_0 = 0$, nein
e) $x_0 = 0$, nein
f) $x_0 = 0$, nein
g) $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$

7) a) $\delta = \frac{1}{10}$
b) $\delta = \frac{2}{51}$

1) **Man berechne die erste Ableitung der Funktion f(x) durch Grenzwertbildung aus dem Differenzenquotienten:**

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x}$ c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ f) $f(x) = x^3 - 2x^2$

2) **Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve an der Stelle x_0:**

a) $y = x^3 + 2x - 5,\ x_0 = 0$

b) $y = \sqrt{x},\ x_0 = 1$

c) $y = x^4 - 3x^3,\ x_0 = 1$

3) **Wo und unter welchem Winkel schneidet die gegebene Kurve die x-Achse:**

a) $y = x^4 - 5x^2 + 4$ b) $y = x^3 - 4x$ c) $y = x^3 - 2x^2$

4) **Unter welchem Winkel schneiden die beiden Kurven einander:**

a) $y = x^2 - 2x$ und $y = \frac{1}{2}x$ b) $y = \frac{x^2}{4}$ und $y = -x^2 + 10x - 15$

5) **An welchen Stellen hat die Kurve horizontale Tangenten?**

a) $y = x^5 - \frac{65}{3}x^3 + 180x$ b) $y = (2x-1)^3(2x+1)^2$

6) **An welchen Stellen ist die Tangente der angegebenen Kurve parallel zur gegebenen Geraden?**

a) $y = \frac{3}{5}x^5 - 13x^3 + 96x - 17$, g: $12x + y - 5 = 0$

b) $y = 0{,}6x^5 - 5x^3 + 10x - 4$, g: $2x + y + 4 = 0$

7) **An welcher Stelle muss die Tangente gezogen werden, damit sie durch den Ursprung geht?**

a) $y = x^2 - 2x + 4$ b) $y = x^3 - 2x^2 + 4x$ c) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 20x$ d) $y = x^3 - 18x^2$

8) **In welchen Punkten schneiden oder berühren sich die gegebenen Kurven?**

a) $y = 5x + 2$ und $y = x^3 + 2x$ b) $y = 3x^3 + 2x^2 - 3$ und $y = 2x^3 + 2x^2 + 3x - 5$

9) **Wie gross muss a sein, damit sich die Kurven rechtwinkelig schneiden?**

a) $y = x^2$ und $y = \frac{1}{2} - ax^2$ b) $y = 1 - \frac{1}{3}x^2$ und $y = ax^2$

10) **Untersuchen Sie die Differenzierbarkeit der Funktionen f(x) an der Stelle x_0:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x_0 = 0$ b) $f(x) = |x^2 - 1|,\ x_0 = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases},\ x_0 = 1$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 1 \\ 3x - 2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases},\ x_0 = 1$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 1 \\ 2x & \text{für } x \geq 1 \end{cases},\ x_0 = 1$ f) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x < 0 \\ x^4 & \text{für } x \geq 0 \end{cases},\ x_0 = 0$

g) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x < 1 \\ x^4 & \text{für } x \geq 1 \end{cases},\ x_0 = 1$ h) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0$

Lösungen:

1) a) $\frac{1}{(1+x)^2}$
b) $\frac{1}{x^2}$
c) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
d) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
e) $-\frac{2}{x^3}$
f) $3x^2 - 4x$

2)

3) a) ±80.8°, ± 85.5°
b) 83.2°, - 76.3°
c) 0°, 76.3°

4)

5)

6)

7) a) (2/4), (-2/12)
b) (1/3), (0/0)
c) (-9/423), (0/0),
d) (0/0), (9/-729)

8)

9) a) a = 1
b) a = 0.997

10)

1) Bilden Sie die 1. Ableitung:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

b) $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$

c) $y = \frac{4x - 4}{x^2}$

d) $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$

e) $y = \frac{9}{x} - \frac{27}{x^3}$

f) $y = \frac{3x^2 - 24x + 36}{x^2}$

g) $y = \frac{6x^2 - 24}{x^2 + 3}$

h) $y = \frac{x^2 - 9}{2x - 10}$

2) Bilden Sie die 2. Ableitung:

a) $y = 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + 12$

b) $y = \frac{2x^4 - x}{x^2 + 1}$

3) Bestimmen Sie y', y'', y''', $y^{(n)}$, $y^{(2n)}$

a) $y = x^{2n} + 2x^n + 1$

b) $y = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

4) Für welche Werte von x sind folgende Funktionen steigend, für welche fallend?

a) $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 36x + 2$

b) $f(x) = x^4 - 8x^2$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$

d) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$

5) In welchen Bereichen sind die angegebenen Funktionen konvex bzw. konkav?

a) $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 36x + 2$

b) $f(x) = x^4 - 8x^2$

6) Wie gross muss a sein, damit die folgende Kurve die x–Achse berührt?

a) $f(x) = x^3 - 3x + a$

b) $f(x) = x^3 - ax^2 + 4$

7) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

Lösungen:

1)
a) $\frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2}$
b) $\frac{-6}{(x - 1)^2}$
c) $\frac{-4x + 8}{x^3}$
d) $\frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$
e) $-\frac{9}{x^2} + \frac{81}{x^4}$
f) $\frac{24x - 72}{x^3}$
g) $\frac{84x}{(x^2 + 3)^2}$
h) $\frac{x^2 - 10x + 9}{x - 5}$

2) a) b)
3) a) b)
4) a) b) c) d)
5) a) b)
6) a) b)
7) a) b) c) d)

1) Kurvendiskussion

a) $y = x^3 - 3x$

b) $y = x^4 - 2x^2$

c) $y = 3x^2 - x^3$

d) $y = 2x^3 - x^4$

e) $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 5$

f) $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x$

g) $y = x(x - 5)^2$

h) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 8$

2) **Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat im Punkt P(2/1) einen Terassenpunkt und schneidet die x-Achse im Punkt A(4/0). Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion.**

3) **Bestimmen Sie ein Polynom 3. Grades mit einer Nullstelle bei $x = -2$. Der Punkt mit der Abszisse 0 ist Wendepunkt, die Wendetangente hat die Gleichung $x - 3y + 6 = 0$.**

4) **Die Punkte A(1/0) und B(-1/0) sind Wendepunkte des Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Bestimmen Sie alle Schnittpunkte dieser Kurve mit der x-Achse sowie die Extremalpunkte.**

5) **Es ist a so zu wählen, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}(x^4 - ax^2)$ bei $x = 1$ einen Wendepunkt hat. Wo liegt der andere Wendepunkt? Bestimmen Sie auch die Extremalpunkte.**

6) **Eine Polynomfunktion f hat an der Stelle $x = 1$ eine doppelte Nullstelle und es ist $f''(x) = 6x$. Bestimmen Sie die Gleichung der Polynomfunktion und zeichnen Sie ihren Graphen.**

7) **Durch die Gleichung $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ ist eine Kurve gegeben.**

a) **Berechnen Sie die Steigung der Geraden, welche durch den Ursprung geht und die Kurve rechtwinkelig schneidet.**

b) **Zeigen Sie, dass diese Gerade den Winkel zwischen den beiden Asymptoten der Kurve halbiert.**

8) **Untersuchen Sie die Kurve k: $y = \frac{(2x - 1)(3 - x)}{x^2}$.**

a) **Bestimmen sie die Schnittpunkte von k mit der x-Achse sowie den Extremalpunkt und die Asymptoten. Zeichnen Sie die Kurve.**

b) **Berechnen Sie die Steigungen der Tangenten an k, die durch den Ursprung gehen.**

1) Bestimmen Sie die reellen Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $y = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$ b) $y = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

c) $y = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x$ d) $y = 6x^3 - 19x^2 + 19x - 6$

e) $y = 6x^3 - 7x^2 - 7x + 6$ f) $y = 4x^3 - 21x^2 + 21x - 4$

2) Bestimmen Sie die reellen Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $y = x^4 + 3x^3 - 4x$ b) $y = x^3 - 3x^2 - x + 2$

c) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ d) $y = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$

e) $y = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ f) $y = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$

3) Bestimmen Sie die reellen Nullstellen der folgenden Funktionen mit dem Verfahren von Newton (Genauigkeit 0,001):

a) $y = x^5 - 3x^3 + 5x^2 - 10$ b) $y = x^4 - 2x^2 + 0{,}5x + 0{,}3$

c) $y = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x - 2$ d) $y = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4x - 5$

e) $y = x^5 - 9x^4 + 22x^3 + 12x^2 - 104x + 95{,}5$ f) $y = 9x^4 + 15x^3 - 142x^2 + 41x + 30$

4) Kurvendiskussion:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ b) $y = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$

5) Wie tief taucht eine kugelförmige Boje mit Radius R = 45 cm in Salzwasser der Dichte $\rho_S = 1{,}03\ \frac{g}{cm^3}$, wenn die Dichte der Boje $\rho_B = 0{,}7\ \frac{g}{cm^3}$ beträgt? *(P 23)*
Hinweis: Die Eintauchtiefe h genügt einer kubischen Gleichung. Lösen Sie diese nach dem Newtonschen Tangentenverfahren.

