



Physik 1  
im Studiengang Bau und Gestaltung

Hermann Knoll

Februar 2012

# Kapitel 1 Mass und Messen, Normen

## 1.1 Das internationale Einheitensystem

Am Anfang der Zivilisation stand die Messkunst. Unsere Vorfahren lernten die Messtechnik anzuwenden, als sie sesshaft wurden, Häuser bauten und Felder bestellten. Die ersten Masseinheiten waren Naturmasse: Schritt, Elle Zoll, Fuss usw. Im Laufe der Zeit wuchs die Zahl der verwendeten Einheiten zu einer unüberschaubaren Fülle an. Deshalb wurde im Jahre 1875 von 17 Staaten die Meterkonvention abgeschlossen, der heute 40 Staaten angehören. 1960 wurde von der 11. internationalen Konferenz für Mass und Gewicht das *Internationale Einheitensystem (SI)* angenommen, das heute in vielen Staaten verbindlich eingeführt ist.

Eine physikalische Grösse (z.B.: Länge, Masse, Zeit) beschreibt eine einzelne genau definierte Eigenschaft einer Erscheinung qualitativ und quantitativ.

Messen heisst, die zu messende Grösse mit einer festgelegten Masseinheit zu vergleichen.

Dabei gilt: Grösse = Zahlenwert x Masseinheit

SI-Basisgrösse	SI-Basiseinheit
Länge $l$	Meter m
Masse $m$	Kilogramm kg
Zeit $t$	Sekunde s
elektrische Stromstärke $I$	Ampere A
thermodynamische Temperatur $T$	Kelvin K
Stoffmenge $n$	Mol mol
Lichtstärke $I_v$	Candela cd

Von den Basiseinheiten werden weitere gebräuchliche Einheiten abgeleitet. Hier einige Beispiele:

Abgeleitete Grösse	SI-Einheit
Kraft	Newton $N = \frac{m \cdot kg}{s^2}$
Druck	Pascal $Pa = \frac{kg}{m \cdot s^2} = \frac{N}{m^2}$
Arbeit, Energie	Joule $J = \frac{m^2 \cdot kg}{s^2} = Nm$
Leistung	Watt $W = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3} = \frac{J}{s}$
Elektrische Ladung	Coulomb $C = As$
Elektrische Spannung	Volt $V = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3 \cdot A} = \frac{W}{A}$
Elektrischer Widerstand	Ohm $\Omega = \frac{m^2 \cdot kg}{s^3 \cdot A^2} = \frac{V}{A}$
Elektrische Kapazität	Farad $F = \frac{m^2 \cdot s^4 \cdot A^2}{kg} = \frac{C}{V}$

## 1.2 Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten

1000000000000	= $10^{12}$	Billionenfach	Tera	T
1000000000	= $10^9$	Milliardenfach	Giga	G
1000000	= $10^6$	Millionenfach	Mega	M
1000	= $10^3$	Tausendfach	Kilo	k
100	= $10^2$	Hundertfach	Hekto	h
10	= $10^1$	Zehnfach	Deka	da
0,1	= $10^{-1}$	Zehntel	Dezi	d
0,01	= $10^{-2}$	Hundertstel	Zenti	c
0,001	= $10^{-3}$	Tausendstel	Milli	m
0,000001	= $10^{-6}$	Millionstel	Mikro	$\mu$
0,000000001	= $10^{-9}$	Milliardenstel	Nano	n
0,000000000001	= $10^{-12}$	Billionstel	Piko	p

### Beispiele:

1 cm = 1 Zentimeter

1 ns = 1 Nanosekunde

1 MW = 1 Megawatt

1 kWh = 1 Kilowattstunde

Für nähere Einzelheiten zu den Definitionen der Masseinheiten sei auf das *Bundesgesetz über das Messwesen* vom 9.6.1977 (<http://www.admin.ch/ch/d/sr/9/941.20.de.pdf>) und auf die *Einheiten-Verordnung* vom 23.11.1994 (<http://www.admin.ch/ch/d/sr/9/941.202.de.pdf>) verwiesen.

## 1.3 Normen

Auslese und Vereinheitlichung von Formen, Grössen, Abmessungen und Abläufen, d.h. technische Normung, sind keine Erfindung der Neuzeit. Bereits im alten Ägypten wurden um 1500 v. Chr. einheitlich genormte Ziegel aus Nilschlamm für den Häuserbau verwendet. Im Mittelalter sorgten Zunftsatzen für zahlreiche technische Detailregelungen. Der Beginn einer systematischen Normung ist in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts anzusetzen. Mit der Industrialisierung, der Entdeckung mechanischer Energiequellen, der Erfindung leistungsfähiger Werkstoffe und der Entwicklung rationeller Produktionstechniken zeigte sich die Notwendigkeit zu einer Standardisierung grossen Stils. Der Anstoss für eine Vereinheitlichung auf technischem Gebiet kam aus England. Der englische Fabrikant Witworth stellte 1841 das erste brauchbare, nach ihm benannte Gewindesystem für Werkschrauben auf, das sich sehr bald auch in der deutschen Industrie durchsetzte. Auch bei der Vereinheitlichung der Masseinheiten wurden im letzten Jahrhundert die Grundlagen gelegt. Gleichzeitig wurden technisch-wissenschaftliche Vereinigungen gegründet, die an der Standardisierung interessiert waren und die Normungsarbeit leisteten. Zu nennen sind in Deutschland der Verein Deutscher Ingenieure (VDI) und der Verband Deutscher Elektrotechniker (VDE). 1917 wurde in Deutschland der Verein "Normalienausschuss für den allgemeinen Maschinenbau beim VDI" gegründet, aus dem das heutige "Deutsche Institut für Normung" (DIN) hervorgegangen ist. Auf internationaler Ebene entstanden am Anfang des 20. Jahrhunderts die ersten Organisationen. 1906 wurde in St. Louis die "International Electrotechnical Commission" (IEC) gegründet. Für das nicht-elektrotechnische Gebiet folgte 1928 die Gründung der *International Federation of the National Standardizing Associations* (ISA), die der Vorläufer der 1946 etablierten *International Organization for Standardization* (ISO) ist. ISO und IEC sind Vereine nach Schweizer Zivilrecht und haben ihren Sitz in Genf, Mitglieder sind die nationalen Normungsorganisationen. So ist z.B. Deutschland mit dem DIN, die Schweiz durch den *Schweizerischen Normen-Verein* (SNV) in der ISO vertreten.