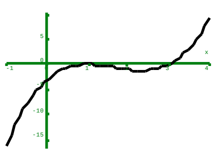
Lösungen:

1) a) $\frac{1}{3}$, 3, -1
b) 1, 2, $\frac{1}{2}$
c) 0, -1, $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$
d) 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$
e) $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, -1
f) 1, $\frac{1}{4}$, 4

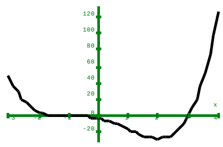
2) a) 0, 1, -2, -2
b) -0.86, 0.75, 3.11
c) 2, 1, 1
d) 0, 2, -2, -1
e) -1, -2, -2
f) 5, 3, 4

3) a) -2.070851933, -1.207154602, 1.559239512
b) -1.483484303, -.2860635822, .6092815734, 1.160266312
c) -1.514136929, .4280067317, 1.000000000, 3.086130198
d) -.9122291785, 1.000000000, 1.713537935, 3.198691244
e) -1.998957392, 1.779104329, 2.317599142, 2.882296249, 4.019957672
f) -4.986849731, -.3341300935, .6704332226, 2.983879935

4) a)



b)



5)

Kurvendiskussionen:

1)	$y = \frac{x}{x^2 - 4}$	$y' = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2}$	$y'' = \frac{2x^3 + 24x}{(x^2 - 4)^3}$
2)	$y = \frac{2x + 4}{x - 1}$	$y' = \frac{-6}{(x - 1)^2}$	$y'' = \frac{12}{(x - 1)^3}$
3)	$y = \frac{4x - 4}{x^2}$	$y' = \frac{8 - 4x}{x^3}$	$y'' = \frac{8x - 24}{x^4}$
4)	$y = \frac{4x}{x^2 + 1}$	$y' = \frac{4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2}$	$y'' = \frac{8x^3 - 24x}{(x^2 + 1)^3}$
5)	$y = \frac{9}{x} - \frac{27}{x^3}$	$y' = -\frac{9}{x^2} + \frac{81}{x^4}$	
6)	$y = \frac{3x^2 - 24x + 36}{x^2}$	$y' = \frac{24x - 72}{x^3}$	
7)	$y = \frac{6x^2 - 24}{x^2 + 3}$	$y' = \frac{84x}{(x^2 + 3)^2}$	$y'' = \frac{252(1 - x^2)}{(x^2 + 3)^3}$
8)	$y = \frac{3x^2 - 12x}{(x - 1)^2}$	$y' = \frac{6x + 12}{(x - 1)^3}$	
9)	$y = \frac{x^2 - 9}{2x - 10}$	$y' = \frac{1}{2}\frac{x^2 - 10x + 9}{(x - 5)^2}$	$y'' = \frac{16}{(x - 5)^3}$
10)	$y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$	$y' = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2}$	$y'' = \frac{8}{(x - 2)^3}$
11)	$y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x}$	$y' = \frac{x^2 - 4}{x^2}$	
12)	$y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$	$y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$	
13)	$y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$	$y' = \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2}$	$y'' = \frac{6x^3 + 54x}{(x^2 - 3)^3}$
14)	$y = \frac{x^3}{x^2 + 12}$	$y' = \frac{x^4 + 36x^2}{(x^2 + 12)^2}$	$y'' = \frac{24(-x^3 + 36x)}{(x^2 + 12)^3}$
15)	$y = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$		
16)	$y = \frac{x^3}{3(x + 2)^2}$	$y' = \frac{1}{3}\frac{x^3 + 6x^2}{(x + 2)^3}$	
17)	$y = \frac{4 - x^3}{2x^2}$		
18)	$y = \frac{x^3}{9x - 18}$	$y' = \frac{2}{9}\frac{x^3 - 3x^2}{(x - 2)^2}$	$y'' = \frac{2}{9}\frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{(x - 2)^3}$
19)	$y = \frac{x^3 + 2}{2x}$		
20)	$y = \frac{x^4 + 1}{2x^2}$	$y' = \frac{x^4 - 1}{x^3}$	$y'' = \frac{x^4 + 3}{x^4}$
21)	$y = \frac{27 - x^4}{6x^2}$	$y' = \frac{-x^4 - 27}{3x^3}$	$y'' = \frac{-x^4 + 81}{3x^4}$

22) **Man bestimme a so, dass die Kurve mit der Gleichung $y = \frac{ax^3 + 4x}{x^2 - 4}$ an der Stelle $x = 1$ eine Tangente hat, welche parallel zur Geraden g: $14x + 3y + 2 = 0$ verläuft.**

23) **Wie gross müssen a und b gewählt werden, damit die Kurve mit der Gleichung $y = \frac{a}{x^2 + b}$ ein Maximum mit dem Wert 4 und an der Stelle 1 einen Wendepunkt hat?**

24) **Der Wirkungsgrad y eines Transformators beträgt $y = \frac{x}{a + bx + cx^2}$. x mittlere Leistung;**
a, b, c Werkstoffkonstanten; Zahlenwerte: $a = 250$ W, $b = 1$, $c = 6{,}25 \cdot 10^{-5}$ W^{-1}
Zeichnen Sie die Kurve für den Wirkungsgrad (Kurvendiskussion)

25) **Zustandsgleichung für reale Gase:**
Die folgende Gleichung von van der Waals beschreibt die Abhängigkeit der drei Zustandsgrössen Volumen V, absolute Temperatur T und Druck p eines realen Gases: $p = \frac{nRT}{(V - nb)} - \frac{n^2 a}{V^2}$
R ist die allgemeine Gaskonstante, n die in kmol gemessene Teilchenmenge, a und b sind Materialkonstanten.
Diskutieren Sie die Kurve für die konstanten Temperaturwerte T = 366 K, 406 K, 447 K.
Ferner sind die Konstanten n, a und b mit $n = 1$, $a = 4{,}23 \cdot 10^5$ Nm^4 und $b = 0{,}0371$ m^3 gegeben (NH_3). Der Wert für R ist R = 8314 J/K.

1) Um aus einem rechteckigen Blech von 27 cm Länge und 18 cm Breite einen oben offenen Kasten herzustellen, werden an den vier Ecken gleich grosse Quadrate ausgeschnitten und die dadurch erzeugten überstehenden Ränder rechtwinkelig zu Kastenseite hochgebogen. Wie gross müssen die auszuschneidenen Quadrate gewählt werden, damit der Kasten ein möglichst grosses Volumen V erhält?

2) Wieviel Quadratmeter rechteckigen ebenen Geländes kann man maximal mit einem 240 m langen Zaun umgeben?

3) Einem rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten a und b soll ein Rechteck so eingeschrieben werden, dass die eine Ecke im Scheitel des rechten Winkels, die ihr gegenüberliegende Ecke auf der Hypotenuse zu liegen kommt, und dass überdies der Flächeninhalt möglichst gross wird.

4) Welche Abmessungen muss man einer zylindrischen Konservendose von einem Liter Inhalt geben, damit der Blechverbrauch möglichst gering bleibt?

5) Aus einem zylindrischen Baumstamm vom Durchmesser d = 40 cm soll ein Balken grösster Tragfähigkeit mit rechteckigem Querschnitt herausgeschnitten werden. Die Abmessungen des Querschnitts sind zu berechnen. (Nach den Gesetzen der Festigkeitslehre muss das Widerstandsmoment $W = \frac{1}{6} x \cdot y^2$ maximal sein. x = Breite, y = Höhe des Balkens)

6) Ein oben offener Behälter aus Stahlblech soll aus einem Zylinder und einem angesetzem Kegel von 120° Kegelöffnung bestehen und insgesamt 500 m^3 fassen. Welche Abmessungen muss der Behälter bei überall gleicher Wandstärke erhalten, damit der Materialbedarf und damit auch das Gewicht möglichst gering sind?

7) Bei der Abbildung eines Gegenstandes von der Grösse G in ein Bild der Grösse B durch eine dünne Linse mit der Brennweite f besteht zwischen der Gegenstandsweite g und der Bildweite b ein Zusammenhang, der durch die Linsengleichung

$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ erfasst wird.

Berechnen Sie nun diejenige Gegenstandsweite g, bei welcher der Abstand a zwischen Gegenstand und reellem Bild B möglichst klein wird.

8) In einem Gleichstromkreis, dessen Stromquelle die Urspannung U_0 besitzt, fliesst ein Strom I durch den Verbraucherwiderstand R, der dabei eine Leistung von $P = U \cdot I$ aufnimmt. Wie gross ist nun R zu wählen, wenn der Stromquelle ein Höchstwert an Leistung P entnommen werden soll? (Innenwiderstand der Stromquelle R_i, Klemmenspannung U)

9) Beim senkrechten Wurf nach oben mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 besteht zwischen der Geschwindigkeit v des fliegenden Körpers und dem von ihm zurückgelegten Weg s die Beziehung $v = \sqrt{v_0^2 - 2gs}$ mit $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$, Erdbeschleunigung). Wie ändert sich diese Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Weg in dem Augenblick, da sie auf die Hälfte ihres Anfangswertes abgesunken ist? Zu bestimmen sind: a) die allgemeine Gleichung für diese Änderungstendenz, b) ihr Wert für $v_0 = 40 \frac{m}{s}$.

10) Das Snelliussche Brechungsgesetz: Nach dem Fermatschen Prinzip ist der in seiner Richtung, durch Reflexion oder durch Brechung, geänderte Weg eines Lichtstrahl zwischen zwei Punkten stets so beschaffen, dass zu seiner Zurücklegung ein Extremum (Maximum oder Minimum) an Zeit erforderlich ist. Dieses Prinzip wollen wir für einen Lichtstrahl erproben, der an der Grenzfläche der beiden Medien (1) und (2) gebrochen wird und innerhalb derselben die Geschwindigkeit v_1 bzw. v_2 besitzt. Anfangspunkt P_1 und Endpunkt P_2 sind vorgegeben. Stellen Sie eine Bedingung für die Winkel auf.

Lösungen:

1) Quadratseite ≈ 3,5 cm
2)
3) $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$
4) d ≈ 1,08 dm, h ≈ 1,08 dm
5) $x = \frac{1}{2}\sqrt[4]{8}$, $y = \sqrt[4]{2}$
6) r ≈ 5,91 m, h_1 ≈ 3,43 m, s ≈ 6,83 m, h_2 ≈ 3,41 m
7) g = 2f
8) $R = R_i$
9) a) $\frac{dv}{ds} = -\frac{g}{\sqrt{v_0^2 - 2gs}}$
10) -

1) **Für die Herstellung eines Lackes werden u.a. zwei aus verschiedenen Flüssigkeitsgemischen extrahierte Grundstoffe A und B benötigt. Maximal werden dazu pro Stunde 24 Liter von A und B benötigt. Zur Destillation eines Liters von A werden 36 kcal und von B 10 kcal benötigt. Der Gesamtenergieverbrauch pro Stunde soll 360 kcal nicht übersteigen. Aufgrund der erschwerten Haltbarkeit und Unstabilität sollten von A maximal 8 Liter destilliert werden. Von B dagegen, das noch anderweitig verwendet werden kann, sind pro Stunde mindestens 12 Liter zu gewinnen. Der Deckungsbeitrag (Gewinn pro Liter) beträgt für A Fr. 5,- und für B Fr. 1,-.**

2) **In einem Industriebetrieb werden zwei Produkte A und B gefertigt. An Einsatzgrössen sind vorhanden: Maschinen und Rohstoffe. Die Daten sind in der folgenden Tabelle dargestellt:**

Einsatzgrössen	techn. Koeff.		Kapazität
	Prod. A	Prod. B	
Maschinen	1	2	8
Rohstoffe	3	2	18
Gewinn	4	1	

Zu diesen zwei Restriktionen kommt eine weitere einschränkende Bedingung hinzu. Die Mengen x_1 und x_2 müssen aus betriebstechnischen Gründen in einem festen Verhältnis zueinander stehen, und zwar $x_1 : x_2 = 2 : 1$. Bei welchen Produktionsmengen wird der Gewinn maximal werden?

3) **Eine Fabrik montiert in 4 Abteilungen 2 verschiedene Produkte A und B. Produkt A durchläuft alle 4 Abteilungen, während Produkt B nur 3 Abteilungen durchläuft. Die Kapazitäten der 4 Abteilungen sind in erster Linie in den zur Verfügung stehenden Arbeitskräften, ausgedrückt durch Arbeiterstunden, begrenzt. Die 4 Einsatzgrössen a, b, c, d stellen die Arbeiterkapazität der 4 Abteilungen dar. Die technischen Koeffizienten sowie die Kapazitäten und Gewinngrössen sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich:**

Einsatzgrössen	techn. Koeff.		Kapazität
	Prod. A	Prod. B	
a	1	3	27
b	2	3	30
c	4	4	52
d	1	0	12
Gewinn	4	5	

Bei welchen Produktionsmengen wird der Gewinn maximal werden?

1) **In der Viehzucht ist z.B. vorgeschrieben, dass die Nahrungsration für ein Stück Vieh mindestens**

6 Einheiten des Nährstoffes A
12 Einheiten des Nährstoffes B
4 Einheiten des Nährstoffes C

enthalten muss.
Es stehen zwei Futtersorten 1 und 2 zur Verfügung. Eine Gewichtseinheit dieser Sorten enthält von den zwei Nährstoffen Mengen gemäss folgender Tabelle:

Nährstoff	Futter sorten		Mindestmengen
	1	2	
A	2	1	6
B	2	4	12
C	0	4	4
Kosten	5	6	

Wie muss das Futter aus den beiden Sorten gemischt sein, damit die Nahrungsration die Minimalmenge der einzelnen Nährstoffe enthält und gleichzeitig die Selbstkosten minimal werden?

1) **Berechnen Sie für die Funktion f durch lineare Approximation aus $f(x_0)$ einen Näherungswert für f(x) und vergleichen Sie diesen mit dem genauen Wert von f(x):**

a) $f(x) = x^5 - x$	$x_0 = 0$, $x = 0{,}1$	b) $f(x) = x^7 - 1$	$x_0 = -1$, $x = -1{,}01$
c) $f(x) = \ln x$	$x_0 = 1$, $x = 1{,}01$	d) $f(x) = e^x$	$x_0 = 0$, $x = 0{,}01$
e) $f(x) = 2^x$	$x_0 = 1$ $x = 1{,}1$	f) $f(x) = \sin x$	$x_0 = 45°$, $x = 50°$

2) **Berechnen Sie näherungsweise:**

a) $10{,}002^4$ b) $0{,}09^3$ c) $\sqrt{3{,}98}$ d) $\sqrt[3]{1001}$

3) **Die Seite eines Quadrats messe 50 m. Um wieviel wächst der Flächeninhalt angenähert, wenn man die Seite um 1 dm verlängert?**

4) **Eine Grösse x sei mit einem relativen Fehler von ±1% gemessen worden. Zeigen Sie, dass dann der relative Fehler von $y = ax^n$ annäherungsweise ±n% berträgt.**

5) **Bei einem Versuch zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g wurde eine Stahlkugel mehrmals aus 2,40 m Höhe fallengelassen und eine mittlere Fallzeit von (0,70±0,005)s gemessen. Welchen Wert mit welchem absoluten Fehler erhält man daraus für g nach dem Fallgesetz?**

6) **Um wieviel vergrössert sich ungefähr das Volumen eines eisernen Würfels von 10 cm Kantenlänge, wenn man ihn um 100 K erwärmt? (Längenausdehnungskoeffizient von Eisen: $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$)**

Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen jeweils die Stammfunktion (1 - 12):

1) a) $f(x) = 3x$ b) $f(t) = t^3$ c) $g(x) = -1{,}32x^5$

2) a) $g(u) = 17$ b) $h(x) = -\frac{3x^8}{5}$ c) $f(t) = gt$

3) a) $h(u) = au^2$ b) $g(x) = \frac{x^n}{n!}$ c) $f(x) = -\frac{2}{x}$

4) a) $h(t) = \sqrt[3]{t}$ b) $g(x) = 3x^2 - 2x + 3$ c) $f(t) = at^5 - bt^2 + c$

5) a) $h(u) = -\frac{2u^7}{5} - \frac{3u^2}{5}$ b) $f(x) = \frac{2}{x} - 3 + 5x$ c) $g(t) = \frac{1}{t^3} + \frac{2}{t^2} - \frac{3}{t}$

6) a) $h(t) = \frac{3t^4 - 3t^2 + 5t - 7}{4t^2}$ b) $f(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ c) $g(x) = 7\sqrt[4]{x^3}$

7) a) $f(z) = \sqrt{z} - \sqrt[3]{z}$ b) $h(x) = \frac{1}{3x^2} + \sqrt[3]{x^2}$ c) $f(x) = 2\sin x - 3\cos x$

8) a) $h(t) = \cos 2t$ b) $g(x) = 3 + 3\tan^2 x$ c) $f(u) = \frac{5}{\cos^2 u} + 5\cos u$

9) a) $g(u) = 2\sin u \cos u$ b) $h(z) = 3e^{-3z}$ c) $f(u) = 2e^u - e^{2u}$

10) a) $h(t) = e^t - \frac{1}{2t}$ b) $g(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $f(t) = -\frac{2}{t^2+1}$

11) a) $h(x) = x + \frac{2}{x^2+1}$ b) $f(u) = \sin u - \frac{6}{\sqrt{1-u^2}}$ c) $g(t) = \frac{1 - t^2 - t^4}{1 + t^2}$

12) a) $h(u) = \frac{u^2}{1+u^2}$ b) $f(x) = \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}$ c) $h(t) = \frac{9}{\sqrt{4-4t^2}}$

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

13) a) $\int(3x^2 - 7)\,dx$ b) $\int(3x^2 - 7)^2\,dx$ c) $\int\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}\right)dx$

14) a) $\int\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$ b) $\int\sqrt{z}(z^2 - 5)\,dz$ c) $\int(ax + b)(ax - b)\,dx$

15) a) $\int\frac{4t^2 - 6t + 5}{3t}\,dt$ b) $\int(2x + 7)(x^2 - 3)dx$ c) $\int(5\sin x + 3\cos x)\,dx$

Lösungen:

1) a) $\frac{3}{2}x^2$
b) $\frac{1}{4}t^4$
c) $-0{,}22x^6$

2) a) $17u$
b) $-\frac{1}{15}x^9$
c) $\frac{9}{2}t^2$

3) a) $\frac{1}{3}au^3$
b) $\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$
c) $-2\ln|x|$

4) a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{t^4}$
b) $3x - x^2 + x^3$
c) $ct - \frac{b}{3}t^3 + \frac{a}{6}t^6$

5) a) $-\frac{1}{5}u^3 - \frac{1}{20}u^8$
b) $-3x + \frac{5}{2}x^2 + 2\ln|x|$
c) $-\frac{1}{2t^2} - \frac{2}{t} - 3\ln|t|$

6) a) $\frac{7}{4t} - \frac{3t}{4} + \frac{1}{4}t^3 + \frac{5}{4}\ln|t|$
b) $\sqrt{u}$
c) $4\sqrt[4]{x^7}$

7) a) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{z^4} + \frac{2}{3}\sqrt{z^3}$
b) $-\frac{1}{3x} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}$
c) -2 cos x - 3 xin x

8) a) $\frac{1}{2}\sin 2t$
b) $3\tan x$
c) $5\sin u + 5\tan u$

9) a) $-\cos^2 u$
b) $-e^{-3z}$
c) $2e^u - \frac{1}{2}e^{2u}$

10) a) $e^t - \frac{1}{2}\ln|t|$
b) $3\arcsin x$
c) $-2\arctan t$

11) a) $\frac{1}{2}x^2 + 2\arctan x$
b) $-6\arcsin u - \cos u$
c) $-\frac{1}{3}t^3 + \arctan t$

12) a) $u - \arctan u$
b) $\arcsin x - \ln|x|$
c) $\frac{9}{2}\arcsin x$

13) a) $x^3 - 7x$
b) $49x - 14x^3 + \frac{9}{5}x^5$
c) $-\frac{b}{x} + a\ln|x|$

14) a) $-2\sqrt{t} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3}$
b) $-\frac{10}{3}\sqrt{z^3} + \frac{2}{7}\sqrt{z^7}$
c) $-b^2x + \frac{a^2}{3}x^3$

15) a) $-2t + \frac{2}{3}t^2 + \frac{5}{3}\ln|t|$
b) $-21x - 3x^2 + \frac{7}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4$
c) $-5\cos x + 3\sin x$

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

1) a) $\int \frac{1}{2}\,(e^{u} - e^{-u})\,du$ b) $\int \sin \omega t\,dt$ c) $\int (e^{x} - x^{e})\,dx$

2) a) $\int \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}\,dy$ b) $\int (\sin^2 u - \cos^2 u)\,du$ c) $\int \frac{b}{\sqrt{1 - z^2}}\,dz$ b) $\int \left(3 \sin t + \frac{5}{\cos^2 t}\right) dt$

Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale:

3) a) $\int_{1}^{3} 2x\,dx$ b) $\int_{-3}^{-1} 2x\,dx$ c) $\int_{-1}^{1} 2x\,dx$ d) $\int_{-1}^{3} 2x\,dx$