ISO und IEC erarbeiten internationale Normen, die in der Praxis unmittelbar angewendet werden können. Die Normungsarbeit wird in beiden Organisationen in Technischen Komitees geleistet. Alle Mitgliedsorganisationen haben das Recht, sich an der Arbeit dieser Gremien zu beteiligen, die ehrenamtlich von Fachleuten aus aller Welt geleistet wird. Neben der internationalen Normung hat auch die technische Vereinheitlichung

auf europäischer Ebene grosses Gewicht. 1961 wurde das *Comité Européen de Normalisation* (CEN) und 1971 für die Elektrotechnik das *Comité Européen de Normalisation Electrotechnique* (CENELEC) gegründet. Die Arbeit dieser beiden Organisationen besteht vornehmlich darin, die von ISO und IEC erstellten internationalen Normen zu ergänzen und in Europa einheitlich einzuführen. CEN und CENELEC nehmen somit eine Mittlerrolle zwischen internationaler und nationaler Normung ein.

Technische Normen repräsentieren den Wissens- und Erfahrungstand der jeweiligen wissenschaftlich-technischen Disziplin. Sie müssen entsprechend dem Fortschritt von Wissenschaft und Technik ständig weiterentwickelt werden. Die Legitimation für die Schaffung technischer Normen beruht einzig auf Fachkunde. Erfahrung und genaue Kenntnis der Gegebenheiten und Bedürfnisse des jeweiligen Fachgebiets legitimieren zur Festsetzung von Standards, die sich nur durch die Anerkennung durch die Fachwelt aufrecht erhalten lassen. Das erklärt auch, warum die technische Normung überwiegend von privaten und nicht von öffentlichen Institutionen getragen wird. Die Arbeitsgremien sind auf nationaler wie auch auf internationaler Ebene ganz überwiegend von ehrenamtlichen Fachleuten aus den berührten Fachgebieten besetzt. Wissenschaft und Technik haben mit der technischen Normung in ihrem heutigen Erscheinungsbild ein Selbstregelungsmodell entwickelt. Der Staat kann sich statt selber ordnend einzugreifen auf die Setzung normativer Schutzzielbestimmungen und deren Kontrolle beschränken.

Im allgemeinen unterscheidet man folgende Arten von Normen:

- Massnormen (über Masse und Toleranzen von Gegenständen)
- Qualitätsnormen
- Gebrauchstauglichkeitsnormen
- Stoffnormen (physikalische, chemische und technologische Eigenschaften von Stoffen)
- Sicherheitsnormen
- Prüfnormen (für Untersuchungs-, Prüf- und Messverfahren zum Nachweis von Eigenschaften technischer Erzeugnisse oder Stoffe)
- Verfahrensnormen (Verfahren zum Herstellen, Behandeln und Handhaben von Erzeugnissen)
- Planungsnormen
- Dienstleistungs- und Liefernormen
- Verständigungsnormen (Verständigung unter den Fachleuten, Terminologie, Zeichen und Systeme)

Aus dem Überblick über mögliche Inhalte technischer Normen lassen sich bereits ihre Funktionen erkennen. Im grossen und ganzen werden vier übergreifende Funktionen deutlich:

- die Ordnungsfunktion
- die Rationalisierungsfunktion
- die Qualitätssicherungsfunktion
- die Schutz- und Sicherheitsfunktion

Normen sind also eine von einem gewissen Personenkreis anerkannte Art, eine sich wiederholende Aufgabe zu lösen. Sie geben damit einerseits Auskunft über die einschlägigen Wissens- und Erfahrungssätze einer bestimmten Disziplin an, andererseits wenden sie diese Wissens- und Erfahrungssätze gleichzeitig auf eine konkrete Aufgabe an und gelangen auf dieser Basis zu bestimmten Schlussfolgerungen. Für die Normungsgremien bedeutet dies, dass sie zunächst den für ihre Aufgabe massgeblichen Stand der Wissenschaft zu ermitteln haben. Sodann können sie die ihnen gestellte Aufgabe lösen, wobei in der überwiegenden Zahl der Fälle neben der Kodifikation naturwissenschaftlich-technischer Erkenntnisse und Erfahrungen auch Abschätzungen und Wertungen vorzunehmen sind, denn oft gibt es nicht nur eine *richtige* Lösung für das Problem. Verschiedene gleichermassen vertretbare Lösungen verlangen Entscheidungen, womit oft auch Weichenstellungen verbunden sind. Daher können Normen nur von solchen Personen erstellt werden, die ein Höchstmass von solider Fachkenntnis und Erfahrung, gepaart mit Augenmass, Intuition und Verantwortungsbewusstsein haben.