4) a) $\int_{0}^{4} (2x + 1)dx$ b) $\int_{0}^{-4} (2x + 1)\,dx$ c) $\int_{-4}^{4} (2x + 1)\,dx$ d) $\int_{-4}^{4} (2x - 1)\,dx$

5) a) $\int_{1}^{4} x^3\,dx$ b) $\int_{-1}^{1} t^8\,dt$ c) $\int_{1}^{3} (-3u^{-4})\,du$ d) $\int_{-1}^{-3} \frac{4}{t^5}\,dt$

6) a) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{3} x^2\,dx$ b) $\int_{18}^{27} (-5)\,dy$ c) $\int_{a}^{2a} ax\,dx$ d) $\int_{\sqrt{c}}^{c} ct^3\,dt$

7) a) $\int_{1}^{4} (3y^2 - y)\,dy$ b) $\int_{1}^{0} (2t^3 + 4t^2 + 5)\,dt$ c) $\int_{-2}^{2} (4u^3 + 3u^2 + 2u + 1)\,du$

8) a) $\int_{-1}^{2} (-y^2 + 3y - 4)\,dy$ b) $\int_{0}^{4} (2u + 5)^2\,du$ c) $\int_{a}^{b} (ax + b)\,dx$ d) $\int_{0}^{1} (t^2x + c)\,dx$

9) a) $\int_{0}^{1} (t^2x + c)\,dt$ b) $\int_{0}^{9} \sqrt{t}\,dt$ c) $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ d) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{y^2}\,dy$

10) a) $\int_{1}^{32} x^{-\frac{4}{5}}\,dx$ b) $\int_{0}^{64} (\sqrt{u} - \sqrt[3]{u})\,du$ c) $\int_{4}^{25} (y^2 + 3\sqrt{y})\,dy$ d) $\int_{1}^{16} \left(\frac{2}{t} + 3\sqrt{t}\right) dt$

11) a) $\int_{4}^{16} \left(4u - 2\sqrt{u} + \frac{5}{u}\right) du$ b) $\int_{-1}^{-3} \frac{1}{z}\,dz$ c) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2x}\,dx$

12) a) $\int_{1}^{2} \frac{z^3 - 1}{z}\,dz$ b) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2}\,dx$

13) a) $\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$ b) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$ c) $\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx$ d) $\int_{c}^{c+\pi} \cos u\,du$

Lösungen:

1) a) $\frac{1}{2}\left(e^{-u} + e^{u}\right)$
   b) $-\frac{1}{\omega}\cos \omega t$
   c) $e^{-x} - \frac{1}{e+1}\,x^{e+1}$
2) a) y - 2 arctan y
   b) $-\frac{1}{2}\sin 2u$
   c) b arcsin z
   d) -3 cos t + 5 tan t
3) a) 8
   b) -8
   c) 0
   d) 8
4) a) 20
   b) 12
   c) 8
   d) -8
5) a) 63,75
   b) $\frac{2}{9}$
   c) -0,963
   d) 0,988
6) a) 1,155
   b) -45
   c) $\frac{3}{2}a^3$
   d) $-\frac{1}{4}c^3 + \frac{1}{4}c^5$
7) a) 55,5
   b) -6,83
   c) 20
8) a) -10,5
   b) 345,3
   c) $-\frac{1}{2}a^3 - ab + b^2 + \frac{1}{2}ab^2$
   d) $c + \frac{1}{2}t^2$
9) a) $c + \frac{x}{3}$
   b) 18
   c) 2
   d) 18,6
10) a) 5
    b) -341,3
    c) 5421
    d) 131,5
11) a) 412,3
    b) 1,099
    c) 0,1014
12) a) 1,64
    b) -1,08
13) a) 2
    b) -2
    c) 0
    d) -2 sin c

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit einer geeigneten Substitution:

1) a) $\int (3x - 5)^6\,dx$ b) $\int \frac{6}{(4-3x)^2}\,dx$ c) $\int \frac{5}{3u-4}\,du$ d) $\int \sqrt{2t-1}\,dt$

2) a) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{u+2}}\,du$ b) $\int_3^4 \frac{2}{\sqrt[3]{2x-4}}\,dx$ c) $\int_0^{-1} \sqrt[4]{au+b}\,du$ d) $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{(3x-8)^2}\,dx$

3) a) $\int a \cos\frac{x}{b}\,dx$ b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\left(\frac{3u}{2} + \frac{\pi}{6}\right)dx$ c) $\int \frac{6}{\cos^2 3x}\,dx$ d) $\int \left(e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}\right)du$

4) a) $\int_0^1 \ln(2x+1)\,dx$ b) $\int \ln\frac{1}{8-3x}\,dx$ c) $\int \frac{1}{t\ln t}\,dt$ d) $\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx$

5) a) $\int x(x^2+1)^3\,dx$ b) $\int \frac{5z}{z^2+1}\,dz$ c) $\int_0^{-1} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ d) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$

6) a) $\int_0^{\pi} e^{\sin u}\cos u\,du$ b) $\int \cos^2 t \sin t\,dt$ c) $\int \frac{\sin u}{\cos^4 u}\,du$ d) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin u \cos u}\,du$

7) a) $\int \frac{1}{16+25x^2}\,dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{9-u^2}}\,du$ c) $\int \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}\,dt$ d) $\int \frac{9}{9+49x^2}\,dx$

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit partieller Integration:

8) a) $\int x\cos x\,dx$ b) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx$ c) $\int \sin t\cos t\,dt$ d) $\int \cos^2 u\,du$

9) a) $\int_1^e x\,e^x\,dx$ b) $\int x^3 e^{-x}\,dx$ c) $\int e^{2t}\sin t\,dt$ d) $\int_0^a x\,a^x\,dx$

10) a) $\int u\ln u\,du$ b) $\int (\ln u)^2\,du$ c) $\int x^5 \ln x\,dx$ d) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

11) a) $\int \arccos t\,dt$ b) $\int x \arcsin x\,dx$ c) $\int \frac{\arctan u}{u^2+1}\,du$ d) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Lösungen:

1) a) $\frac{1}{21}(3x-5)^7$
   b) $\frac{2}{4-3x}$
   c) $\frac{5}{3}\ln|3x-4|$
   d) $\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}$

2) a) 0,536
   b) 1,399
   c) $\frac{-4\sqrt[4]{b^5} + 4\sqrt[4]{(b-a)^5}}{5a}$
   d) 7,96

3) a) $ab\sin\frac{x}{b}$
   b) $\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3u}{2}\right)$
   c) $2\tan 3x$
   d) $2e^{-\frac{u}{2}} + 2e^{\frac{u}{2}}$

4) a) 0,648
   b) $x + \frac{8}{3}\ln|3x-8| -$
   $- x\ln|8-3x|$
   c) $\ln\ln t$
   d) $2\sqrt{x}$

5) a) $\frac{1}{8}(1 ++ x^2)^4$
   b) $\frac{5}{2}\ln|1+z^2|$
   c) 0,61
   d) $-3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}$

6) a) 0
   b) $-\frac{1}{3}\cos^3 t$
   c) $\frac{1}{3\cos^3 u}$
   d) -

7) a) $\frac{1}{20}\arctan\frac{5x}{4}$
   b) $\arcsin\frac{u}{3}$
   c) $\arcsin\frac{t-3}{3}$
   d) $\frac{3}{7}\arctan\frac{7x}{3}$

8) a) $-\cos x + x\sin x$
   b) -
   c) $-\frac{1}{2}\cos^2 t$
   d) $\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}$

9) a) -
   b) $(-6 - 6x - 3x^2 - x^3)e^{-x}$
   c) $\frac{1}{5}e^{2t}(2\sin t - \cos t)$
   d) -

10) a) $-\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}u^2\ln|u|$
   b) $2u - 2u\ln|u| +$
   $+ u\ln^2|u|$
   c) $-\frac{1}{36}x^6 + \frac{1}{6}x^6\ln|x|$
   d) -

11) a) $t\arccos t - \sqrt{1-t^2}$
   b) $-\frac{1}{4}\arcsin x + \frac{1}{2}x^2$
   $\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$
   c) -
   d) -

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Partialbruchzerlegung:

1) a) $\int \frac{3}{(x-1)(x+2)}\,dx$ b) $\int \frac{5u+12}{u^2+5u+6}\,du$ c) $\int \frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x}\,dx$ d) $\int \frac{2t^2+3t-2}{t^2-t^3}\,dt$

2) a) $\int \frac{2x-7}{4x^2-x+1}\,dx$ b) $\int \frac{x^4\,dx}{2(x-1)(x+1)(x-2)}$ c) $\int \frac{x^3}{(x^2+x+4)(x-1)}\,dx$ d) $\int \frac{x-2}{(x+2)^3}\,dx$

Vermischte Aufgaben

3) $\int \arctan x\,dx =$

4) Für eine Laplace-Transformation muss das folgende uneigentliche Integral gelöst werden:

$$\int_0^\infty e^{-pt}\sin\omega t\,dt =$$

5) Bewegungsgleichung einer Rakete:
Voraussetzungen: senkrechter Aufstieg ohne Luftwiderstand, konstante Schubkraft F und konstante Schwerebeschleunigung, Lineare Massenabnahme infolge Treibstoffverbrauch.
$m(t) = m_0 - qt$ solange $t < t_B$
m_0 = Startmasse, q = Treibstoffverbrauch, t_B = Brennschlusszeit, $m(t_B)$ = Nutzlast
Impulssatz: $\Delta m_{gas} v_{gas} = F\Delta t$
$$F = \frac{\Delta m_{gas}}{\Delta t} v_{gas} = q \cdot v_{gas}$$
Die drei Konstanten Schubkraft F, Treibstoffverbrauch q und Austrittsgeschwindigkeit v_{gas} sind also voneinander abhängig. Es sei $\alpha = \frac{q}{m_0} = \frac{F}{v_{gas} m_0}$
Zahlenwerte für die Rakete des Space-Shuttle: $F = 24 \cdot 10^6$N, $m_0 = 2 \cdot 10^6$kg, $v_{gas} = 2{,}5 \cdot 10^3\,\frac{m}{s}$.
Für α ergibt sich damit: $\alpha = 4{,}8 \cdot 10^{-3}\,s^{-1}$
$m(t) = m_0(1 - \alpha t)$
$m(t)a(t) = F - m(t)g$
$a(t) = \frac{F}{m(t)} - g = \frac{F}{m_0(1-\alpha t)} - g$
Durch Integrieren erhält man die Geschwindigkeit v(t) und den Weg s(t).