## 1.4 Messprotokoll

Wird eine physikalische Grösse gemessen, muss immer ein Messprotokoll angefertigt werden. Das Messprotokoll erfasst alle Messwerte (auch Fehlmessungen), in der Regel die direkte Auswertung der Werte und eine Fehlerabschätzung. Es soll auch eine Skizze oder ev. ein Bild der Messanlage zeigen. Eine Dokumentation über die verwendeten Messgeräte und der Messverfahren darf nicht fehlen. Insbesondere ist anzugeben, welcher Messbereich des Messgerätes verwendet worden ist, und welche Angaben der Hersteller zur Genauigkeit gemacht hat. Die Messwerte selbst trägt man in der Regel in eine vorher vorbereitete Tabelle ein. Dabei kann man auch darauf achten, dass Platz für aus den Messwerten zu berechnende weitere Grössen vorhanden ist. Messwerte können natürlich auch mit dem Computer erfasst werden, entweder mit einem Tabellenkalkulationsprogramm oder direkt mit einem Interface, über welches die Messdaten direkt eingelesen werden. In jedem Fall ist darauf zu achten, dass die Messwerte unmittelbar festgehalten werden, sie dürfen nicht nachträglich aus dem Gedächtnis rekonstruiert werden. Deshalb ist bei einer Messwerterfassung mit dem Computer darauf zu achten, dass die Werte regelmässig gesichert werden.

In einem Laborprotokoll werden Eintragungen nie ausradiert oder sonstwie unkenntlich gemacht. Vermeintlich falsche Aufzeichnungen werden vielmehr so durchgestrichen, dass sie weiterhin lesbar bleiben. Sie werden mit einem Kommentar versehen, der den Leser über den Grund des Irrtums aufklärt. Nachträgliche Eintragungen ins Protokoll sind als solche zu kennzeichnen.

## 1.5 Fehlerbeurteilung

Die Messung einer physikalischen Grösse bedeutet den Vergleich mit einer Masseinheit derselben Grösse. Es liegt in der Natur des Vergleichens, dass dabei Fehler auftreten. Dabei ist zwischen den systematischen und den zufälligen Fehlern zu unterscheiden.

### 1.5.1 Systematische Fehler

Systematische Fehler liegen vor, wenn z.B. Messgeräte nicht richtig kalibriert sind. Sie können aber auch im Messverfahren begründet sein. So führt die Nichtberücksichtigung von Nebenumständen ev. zu einem Fehler.

### 1.5.2 Zufällige oder statistische Fehler

Auch bei konsequenter Vermeidung von systematischen Fehlern wird die mehrmalige Messung einer Grösse nicht immer dasselbe Resultat liefern, selbst bei grösster Sorgfalt beim Messen. Der zufällige oder statistische Fehler kann mit Ereignissen aus der mathematischen Statistik verglichen werden. Die Theorie sagt, dass der statistische Messfehler normalverteilt ist

### 1.5.3 Mittelwert

Unter dem Mittelwert versteht man das arithmetische Mittel der gemessenen Werte.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Auf dem Taschenrechner bzw. dem Computer kann man den Mittelwert meist mit Anweisungen "AVERAGE" oder "MEAN" bzw. "MITTELWERT" berechnen.

### 1.5.4 Standardabweichung

Die Standardabweichung gibt die mittlere Abweichung des Einzelwertes vom Mittelwert an. Sie ist definiert durch:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Auf dem Taschenrechner bzw. dem Computer kann man die Standardabweichung meist mit Anweisungen 'STANDARDDEVIATION', 'STDEV' oder 'STABW' berechnen.

Die Standardabweichung gibt ein Intervall  $[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$  um den Mittelwert an, in dem gemäss Theorie etwa zwei Drittel der Messwerte liegen.

Das Ergebnis wird immer in der Form  $\bar{x} \pm \Delta x$  angegeben.

### 1.5.5 Relativer Fehler

Der relative Fehler wird durch den Quotienten aus Standardabweichung und Mittelwert berechnet. Es gilt:

$$\text{relativer Fehler} = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

Der relative Fehler wird meist in % angegeben.

### 1.5.6 Fehlerfortpflanzung

Meist wird aus den Messungen durch Einsetzen in eine Formel eine andere physikalische Grösse berechnet. Dabei ist zu beachten, dass sich die Messfehler der beteiligten Grössen auf die Zielgrösse übertragen. Das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz beschreibt die Fehlerübertragung entsprechend. Eine Fehlerabschätzung ohne Differentialrechnung kann folgendermassen gemacht werden:

Summe und Differenz:

$$z = x \pm y$$

$$\text{absoluter Grösstfehler } |\Delta z| = |\Delta x| + |\Delta y|$$

Produkt und Quotient:

$$z = xy \quad \text{oder} \quad z = \frac{x}{y}$$

$$\text{relativer Grösstfehler} = \left| \frac{\Delta z}{z} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right|$$

Potenz:

$$z = x^n$$

$$\text{relativer Grösstfehler} = \left| \frac{\Delta z}{z} \right| = n \left| \frac{\Delta x}{x} \right|$$

### 1.5.7 Beispiel

Mit einem Messband wurde die Länge einer Wand in einem Zimmer gemessen. Die Messung wurde 10 Mal durchgeführt, die Messwerte sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

Länge in m									
7.23	7.25	7.18	7.20	7.24	7.13	7.23	7.24	7.17	7.24

Der Mittelwert dieser 10 Messwerte beträgt  $\bar{x} = 7.211$  m, die Standardabweichung ist  $\Delta x = 0.039$  m. Als Messergebnis wird somit  $x = \bar{x} \pm \Delta x = (7.211 \pm 0.039)$  m angegeben. Konkret bedeutet dies, dass mit ca. 66%-iger Wahrscheinlichkeit der wahre Wert für die Wandlänge zwischen 7.171 m und 7.251 m liegt. Der relative Fehler beträgt  $\frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{0.039}{7.211} = 0.0055 = 0.5\%$ .

Für eine gewöhnliche Messung mit einem Messband ist das Messergebnis erstaunlich gut. Im Labor kann mit relativ günstigen Messgeräten in der Regel ein relativer Messfehler von ca. 1% erreicht werden. Mit einer eher billigen Ausstattung schafft man 3 bis 5%. Allgemein gilt die Regel, dass die Kosten für ein Messverfahren um eine Zehnerpotenz steigen, wenn man die Messgenauigkeit um eine Zehnerpotenz erhöhen möchte. Das ist allerdings nur eine grobe Faustregel, die von Fall zu Fall variieren wird.

## 1.6 Aufgaben

- Geben Sie folgende Messergebnisse nur mit SI-Basiseinheiten an:  
 $7.32 \text{ N} =$                        $123.5 \text{ C} =$                        $2.1 \cdot 10^{-3} \text{ g} =$                        $0.00321 \text{ MW} =$
- Stellen Sie das Messergebnis als Zahl mit einer Stelle vor dem Komma und mit geeigneten Zehnerpotenzen dar:  
 $84'000'000 \text{ m} =$                        $0.00000000123 \text{ kg} =$                        $1'280'000'000 \text{ J} =$                        $0.00000067 \text{ N} =$
- Stellen Sie das Messergebnis ohne Zehnerpotenzen aber mit Hilfe von geeigneten Bezeichnungen für dezimale Vielfache oder Teile dar:  
 $84'000'000 \text{ m} =$                        $0.00000000123 \text{ kg} =$                        $1'280'000'000 \text{ J} =$                        $0.00000067 \text{ N} =$
- Mit einem Voltmeter wurde die Spannung an einem Widerstand gemessen. Die Messung wurde 12 Mal durchgeführt, die Messwerte sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben. Bestimmen Sie Mittelwert und Standardabweichung und geben Sie das Ergebnis korrekt an.

Spannung in V											
0.235	0.237	0.230	0.240	0.235	0.232	0.234	0.230	0.233	0.247	0.235	0.229

- Das arithmetische Mittel wird üblicherweise als *Lagemass* dann berechnet, wenn die Messwerte *normalverteilt* sind (siehe Gauss'sche Normalverteilung). Üblicherweise sind Messwerte aus einer Serie von physikalischen Messungen tatsächlich normalverteilt, sodass hier das arithmetische Mittel wohl angebracht ist. Ein anderes Lagemass ist der *Median*. Es ist jener Wert in der nach Grösse geordneten Datenreihe, der genau in der Mitte liegt. Bei gerader Anzahl nimmt man den Mittelwert der beiden Mitteglieder.  
 Die folgende Tabelle gibt die Messwerte der Spannung der obigen Aufgabe nach Grösse geordnet wieder. Bestimmen Sie den *Median* und vergleichen Sie ihn mit dem arithmetischen Mittel. Wann wäre es besser, den Median als Lagemass zu verwenden? Suchen Sie ein treffendes Beispiel für einen solchen Fall.

Spannung in V											
0.229	0.230	0.230	0.232	0.233	0.234	0.235	0.235	0.235	0.235	0.237	0.240

- Um die Durchschnittsgeschwindigkeit zu messen, haben Sie die Fahrzeit  $\Delta t$  für die zurückgelegte Strecke  $\Delta x$  gemessen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit berechnen Sie sodann mit der Formel  $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Hier sind einige Beispiele von Messwertpaaren angegeben. Schreiben Sie die Lösung für die Durchschnittsgeschwindigkeit so auf, dass das Resultat die Genauigkeit des Messprozesses widerspiegelt.
  - $\Delta x = 3.41 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 1.2157 \text{ s}$
  - $\Delta x = 120 \text{ km}$ ,  $\Delta t = 91 \text{ min}$
  - $\Delta x = 0.0235 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 0.002 \text{ s}$
  - $\Delta x = 12.45 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 4.2 \text{ s}$
- Im Labor befindet sich ein Tisch, dessen Länge  $\ell$  und Breite  $b$  Sie mit einem gewöhnlichen Massstab messen können. Mit diesen Werten kann die Grösse der Tischfläche  $A$  berechnet werden. Es gilt:  $A = \ell \cdot b$ . Messen Sie Länge und Breite. Schätzen Sie jeweils den Messfehler und beurteilen Sie die Auswirkung der Messfehler durch Fehlerfortpflanzung auf das Ergebnis für die Fläche  $A$ .
- Gleich wie die vorherige Aufgabe: Sie messen mit Hilfe eines Messzylinders das Volumen  $V$  und mit einer Waage die Masse  $m$  eines Körpers. Die Dichte  $\rho$  des Stoffes, aus dem dieser Körper besteht, kann mit  $\rho = \frac{m}{V}$  berechnet werden. Gesucht sind die Auswirkungen der Messfehler auf das Ergebnis für die Dichte.
- Analog - digital: Im Labor ist ein Experiment zur Bestimmung der elektrischen Prozessleistung aufgebaut. Es wird dabei die Spannung  $U$  über einer Glühlampe und die Ladungsstromstärke  $I_Q$  durch die Glühlampe gemessen. Die Prozessleistung  $P_{el}$  kann man berechnen durch:  $P_{el} = U \cdot I_Q$ . Die Messungen werden einmal mit analogen Zeigerinstrumenten, das andere Mal mit Digitalmultimetern ausgeführt. Überlegen Sie sich, wie genau jeweils die Messungen sind (Abschätzung des Messfehlers) und beurteilen Sie die Auswirkung auf das Ergebnis durch Fehlerfortpflanzung.