6) Berechnen Sie die Fläche des Kreises.

7) Berechnen Sie die Fläche, welche durch die beiden angegebenen Kurven begrenzt wird:

a) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$
b) $y = x^3 - 5x^2 + 6x$, $y = x^3 - 7x^2 + 12x$
c) $y^2 = 4 - x$, $y^2 = 4 + x$
d) $y = e^x$, $y = 1 - x^2$

Lösungen:

1) a) $\ln|x-1| - \ln|x+2|$
b) $3\ln|u+3| + 2\ln|u+2|$
c) $2\ln|x| + 3\ln|x+2| - \ln|x-1|$
d) $\frac{1}{t}(2 + t\ln|t| - 3t\ln|t-1|)$

2) a) $\frac{1}{4}\ln|4x^2-x+1| - \frac{9\sqrt{15}}{10}\arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{15}(8x-1)\right)$
b) $\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{12}\ln|x+1| + \frac{8}{3}\ln|x-2|$
c) $x + \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{1}{12}\ln|x^2+x+4| - \frac{13}{30}\sqrt{15}\arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{15}(2x+1)\right)$

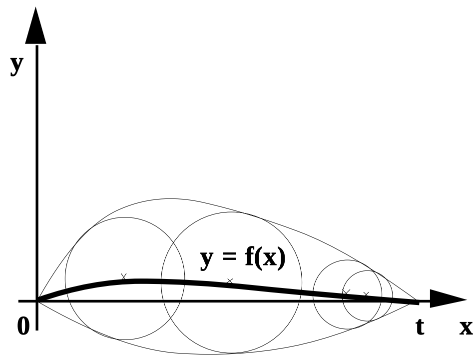
3) $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|$
4)
5)
6) $r^2\pi$
7) a) $\frac{64}{3}$
b) 9
c) $\frac{64}{3}$
d)

1) Ein Körper mit der Masse m bewegt sich geradlinig mit der Geschwindigkeit v_1. Nun wirkt auf ihn in Bewegungsrichtung eine Kraft F derart, dass sich seine Geschwindigkeit auf v_2 erhöht. Welche Arbeit leistet diese Kraft?

2) Die Skelettlinie eines Flugzeugprofils ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte der dem Profil eingeschriebenen Kreise (s. Abbildung). Für die Steigung einer bestimmten Skelettlinie gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_0}{4\pi}\left[\ln\left(1-\frac{x}{t}\right) - \ln\frac{x}{t}\right]$$

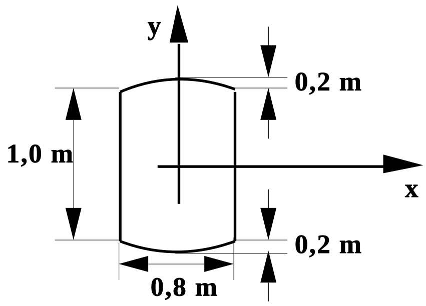
Dabei ist t die Profiltiefe und c_0 der Auftriebsbeiwert. Weiter gilt $y(0) = y(t) = 0$. Man bestimme die Gleichung der Skelettlinie und den maximalen y-Wert.



3) Die Fläche unter dem Graphen von $y = 2e^{-\frac{x^2}{2}}$ im Intervall [0,1] rotiert um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers.

4) Die im Bild dargestellte Fläche rotiert
a) um die x-Achse
b) um die y-Achse.

Die Begrenzungen oben und unten sind Parabeln 2. Ordnung. Man berechne die beiden Volumina.



5) In der Tiefe h einer im Schwerefeld befindlichen Flüssigkeit herrscht der hydrostatische Druck $p = \rho gh + p_0$. Dabei ist ρ die Dichte der Flüssigkeit, g ist die Fallbeschleunigung ($g = 9{,}81\ ms^{-2}$) und p_0 ist der auf die freie Oberfläche wirkende Druck.
Ein grosses Aquarium hat drei Fensterscheiben:
a) Eine rechteckige Scheibe von 1 m Breite und 60 cm Höhe, deren Oberkante 40 cm unter dem Wasserspiegel liegt.
b) Eine Scheibe in Form eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 80 cm, dessen eine Seite mit der Wasserlinie zusammenfällt.
c) Eine Scheibe gleicher Form und Grösse wie in b), aber umgekehrt montiert, d.h. eine Ecke ist an der Oberfläche und die gegenüberliegende Seite ist parallel zum Wasserspiegel.
Berechnen Sie die resultierenden Kräfte, welche auf diese Scheiben wirken.

Lösungen:
1)
2)
3)
4) a) 1,016
b) 0,84
5)

1) **Die Kurve mit der Gleichung $y^2 = x^2 - x^4$ rotiert um die x-Achse. Welchen Bruchteil macht das Volumen des Rotationskörpers vom Volumen der umschriebenen Kugel aus?**

2) **Die Kurve $y = -x^3 + 3x$ schliesst mit der x-Achse eine im I. Quadranten liegende Fläche ein. Diese rotiert um die y-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.**

3) **Wird beim freien Fall der Luftwiderstand in Form einer dem Quadrat der Fallgeschwindigkeit v proportionalen Reibungskraft kv^2 berücksichtigt, so gilt nach dem Newtonschen Grundgesetz:**

$$ma = mg - kv^2$$

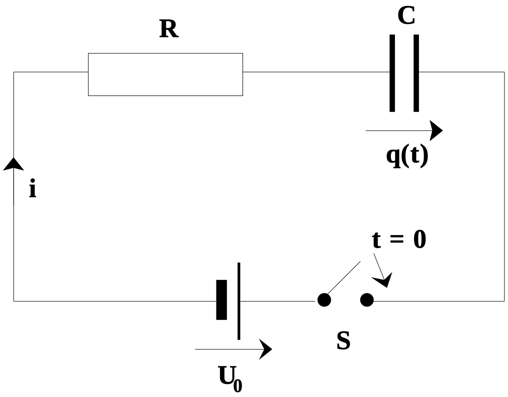
(m = Masse des fallenden Körpers, g = Erdbeschleunigung, k = Reibungskoeffizient)
Leiten Sie aus dieser Gleichung durch Integration die Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit v vom Fallweg s für den Anfangswert v(0) = 0 her.

4) **In der im Bild aufgezeichneten RC-Schaltung fliesst nach Schliessen des Schalters S zur Zeit t = 0 der folgende Ladestrom:**

$$i(t) = i_0 \bullet e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t \geq 0$$

a) **Ermitteln Sie den zeitlichen Verlauf der Kondensatorladung q(t), wenn der Kondensator zu Beginn energielos, d.h. ungeladen ist.**

b) **Welche Energie W wird bis zur Beendigung des Aufladevorgangs im ohmschen Widerstand R umgesetzt (Stromarbeit von t = 0 bis $t \to \infty$)?**



(R = ohmscher Widerstand, C = Kapazität, U_0 = angelegte Gleichspannung)

5) **Der Effektivwert eines Wechselstromes ist definitionsgemäss folgendermassen festgelegt:**

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \bullet \int_0^T i^2(t)\, dt}$$

Bestimmen Sie den Effektivwert, wenn der Strom durch die Gleichung $i(t) = i_0\left(\cos^2(\omega t) - \frac{1}{2}\right)$ gegeben ist. $(t \geq 0)$

1) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 10 Doppelwürfen x-mal (x = 0,1,2,...6) die Summe 5 zu würfeln? Stellen Sie Lösung graphisch in einem Diagramm dar.**

2) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 10 Doppelwürfen mindestens einmal als Summe 5 zu erhalten?**

3) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Familie mit drei Kindern zwei Knaben zu haben? (p = q = 0,5)**

4) **Im Winter erkranken erfahrungsgemäss 20% der Bevölkerung an Grippe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Vier-Personen-Familie in diesem Winter mindestens drei Personen erkranken werden?**

5) **Man vergleicht ein leichtes und ein schweres Geschütz; beide mögen dieselbe Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ haben. Beim leichten Geschütz benötigt man zwei Treffer, um ein Ziel zu vernichten; beim schweren Geschütz genügt ein Treffer. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu vernichten, wenn mit dem leichten Geschütz zehn Schüsse geschossen werden; welches ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit, wenn das schwere Geschütz fünf Schüsse abgibt?**

6) **Fünf Jäger sehen einen Hasen und schiessen gleichzeitig auf ihn. Nehmen wir an, für jeden Jäger bestehe unter den gegebenen Umständen eine Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{4}$, den Hasen zu treffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Hase von mindestens einem Schuss getroffen?**

7) **Durch einen Nachrichtenkanal können zwei Zeichen 0 und 1 übertragen werden. Infolge des Rauschens wird manchmal eine 1 empfangen, wenn eine 0 gesendet wurde. Die Wahrscheinlichkeit dafür betrage 0,1. Ebenso wird eine 0 empfangen, wenn eine 1 gesendet wurde. Auch dafür betrage die Wahrscheinlichkeit 0,1.**
Um das Zeichen 0 möglichst genau zu übermitteln wird statt 0 die Zeichenfolge 00000 gesendet. Der Empfänger erhält dann ebenfalls 00000, oder - falls falsch empfangen wird - z.B. 01100 usw. Er entscheidet nun nach folgender Regel: Enthält die empfangene Zeichenfolge mehr 0 als 1, so nimmt er an, es sei ihm 00000 gesendet worden, andernfalls entscheidet er sich für 11111. Der Sender sendet jetzt 00000. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Empfänger für 00000 entscheidet?