## 1.7 Lösungen

- 1) a)  $7.32 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$   
 b) 123.5 As  
 c)  $2.1 \cdot 10^{-6}$  kg  
 d) 3'210 W
- 2) a)  $8.4 \cdot 10^7$  m  
 b)  $1.23 \cdot 10^{-9}$  kg  
 c)  $1.28 \cdot 10^9$  J  
 d)  $6.7 \cdot 10^{-7}$  N
- 3) a) 84 Mm  
 b)  $1.23 \mu\text{g}$   
 c) 1.28 GJ  
 d) 670 nN
- 4)  $\bar{U} = 0.23475$  V,  $\Delta U = 0.004974937$  V, Ergebnis:  $(0.235 \pm 0.005)$  V

- 5) Median: 0.2345 V

Hier liegt der Median nahe beim arithmetischen Mittelwert, da die Messwerte relativ gleichmässig um den Mittelwert verteilt sind. Ist dies nicht der Fall, kann es grössere Abweichungen geben, insbesondere, wenn es einzelne sehr grosse Ausreisser gibt. So ist z.B für den durchschnittlichen Jahreslohn in einem Land der Median die sinnvollere Grösse.

- 6) a)  $\bar{v} = \frac{3.41 \text{ m}}{1.2157 \text{ s}} = 2.80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

- b)  $\bar{v} = \frac{120 \text{ km}}{91 \text{ min}} = 1.3 \frac{\text{km}}{\text{min}} = 79 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

- c)  $\bar{v} = \frac{0.0235 \text{ m}}{0.002 \text{ s}} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

- d)  $\bar{v} = \frac{12.45 \text{ m}}{4.2 \text{ s}} = 3.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

- 7) Mit dem vorliegenden Messgerät kann man die Länge auf  $\pm 1$  mm genau messen. Die Fläche ist das Produkt von Länge und Breite. Somit ist der relative Grösstfehler  $= \left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \left| \frac{\Delta \ell}{\ell} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|$  mit  $\Delta \ell = \Delta b = 1$  mm.
- 8) Der vorhandene Messzylinder lässt Messen mit einer Ungenauigkeit von  $\pm 1$  ml zu, die Mettler-Waage misst mit einer Ungenauigkeit von  $\pm 0.01$  g. Somit ist der relative Grösstfehler  $= \left| \frac{\Delta \rho}{\rho} \right| = \left| \frac{\Delta m}{m} \right| + \left| \frac{\Delta V}{V} \right|$  mit  $\Delta m = 0.01$  g und  $\Delta V = 1$  ml.
- 9) Da die Prozessleistung als Produkt von Spannung und Ladungsstromstärke berechnet wird, gilt für den relativen Fehler wieder die Produktregel. Die Werte für den Messfehler bei den Messgeräten hängen von den vorhandenen Geräten ab (siehe Handbuch) und können hier nicht konkretisiert werden.



## Kapitel 2 Translationsmechanik: Impuls und Impulsstrom

Mechanik bedeutet die Wissenschaft von Körpern und ihren Bewegungen. Im einfachsten Fall wird ein Körper auf einen Massenpunkt reduziert und dessen Bewegung — geradlinig oder auch auf krummen Bahnen — beschrieben. Natürlich ist die Beschreibung von Bewegungen ausgedehnter Körper das erklärte Ziel, aber das ist oft nicht einfach erreichbar. In diesem Kapitel geht es in erster Linie um die Translationsmechanik des Massenpunktes, d.h. die Bewegung entlang einer geraden oder krummen Linie, beschleunigt oder auch nicht beschleunigt. Es geht insbesondere um die Frage, durch welche Ursachen die Bewegung beeinflusst wird.

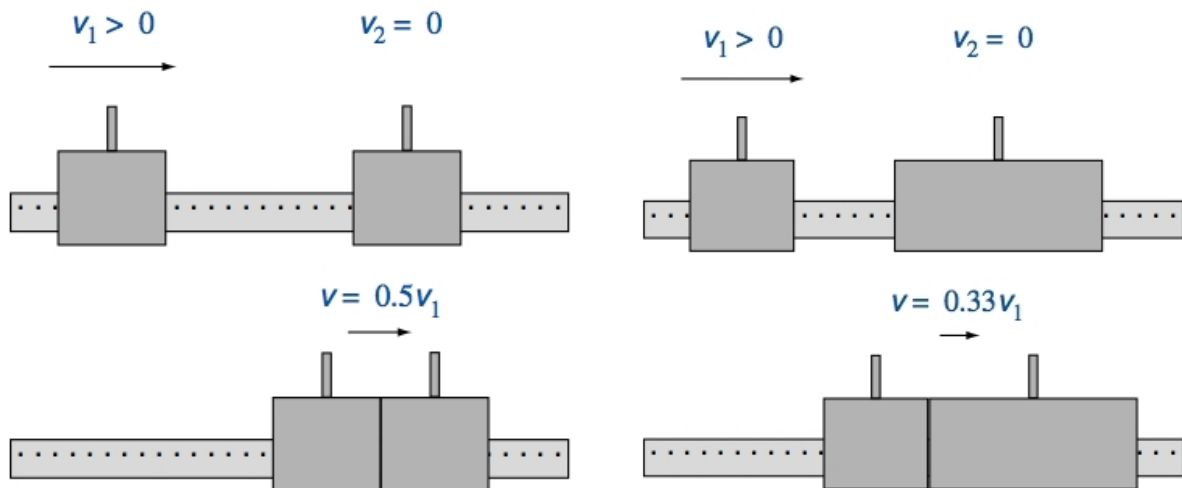
### 2.1 Der Impuls

Ein Massenpunkt  $m$  bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v$  (gemessen in einem definierten Bezugssystem). Das Produkt  $m \cdot v$  wird *Impuls*  $p$  genannt und ist eine Erhaltungsgrösse. Nachweisen kann man dies z.B. mit Stossversuchen, welche zeigen, dass in einem abgeschlossenen System die Summe der Impulse konstant ist. Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist ein Vektor, und somit ist auch der Impuls  $\vec{p}$  ein Vektor. Der Satz von der Erhaltung der Impulssumme gilt also für die Vektorsumme der Impulse.

#### Stossversuche

**Versuch 1:** Ein Körper mit der Masse  $m$  fährt auf der Luftkissenbahn mit der Geschwindigkeit  $v_1$  gegen einen ruhenden Körper mit derselben Masse und stösst mit diesem vollkommen unelastisch zusammen. Nach dem Stoss bewegen sich die beiden Körper gemeinsam mit der Geschwindigkeit  $v$ . Die Messung zeigt, dass die Geschwindigkeit nach dem Stoss gleich der Hälfte der Geschwindigkeit des ersten Körpers vor dem Stoss ist:  $v = \frac{1}{2}v_1$ .

Auswertung: Offenbar wurde der 'Schwung' (Impuls) des ersten Körpers durch den Stoss auf beide Körper verteilt. Da beide Körper dieselbe Masse und nach dem Stoss dieselbe Geschwindigkeit haben, muss wohl der Impuls in jedem Körper die Hälfte des Impulses des ersten Körpers vor dem Stoss betragen. Der Impuls ist also nicht verloren sondern nach dem Stoss in beiden Körpern vorhanden. Wenn man das Experiment mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten ausführt, wird man immer eine Halbierung der Geschwindigkeit feststellen. Das lässt vermuten, dass der Impuls proportional zur Geschwindigkeit des Körpers ist.



Wie würde das Experiment ausgehen, wenn die Masse  $m_1$  mit der Geschwindigkeit  $v_1$  gegen eine ruhende Masse  $m_2 = 2m_1$  stossen würde? Wenn unsere Beobachtung aus dem ersten Versuch stimmt, müsste die Geschwindigkeit nach dem unelastischen Stoss  $\frac{1}{3}$  der Anfangsgeschwindigkeit der ersten Masse sein, denn es gilt:  $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v = 3m_1 v$ . Daraus folgt:  $v = \frac{1}{3}v_1$ . Das Resultat kann durch das Experiment bestätigt werden.

**Versuch 2:** Wir lassen nun Körper mit verschiedener Masse auf einen ruhenden Körper unelastisch stossen. Die Versuche zeigen, dass der Impuls offenbar nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Masse des Körpers abhängt. Haben die Körper gleiche Masse, wird die Geschwindigkeit des stossenden Körpers halbiert. Ist die erste Masse doppelt so gross wie die zweite, sinkt die Geschwindigkeit weniger stark, nämlich auf  $\frac{2}{3}$  der Anfangsgeschwindigkeit. Das lässt den Schluss zu, dass der Impuls proportional zur Masse des Körpers ist.

Der Impuls  $p$  eines Körpers mit der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $v$  ist gleich  $p = m \cdot v$ .

Die Masseinheit des Impulses ist  $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ .

## 2.2 Impulstrom und Kraft

Die Experimente haben gezeigt, dass der Impuls bei Stössen von einem Körper auf den anderen übertragen wird. Diese Übertragung ist immer mit einer Verformung der beteiligten Körper verbunden. Die Verformung kann bleibend sein (unelastischer Stoss) oder auch wieder rückgängig gemacht werden (elastischer Stoss). Die Impulsübertragung geschieht aber immer nur während des Verformungsvorganges. Wir unterscheiden dabei Verformung durch Zug oder durch Druck. Die Impulsübertragung geschieht in Form eines Impulsstromes, den wir mit  $I_p$  bezeichnen. Der Impulsstrom wird üblicherweise als *Kraft* wahrgenommen. Wir können nun sogar sagen, dass der Betrag des Impulsstromes, der durch die Verformungsstelle fliesst, gleich dem Betrag der Kraft ist, welche an den Verformungsstellen jeweils auf die beteiligten Körper wirkt. Eine Frage ist aber noch zu klären, nämlich wie es mit den Richtungen von Impulsstrom und Kraft steht.

## 2.3 Impuls und Kraft als Vektoren

Die Geschwindigkeit ist eine Grösse mit Betrag und Richtung, sie kann also als Vektor dargestellt werden. Demnach muss also auch der Impuls ein Vektor sein. Es gilt:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