Lösungen:

1) **0.308; 0.385; 0.217; 0.072; 0.016; 0.002; ≈0; ≈0; ≈0; ≈0; ≈0**
2) **$1 - p_0 = 0.692$**
3) **0.375**
4) **$p_3 + p_4 = 0.027$**
5) **leichtes Geschütz 0,896**
   schweres Geschütz 0,868
6) **$1 - p_0 = 0.763$**
7) **0,9914**

1) **Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Übertragung von 100 Fernmeldezeichen fünf Zeichen verfälscht werden, wenn die Einzelwahrscheinlichkeit für das Auftreten eines solchen Fehlers 0,2% ist (POISSON-Verteilung als Näherung für die binomische Verteilung)**

2) **Bei einer Serienproduktion hat sich gezeigt, dass mit 2‰ Aussschuss zu rechnen ist. Die Produkte werden in Packungen von je 500 Stück abgefüllt, ohne dass vorher eventuelle Ausschussstücke noch ausgeschieden werden können. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 500 Stücke einer bestimmten Packung in Ordnung sind? (POISSON-Verteilung)**

3) **Eine Arbeiterin hat 600 Spindeln zu bedienen; in einer bestimmten Zeitspanne reissen im Mittel die Fäden an 3 Spindeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Zeitspanne mehr als zwei Fadenrisse auftreten? (POISSON-Verteilung)**

4) **Eine Telefonzentrale erhält im Mittel zwei Gespräche je Minute. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Minute k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 Anmeldungen eintreffen, wenn die Zahl der Anmeldungen poissonverteilt angenommen wird?**

Lösungen:

1) $P_{100}(x = 5) \approx 2 \cdot 10^{-6}$
2) **0,368**
3) **0,577**
4)

k =	0	1	2	3	4	5	6
P(k) =	0.135	0.271	0.271	0.180	0.090	0.036	0.012

1) Eine Zufallsvariable X sei angenähert normalverteilt mit $\mu = 3$ und $\sigma = 4$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Wert der Zufallsvariable bei einem Zufallsversuch im Intervall a) [5; 8] b) [1; 6] einstellt?

2) Die Masszahl des Gewichtes eines Artikels, der in grossen Mengen hergestellt wird, sei eine angenähert normal verteilte Zufallsvariable X. In längeren Untersuchungen hat man festgestellt, dass der empirische Mittelwert $\bar{x} = 40$ und die empirische Varianz $s^2 = 0{,}04$ betragen. Diese Werte können als Schätzwerte für μ und σ verwendet werden.
Aus der Produktion wird ein Stück herausgegriffen.
   a) Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass sein Gewicht zwischen 39,6 und 40,4 liegt?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Masszahl des Gewichtes grösser als 40,6?
   c) Wie gross darf das um den Mittelwert liegende, symmetrische Intervall sein, damit die Wahrscheinlichkeit für ein Messergebnis in diesem Intervall 97% wird?

3) Die mittlere Flugweite eines Geschosses betrage 1000 m. Die Flugweite betrachten wir als eine zufällige Variable mit Normalverteilung; die Standardabweichung betrage 30 m.
   a) Wieviel Prozent der abgefeuerten Geschosse werden um 50 bis 70 m über das Ziel hinausfliegen?
   b) Wieviel Prozent dieser Geschosse werden eine Abweichung vom Ziel (in Schussrichtung gemessen) haben, welche höchstens 20 m beträgt?
   Voraussetzung: Mittlerer Treffpunkt = Ziel

4) Bei der Produktion eines Massenartikels hat sich gezeigt, dass die Längen x normalverteilt sind mit $\mu \approx \bar{x} = 25$ cm und $\sigma = s = 0{,}2$ cm. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
   a) eine Länge zwischen 24,5 cm und 25,5 cm auftritt.
   b) eine Länge von höchstens 25,3 cm auftritt.
   c) die Abweichung $|x - \bar{x}|$ zwischen 0,3 und 0,6 liegt.
   d) Wie gross muss a mindestens sein, dass $P(|x - \bar{x}| < a) \geq 95\%$ wird?

5) Qualitätskontrolle: Auf einer Maschine wird eine grosse Zahl von Bolzen hergestellt, die alle die Länge 10 mm haben sollten. Es ist bekannt, dass dabei die wirkliche Länge eines Bolzens als Wert einer zufälligen Variablen aufgefasst werden kann, die im allgemeinen normalverteilt ist. Untersuchungen haben ergeben, dass für diese Normalverteilung gilt: $\mu = 10$ mm, $\sigma = 0{,}02$ mm.
   a) Toleranzgrenzen: Wie sollen die Toleranzgrenzen 10+a und 10-a gewählt werden, wenn man mit etwa 5% Ausschuss rechnen will?
   b) Gewünscht sind Bolzen, deren Länge x eine gewisse Maximallänge k nicht überschreitet; Bolzen mit x > k werden als Ausschuss betrachtet. Wie gross muss k gewählt werden, wenn man mit etwa 1% Ausschuss rechnen will?

6) Lösen Sie die Aufgabe 45/2 durch Näherung mit Poisson- bzw. Normalverteilung und beurteilen Sie die Genauigkeit der Näherungslösung.

Lösungen:

1) a) 0.203
   b) 0.465
2) a) 0,954
   b) ≈0.001
   c) [39,566; 40,434]
3) a) 4%
   b) 50%
4) a) 99%
   b) 93%
   c) 13%
   d) a ≥ 0,4
5) a) a = 0,04
   b) k = 10,05
6)

1) **Entwickeln Sie folgende Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe und bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius:**
   a) $f(x) = (1 + x)^n$ **Binomische Reihe**
   b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$
   c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
   d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) **Die Reihen von 1b), 1c) und 1d) können integriert werden. Dadurch erhält man die Logarithmusreihe, die Arcustangensreihe und die Arcussinusreihe. Bestimmen Sie diese Reihen.**

3) **Entwickeln Sie die Funktion f in eine Potenzreihe und geben Sie die ersten vier nicht verschwindenden Glieder an:**
   a) $f(x) = e^{\sin x}$
   b) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$
   c) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$
   d) $f(x) = \sqrt{x+4}$

4) **Berechnen Sie die folgenden Integrale näherungsweise mittels Taylor-Polynomen:**
   a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$
   b) $\int_0^{x} e^{-t^2}\, dt$
   c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\sqrt{t}\, dt$
   d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t}\, \sin\sqrt{t}\, dt$

Lösungen:

1) a) $1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)x^3 + \ldots$
   b) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$
   c) $1 - x^2 + x^4 + \ldots$
   d) $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \ldots$
2) a) $x + \frac{1}{2}n\,x^2 + \frac{1}{6}n(n-1)x^3 + \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)x^4 + \ldots$
   b) $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$
   c) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots$
   d) $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots$
3) a) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$
   b) $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6$
   c) $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4$
   d) $2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3$
4) a) 0.5083
   b) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \ldots$
   c) 0.6378
   d) 0.9775

1) **Zeigen Sie durch Differenzieren und Einsetzen, dass die Funktion $y = \frac{Cx}{1 + x}$ die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung $x\,(1 + x)\,y' - y = 0$ darstellt (C R).**
Wie lautet die durch den Punkt P(1/8) gehende Lösungskurve?

2) **Gegeben ist die Differentialgleichung $y'' - 4y' - 5y = 0$. Zeigen Sie, dass diese Gleichung die *allgemeine* Lösung $y = C_1 \cdot e^{5x} + C_2 \cdot e^{-x}$ besitzt (C_1, C_2 R).**

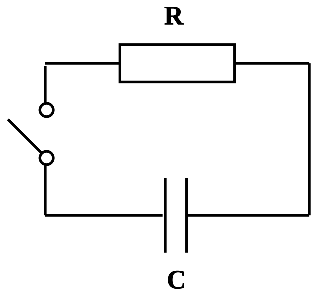
3) **Die Aufladung eines Kondensators der Kapazität C über einen ohmschen Widerstand R auf die Endspannung u_0 erfolgt nach dem Exponentialgesetz**

$$u_C(t) = u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right),\ t \geq 0$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion eine (partikuläre) Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$RC\,\frac{du_C}{dt} + u_C = u_0$$

ist, die diesen Einschaltvorgang beschreibt.



4) **Ein Pendel unterliege der periodischen Beschleunigung $a(t) = -5\cos t$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion $v = v(t)$ und die Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$ für die Anfangswerte $s(0) = 5$ und $v(0) = 0$.**

5) **Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen Lösungen der nebenstehenden DGLn sind.**

a)	$y = x + kx^2$	$xy' - 2y + x = 0$
b)	$y = k \cdot e^{-\sin(x)}$	$y' + y \cdot \cos(x) = 0$
c)	$y = a \cdot \cos(3x) + b \cdot \sin(3x) + \frac{1}{2}\,x \cdot \sin(3x)$	$y'' + 9y - 3 \cdot \cos(3x) = 0$

6) **Lösen Sie das**

a)	Anfangswertproblem	$\frac{y''}{x} = 3x$	$y(1) = -\frac{1}{4}$	$y'(1) = 1$
b)	Randwertproblem	$\frac{y''}{x} = 3x$	$y(1) = 1$	$y(2) = 2$

Lösungen:

1) $y = \frac{16x}{1 + x}$
4) $s(t) = 5\cos t$, $v(t) = -5\sin t$
5) a) ja b) ja c) ja
6) a) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}$ b) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{4}x + \frac{7}{2}$

1) **Skizzieren Sie das *Richtungsfeld* der jeweiligen Differentialgleichung 1. Ordnung mit Hilfe von *Isoklinen* und versuchen Sie, eine Lösungskurve einzuzeichnen. Wie lautet die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung?**

a) $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$, $(x > 0)$ b) $y' = y$

2) **Skizzieren Sie das Richtungsfeld der jeweiligen Differentialgleichung 1. Ordnung mit Hilfe von Isoklinen, und versuchen Sie, eine Lösungskurve einzuzeichnen:**

a) $y' = 1-y$ b) $y' = x+y$ c) $y' = xy$

3) **Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung durch *Trennung der Variablen*:**

a) $x^2\, y' = y^2$ b) $y'\,(1 + x^2) = xy$

c) $y' = (1 - y)^2$ d) $y' \cdot \sin y = -x$

4) **Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme durch *Trennung der Variablen*:**

a) $y' + (\cos x) \cdot y = 0$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$

b) $x(x + 1)y' = y$ $y(1) = \frac{1}{2}$

c) $y^2\, y' + x^2 = 1$ $y(2) = 1$

5) **Gegeben ist die DGL: $xy' + y = 0$**

a) **Schreiben Sie die linke Seite als Ableitung einer Funktion, und lösen Sie dann die DGL.**

b) **Zeichnen Sie die Lösungskurven, die durch den Punkt P gehen:**

b_1) $P = (1;1)$ b_2) $P = (-1;1)$

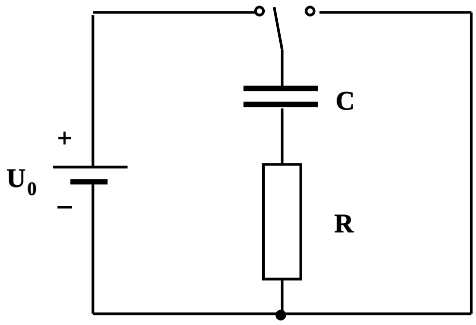
6) **Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender DGLn durch Separation der Variablen:**

a) $y' = -\frac{y}{x^2}$ b) $y' = \frac{2y}{x}$

c) $2y' = xy$ d) $x(x - 3)y' - y(x + 3) = 0$

e) $y' = 4y \cdot \tanh(x)$ f) $y' + 3 \cdot \sin(\omega x)y = 0$

7) **Laden und Entladen eines Kondensators: Ein Kondensator C wird über einen Widerstand R geladen bzw. entladen. Gegeben sind U_0, R und C. Bestimmen Sie die Strom- und die Spannungsfunktion beim Laden und beim Entladen.**
Hinweis: Beginnen Sie mit dem Entladen.