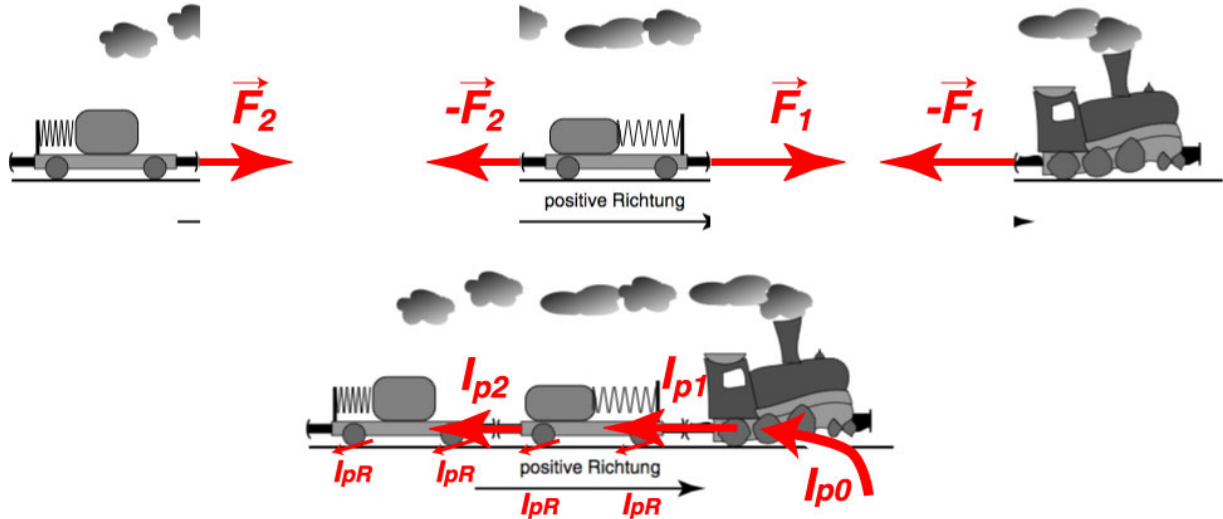
Der Impulsvektor hat somit dieselbe Richtung wie der Geschwindigkeitsvektor. Für den Impulsstrom haben wir aber so noch keine Vorgabe für die Richtung. Zur Orientierung dient immer ein Bezugskoordinatensystem. Ist das Bezugssystem festgelegt, gilt folgende Regel:

Bei einer *Druckbeanspruchung* fliesst der Impulsstrom  $I_p$  in *positive* Richtung,  
bei einer *Zugbeanspruchung* fliesst er in *negative* Richtung.

Für die Richtung der Kraft haben wir nun die soeben getroffene Vereinbarung als Vorgabe zu berücksichtigen. Dabei ist ferner zu beachten, dass die Verformung an den Oberflächen beider am Impulsaustausch beteiligter Körper stattfindet, und zwar in entgegengesetzter Richtung. Die Kraft soll uns deshalb auch anzeigen, in welche Richtung jeweils der Körper *beeindruckt* wird. Klar ist daher auch, dass wir beim Impulsübergang immer zwei Kräfte vorfinden, die entgegengesetzt zueinander gerichtet und gleich gross sind (*Wechselwirkungsgesetz* oder *3. Newton'sches Axiom*). Um die Richtung dieser beiden Kräfte richtig zu bestimmen, können wir uns an die Richtung des Impulsstromes halten. Es gilt:

Fliesst der Impulsstrom  $I_p$  in den Körper *hinein*, zeigt die Kraft in *positive* Richtung,  
fließt der Impulsstrom aus dem Körper *heraus*, zeigt die Kraft in *negative* Richtung.

Die folgenden Bilder illustrieren diesen Sachverhalt. Ein Zug beschleunigt in positive Koordinatenrichtung. Die Lokomotive fördert durch ihre Maschine Impuls aus der Erde über die Antriebsräder ins System. Dabei ist die Haftreibung zwischen Räder der Lokomotive und den Schienen für die Übertragung des Impulses verantwortlich. Ein Teil dieses geförderten Impulses bleibt in der Lokomotive, der Rest fliesst über die Kupplung zum ersten Wagen, in dem wieder ein Teil verbleibt. Der Rest fliesst an den zweiten Wagen. Durch Reibung fliesst während der Fahrt laufend etwas Impuls über die Räder an die Erde ab. Der meiste Impuls bleibt aber im System, das aus Lokomotive und den Wagen besteht. Mit zunehmendem Impuls in den Wagen wird auch die Geschwindigkeit anwachsen.



Der gesamte Impuls verteilt sich gemäss den Massen der Einzelteile so, dass alle hier gekoppelten Glieder dieselbe Geschwindigkeit haben. An den Kupplungen zwischen Lokomotive und den Eisenbahnwagen tritt jeweils eine Zugbelastung auf, deren Grösse durch die Grösse des Impulsstroms durch die Kupplungen bestimmt wird. Überall wo Impulsstrom fliesst, kann man auch die Kraftpfeile einzeichnen. Dabei ist zu beachten, dass jeweils ein Paar von Kraftpfeilen auftritt, die an verschiedenen Körpern angreifen. Im Bild sind nur die Kraftpfeile dargestellt, welche an den Puffern angreifen. Selbstverständlich könnte man auch die Kräfte an den Rädern bzw. an den Schienen einzeichnen. Überhaupt nicht eingezeichnet sind hier die vertikal verlaufenden Impulsströme und Kräfte, welche zur Vertikalbelastung (Bodendruck, Normalkräfte) gehören.

## 2.4 Impulsstrombilanz

Wenn wir die letzte Zeichnung betrachten, sehen wir zufließende und abfließende Impulsströme. Man kann natürlich jederzeit die Frage stellen, ob mehr Impuls zufließt oder abfließt oder ob die Ströme ausgeglichen sind. Diese Frage führt in einem System zur Impulsstrombilanz, welche die Summe der in das System zu- und von ihm abfließenden Impulsströme bildet. Das Ergebnis dieser Summe ist die Impulsänderungsrate  $\dot{p}$  im beobachteten System. Die Impulsänderungsrate ist übrigens gleichbedeutend mit der Beschleunigung. Bei einem Eisenbahnzug (der ganze Zug als System) können wir davon ausgehen, dass die Masse gleich bleibt. Somit ändert sich mit der Impulsänderung die Geschwindigkeit. Es gilt:  $\dot{p} = m \cdot \dot{v}$ . Die Impulsstrombilanz kann man folgendermassen aufschreiben:

$$I_{p1} + I_{p2} + \dots + I_{pn} = \sum_{i=1}^n I_{pi} = \dot{p}$$

Wenn also wie beim Eisenbahnzug die Masse des Systems konstant ist, kann man schreiben:

$$I_{p1} + I_{p2} + \dots + I_{pn} = \dot{p} = m \cdot \dot{v}$$

*Achtung:* Bei anderen Systemen kann sich die Masse ändern, wenn z.B., wie bei einer Rakete Masse ausgestossen wird und das System verlässt.