Lösungen:

3) a) $y = \frac{x}{1 + Cx}$, (C R)

b) $y = C\sqrt{1 + x^2}$, (C R)

c) $y = \frac{x + C - 1}{x + C}$, (C R)

d) $y = \arccos\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$, (C R)

4) a) $y = C \cdot e^{-\sin x}$, (C R)

$y_p = 2\pi \cdot e^{1 - \sin x}$

b) $y = \frac{Cx}{x + 1}$, (C R);

$y_p = \frac{x}{x + 1}$

c) $y = \sqrt[3]{3x - x^3 + 3C}$, (C R)

$y_p = \sqrt[3]{3x - x^3 + 3}$

5) a) $y = \frac{c}{x}$

b_1) $y = \frac{1}{x}$

b_2) $y = -\frac{1}{x}$

6) a) $y = C \cdot e^{\frac{1}{x}}$

b) $y = C \cdot x^2$

c) $y = C \cdot e^{\frac{1}{4}x^2}$

d) $y = C \cdot \frac{(x - 3)^2}{x}$

e) $y = C \cdot \cosh^4 x$

f) $y = C \cdot e^{\frac{3}{\omega}\cos(\omega x)}$

7) Entladen:

$U(t) = U_0\, e^{-\frac{1}{RC}t}$,

$I(t) = -\frac{U_0}{R}\, e^{-\frac{1}{RC}t}$

Laden:

$U(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$,

$I(t) = \frac{U_0}{R}\, e^{-\frac{1}{RC}t}$

1) **Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung mit Hilfe einer geeigneten *Substitution:***

a) $xy' = y + 4x$ **b)** $y' = (x + y + 1)^2$

c) $x^2 y' = \frac{1}{4} x^2 + y^2$ **d)** $y' = \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$

2) **Lösen Sie das *Anfangswertproblem*:**

$yy' = x + \frac{y^2}{x}$ $\qquad y(1) = \sqrt{2}$

mittels *Substitution*.

3) **Lösen Sie die folgenden *Anfangswertprobleme:***

a) $x^2 y' = y^2 + xy$ $\qquad y(1) = -1$

b) $yy' = 2 \cdot e^{2x}$ $\qquad y(0) = 2$

4) **Wir betrachten die folgende *chemische Reaktion*: Ein Atom vom Typ *A* vereinige sich mit einem Atom vom Typ *B* zu einem *Molekül* vom Typ *AB*: $A + B \rightarrow AB$.**
Die Anzahl der Atome vom Typ *A* bzw. *B* betrage zu Beginn der Reaktion (d.h. zur Zeit $t = 0$) *a* bzw. *b*. Nach der Zeit *t* seien $x = x(t)$ Moleküle *AB* entstanden. Dann lässt sich die chemische Reaktion durch die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

beschreiben (*k*: Konstante, vom Chemiker als *Geschwindigkeitskonstante* bezeichnet).

a) **Lösen Sie diese Differentalgleichung für $a \neq b$ und den Anfangswert $x(0) = 0$.**

b) **Wann kommt die Reaktion zum *Stillstand* (Annahme: $a > b$)?**

5) **Unter idealen Bedingungen ist die Wachstumsrate einer Bakterienkultur proportional zu ihrer Grösse, dh. die Änderung der Bakterienzahl pro Zeiteinheit ist proportional zur momentanen Bakterienzahl.**

a) **Die Bakterienzahl ist eine Funktion der Zeit.**
Stellen Sie die DGL für diese Funktion auf.

b) **Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL.**

c) **Bestimmen Sie die partikuläre Lösung der DGL, welche folgende Vorgaben erfüllt:**
i) Um 8 Uhr sind 2300 Bakterien vorhanden.
ii) Um 10 Uhr sind 9200 Bakterien vorhanden.

d) **Wieviele Bakterien enthält die Kultur um 14 Uhr?**

Lösungen:

1) a) Substitution: $u = \frac{y}{x}$ $\qquad y = 4x \cdot \ln|Cx|, (C \quad R \setminus \{0\})$

b) Substitution: $u = x + y + 1$ $\qquad y = \tan(x + C) - x - 1, (C \quad R)$

c) Substitution: $u = \frac{y}{x}$ $\qquad y = \frac{1}{2} x - \frac{x}{\ln|Cx|}, (C \quad R \setminus \{0\})$

d) Substitution: $u = \frac{y}{x}$ $\qquad y = 2x \cdot \arctan(Cx), (C \quad R)$

2) Substitution: $u = \frac{y}{x}$ $\qquad y = \pm x\sqrt{2 \cdot \ln|Cx|}, (C \quad R \setminus \{0\})$

$y_p = x\sqrt{2 \cdot \ln|ex|}$

3) a) Substitution: $u = \frac{y}{x}$ $\qquad y = -\frac{x}{\ln|Cx|}, (C \quad R \setminus \{0\})$

$y_p = -\frac{x}{\ln|ex|}$

b) Trennung der Variablen: $\qquad y = \pm\sqrt{2 \cdot e^{2x} + 2C}, (C \quad R)$

$y_p = \sqrt{2 \cdot e^{2x} + 2}$

4) a) Trennung der Variablen: $\qquad x(t) = ab \frac{e^{(a-b)kt} - 1}{a \cdot e^{(a-b)kt} - b}$

b) Für $a > b$ und $t \rightarrow \infty$ folgt: $\lim\limits_{t \rightarrow \infty} x(t) = b$

Die Reaktion kommt daher zum Stillstand, wenn alle Atome vom Typ B "verbraucht" sind.

5) a) Bakterienzahl $y = y(t)$, DGL: $\dot{y} = ky, k > 0$

b) $y = c \cdot e^{kt}$

c) $y = 2300 \cdot e^{\ln 2 \cdot t}$, $[t]$ = Stunden

d) 147'200

1) Welche der folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung sind *linear*, welche *nichtlinear*? Unterscheiden Sie dabei die linearen Differentialgleichungen nach *homogenen* und *inhomogenen* Differentialgleichungen.

a) $y' = xy$ **b)** $x^3y' - y = 2xy^2$
c) $y' - 2y = \sin x$ **d)** $y'\cdot\cos x - y\cdot\sin x = 1$
e) $y'y^2 + x^2 = 1$ **f)** $y' = \sqrt{y}$
g) $L\frac{di}{dt} + Ri = u(t)$ **h)** $y' = x(1 + y^2)$
i) $xy' + y = \ln x$ **j)** $m\dot{v} + kv = mg$
k) $y'\sqrt{y} - x = 0$ **l)** $y' = 5x^4(y + 1)$

2) Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung durch *Variation der Konstanten:*

a) $y' + xy = 4x$ **b)** $y' + \frac{y}{1+x} = e^{2x}$
c) $xy' + y = x\cdot\sin x$ **d)** $y'\cdot\cos x - y\cdot\sin x = 1$
e) $y' - (2\cdot\cos x)\cdot y = \cos x$ **f)** $xy' - y = x^2 + 4$

3) Ein Stromkreis mit einem *zeitabhängigen* ohmschen Widerstand werde durch die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{di}{dt} + (2\cdot\sin t)\cdot i = \sin(2t), \qquad (t \geq 0)$$

beschrieben. Ermitteln Sie den *zeitlichen Verlauf* der Stromstärke i durch *Variation der Konstanten* für den Anfangswert $i(0) = 0$.

4) Lösen Sie die folgenden *Anfangswertaufgaben* durch *Variation der Konstanten*:

a) $xy' - y = x^2\cdot\cos x$ $y(\pi) = 2\pi$
b) $y' + (\tan x)\cdot y = 5\sin(2x)$ **Lösungskurve durch Punkt** $P(3\pi/2)$
c) $xy' + y = \ln x$ $y(1) = 1$

5) Lösen Sie die *inhomogene* lineare Differentialgleichung 1. Ordnung $y' - 3y = xe^x$
a) zunächst durch *Aufsuchen einer partikulären Lösung*.
b) Wenn Sie in a) erfolglos sind, lösen Sie mit*Variation der Konstanten*..

Lösungen:

1) a) linear, homogen
b) nichtlinear, (y^2)
c) linear, inhomogen
d) linear, inhomogen
e) nichtlinear, $(y'y^2)$
f) nichtlinear, $(\sqrt{y})$
g) linear, inhomogen
h) nichtlinear, (y^2)
i) linear, inhomogen
j) linear, inhomogen
k) nichtlinear, $\left(y'\sqrt{y}\right)$
l) linear, inhomogen

2) C R

a) $y_h = C\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$
$y = C\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + 4$

b) $y_h = \frac{C}{x+1}$
$y = \frac{1}{4}\cdot\frac{(2x+1)\cdot e^{2x} + C}{x+1}$

c) $y_h = \frac{C}{x}$
$y = \frac{\sin x - x\cdot\cos x + C}{x}$

d) $y_h = \frac{C}{\cos x}$
$y = \frac{x + C}{\cos x}$

e) $y_h = C\cdot e^{2\sin x}$
$y = C\cdot e^{2\sin x} - \frac{1}{2}$

f) $y_h = Cx$
$y = x^2 + Cx - 4$

3) $i(t) = C\cdot e^{2\cos t} + \cos t + \frac{1}{2}$, (C R)
$i_p(t) = -\frac{3}{2}\cdot e^{-2+2\cos t} + \cos t + \frac{1}{2}$

4) a) $y = Cx + x\cdot\sin x$, (C R)
$y_p = 2x + x\cdot\sin x$

b) $y = C\cdot\cos x - 10\cos^2 x$, (C R)
$y_p = -12\cos x - 10\cos^2 x$

c) $y = \frac{C}{x} + \ln x - 1$, (C R)
$y_p = \frac{2}{x} + \ln x - 1$

5) a) $y_h = C\cdot e^{3x}$
$y = C\cdot e^{3x} - \frac{1}{4}(2x + 1)\cdot e^x$, (C R)

b) Ansatz für y_p: $y_p = (ax + b)\cdot e^x$
$y_p = -\frac{1}{4}(2x + 1)\cdot e^x$
$y = y_h + y_p = C\cdot e^{3x} - \frac{1}{4}(2x + 1)\cdot e^x$,
(C R)

1) **Lösen Sie die folgenden *inhomogenen* linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten nach der Methode *Aufsuchen einer partikulären Lösung*:**

a) $y' = 2x - y$
b) $y' + 2y = 4e^{5x}$
c) $y' + y = e^{-x}$
d) $y' - 4y = 5\sin x$
e) $y' - 5y = \cos x + 4\sin x$
f) $y' - 6y = 3e^{6x}$

2) **Lösen Sie das AWP (Anfangswertproblem)**
$x^2y' + 2xy - x + 1 = 0$ $\qquad y(1) = 0$

3) **Lösen Sie das AWP**
$y' = \frac{9x^2 + 3y^2}{2xy}$ $\qquad y(2) = 2$

4) **An einer Klausur nehmen 400 Studenten teil. Bereits um 9.20 Uhr hat der beste Student die schwierigste Aufgabe gelöst; und schon wird das begehrte Wissen (auf illegale Weise!) weitervermittelt. Der Informationsfluss werde durch die DGL**

$$y'(t) = k\cdot y(t)\cdot(400 - y(t))$$

beschrieben, wobei y(t) die Anzahl der "Wissenden" nach t Minuten bezeichnet.

a) **Lösen Sie die DGL zuerst allgemein.**
b) **Wie gross muss die Konstante k mindestens sein, so dass die Lösung der Aufgabe bis zum Ende der Klausur um 12.00 Uhr 75% der Klausurteilnehmer erreicht?**
c) **Entwerfen Sie ein dynamisches Modell und realisieren Sie es mit Dynasys. Lassen Sie die Lösungskurve zeichnen.**

Lösungen:

1) a) $y_h = C\cdot e^{-x}$
Ansatz: $y_p = ax + b$ $\qquad y_p = 2x - 2$
$y = y_h + y_p = C\cdot e^{-x} + 2x - 2$, (C R)

b) $y_h = C\cdot e^{-2x}$
Ansatz: $y_p = A\cdot e^{5x}$ $\qquad y_p = \frac{4}{7}e^{5x}$
$y = y_h + y_p = C\cdot e^{-2x} + \frac{4}{7}e^{5x}$, (C R)

c) $y_h = C\cdot e^{-x}$
Ansatz: $y_p = Ax\cdot e^{-x}$ $\qquad y_p = x\cdot e^{-x}$
$y = y_h + y_p = (x + C)\cdot e^{-x}$, (C R)

d) $y_h = C\cdot e^{4x}$
Ansatz: $y_p = A\sin x + B\cos x$
$y_p = -\frac{20}{17}\sin x - \frac{5}{17}\cos x$
$y = y_h + y_p = C\cdot e^{4x} - \frac{20}{17}\sin x - \frac{5}{17}\cos x$,
(C R)

e) $y_h = C\cdot e^{5x}$
Ansatz: $y_p = A\sin x + B\cos x$
$y_p = -\frac{19}{26}\sin x - \frac{9}{26}\cos x$
$y = y_h + y_p = C\cdot e^{5x} - \frac{19}{26}\sin x - \frac{9}{26}\cos x$,
(C R)

f) $y_h = C\cdot e^{6x}$
Ansatz: $y_p = Ax\cdot e^{6x}$ $\qquad y_p = 3x\cdot e^{6x}$
$y = y_h + y_p = (3x + C)\cdot e^{6x}$ (C R)

2) $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$

3) $y = x\sqrt{5x - 9}$

4) a) $y = \frac{400\,C\,e^{400\,kt}}{1 + C\,e^{400\,kt}}$

b) $y = \frac{400\,e^{400kt}}{399 + e^{400\,kt}}$, $k \geq 1{,}107\cdot 10^{-4}\ \text{min}^{-1}$

1) Welche der folgenden Differentialgleichungen 2. Ordnung haben konstante Koeffizienten? Klassifizieren Sie diese Differentialgleichungen ferner nach homogenen und inhomogenen Gleichungen.

a) $y'' + 2y' + y = \cos x$ b) $xy'' - 2y' = 0$

c) $y'' + 6y' + 9y = 0$ d) $2\ddot{x} + x = e^{-2t}$

e) $y'' + y' + x^2y = e^x$ f) $y'' - 4y' + 13y = 0$

2) Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung:

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$ b) $2\ddot{x} + 20\dot{x} + 50x = 0$

c) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 10\,x = 0$ d) $\ddot{\phi} + 4\phi = 0$

e) $y'' + 4y' + 13y = 0$ f) $2\ddot{q} + 7\dot{q} + 3q = 0$

g) $-\ddot{x} + 6\dot{x} = 9x$ h) $y'' -2ay' + a^2y = 0$

3) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y'' + 4y' + 5y = 0$ $y(0) = \pi,\ y'(0) = 0$

b) $y'' + 20y' + 64y = 0$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

c) $4\ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0$ $x(0) = 5,\ \dot{x}(0) = -1$

4) Zeigen Sie, dass die komplexwertige Funktion $y(x) = e^{(1{,}5 + 2j)x}$ eine partikuläre Lösung der lineare Differentialgleichung 2. Ordnung $y'' - 3y' + 6{,}25y = 0$ ist und gewinnen Sie hieraus eine reelle Fundamentalbasis der Differentialgleichung.

5) Zeigen Sie: Die DGL 2. Ordnung $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ besitzt die linear unabhängigen Lösungen
$x_1(t) = e^{-t}\sin t$ und $x_2(t) = e^{-t}\cos t$
Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung?

Lösungen:

1) a) Konstante Koeffizienten, inhomogen
b) Variable Koeffizienten, homogen
c) Konstante Koeffizienten, homogen
d) Konstante Koeffizienten, inhomogen
e) Variable Koeffizienten, inhomogen
f) Konstante Koeffizienten, homogen

2) a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$
b) $\lambda_{1/2} = -5$
c) $\lambda_{1/2} = 1 \pm 3j,\ x_h = e^t\left(C_1 \bullet \sin(3t) + C_2 \bullet \cos(3t)\right)$
d) $\lambda_{1/2} = \pm 2j,\ \phi_h = C_1 \bullet \sin(2t) + C_2 \bullet \cos(2t)$
e) $\lambda_{1/2} = -2 \pm 3j,\ y = e^{-2x}\left(C_1 \bullet \sin(3x) + C_2 \bullet \cos(3x)\right)$
f) $\lambda_1 = -0{,}5,\ \lambda_2 = -3,\ q_h = C_1 \bullet e^{-0{,}5t} + C_2 \bullet e^{-3t}$
g) $\lambda_{1/2} = 3$
h) $\lambda_{1/2} = a$

3) a) $\lambda_{1/2} = -2 \pm j,\ y_h = e^{-2x}\left(C_1 \bullet \sin x + C_2 \bullet \cos x\right)$ $(C_1 \quad R, C_2 \quad R)$
$y_p = \pi e^{-2x}(2\sin x + \cos x)$
b) $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -16,\ y_h = C_1 \bullet e^{-4x} + C_2 \bullet e^{-16x}$ $(C_1 \quad R, C_2 \quad R)$
$y_p = \frac{1}{6}\left(e^{-4x} - e^{-16x}\right)$
c) $\lambda_{1/2} = 0{,}5;\ x_h = (C_1 t + C_2) \bullet e^{0{,}5t}$ $(C_1 \quad R, C_2 \quad R)$
$x_p = (-3{,}5t + 5)e^{0{,}5t}$

4) $W(y_1; y_2) = 2 \bullet e^{3x} \neq 0$

5) $W(x_1;x_2) = -e^{-2t} \neq 0$
$x(t) = C_1x_1 + C_2x_2 = e^{-t}\left(C_1\sin t + C_2\cos t\right)$ $(C_1 \quad R, C_2 \quad R)$

1) **Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden inhomogenen linearen DGL 2. Ordnung:**

a) $y'' + 2y' - 3y = 3x^2 - 4x$
b) $y'' - y = x^3 - 2x^2 - 4$
c) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^{2t}$
d) $y'' - 2y' - 3y = -2 \cdot e^{3x}$
e) $\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 3\cos(5t)$
f) $y'' + 10y' - 24y = 2x^2 - 6x$
g) $\ddot{x} - x = t \cdot \sin t$
h) $y'' + 12y' + 36y = 3 \cdot e^{-6x}$
i) $y'' + 4y = 10 \cdot \sin(2x) + 2x^2 - x + e^{-x}$
j) $y'' + 2y' + y = x^2 \cdot e^x + x - \cos x$

Lösungen:

1) a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
i) $y_h = C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x)$;
Ansatz: $y_p = x(A\sin(2x) + B\cos(2x)) + ax^2 + bx + c + C \cdot e^{-x}$
$y_p = -\frac{5}{2}\, x \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2}\, x^2 - \frac{1}{4}\, x - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot e^{-x}$
j)