Da mit den Impulsströmen die dazugehörigen Kräfte verbunden sind und oftmals die Kräfte bekannt sind, kann die Bilanzgleichung auf die Kräfte umgeschrieben werden. Es gilt:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i = \dot{p} = m \cdot \dot{v}$$

Diese Gleichung ist auch als *Grundgleichung der Mechanik* oder als *2. Newton'sches Axiom* bekannt. Auf den starren Körper übertragen heisst dies: Die Summe aller am Körper angreifenden Kräfte ist gleich seiner Impulsänderungsrate.

## 2.5 Etwas Differential- und Integralrechnung

Die Änderungsrate einer physikalischen Grösse bedeutet die 1. Ableitung dieser Grösse nach der Zeit. Also gilt:

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

Für  $\dot{p} = m \cdot \dot{v}$  kann man schreiben:

$$\dot{p} = m \cdot \dot{v} = m \frac{dv}{dt}$$

Und da  $v$  die 1. Ableitung der Wegfunktion nach der Zeit ist, gilt:  $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Somit ist:  $\dot{p} = m \cdot \dot{v} = m \cdot \ddot{x}$

Oft sieht man das Grundgesetz der Mechanik so als Differentialgleichung aufgeschrieben:

$$\sum_i F_i = m \cdot \ddot{x}$$

Umgekehrt kann man mit dem unbestimmten Integral (Stammfunktion) aus der Beschleunigung  $\ddot{x}$  die Geschwindigkeit berechnen:

$$\int \ddot{x}(t) dt = \dot{x}(t) + v_0 = v(t) + v_0$$

Zu berücksichtigen ist, dass beim Integrieren eine Integrationskonstante (hier  $v_0$  auftritt, für deren Bestimmung eine Bedingung (z.B. Anfangsbedingung, d.h. die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = 0$ ) nötig ist.

Wird ein zweites Mal integriert, erhält man die Positions-Zeit-Funktion. Es gilt:

$$\int (v(t) + v_0) dt = x(t) + v_0 \cdot t + x_0$$

Mit einer weiteren Bedingung (z.B. Anfangsbedingungen, die die Position zum Zeitpunkt  $t = 0$  festhält) kann die zweite Integrationskonstante  $x_0$  berechnet werden.

So einfaches Hinaufintegrieren, wie es hier dargestellt ist, ist aber oft nicht möglich, weil im Ansatz z.B. verschiedene Ableitungen der Positions-Zeit-Funktion gleichzeitig vorkommen. Bei der gedämpften Schwingung besteht z.B. die Summe der angreifenden Kräfte aus der Federkraft, der Gewichtskraft und der Reibungskraft, die in gewissen Fällen proportional zur Geschwindigkeit ist. Dann erhält man:

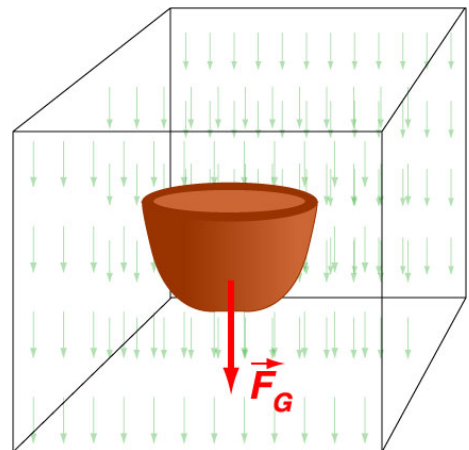
$$m\ddot{x} = F_F + F_G + F_R = -Dx - mg - k\dot{x}$$

Eine solche Differentialgleichung kann man mit speziellen Methoden der Mathematik lösen, die im 3. Semester Gegenstand des Unterrichts sein werden.

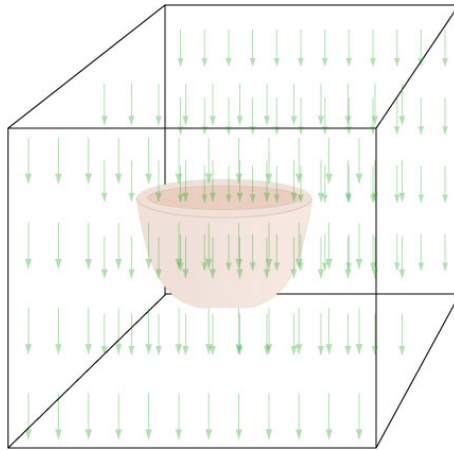
## 2.6 Die Gravitation

Von einem sich in einem Gravitationsfeld befindenden Körper mit der Masse  $m$  wissen wir, dass er ein Gewicht hat. Das Gravitationsfeld wirkt auf jeden Massenpunkt des Körpers. Diese Wirkungen fassen wir üblicherweise zusammen in einen Gewichtskraftvektor  $\vec{F}_G$ , der im Schwerpunkt des Körpers angreift. Wenn wir in so einem Fall eine Kraft benennen, muss es einen dazugehörigen Impulsstrom geben. Wir können uns vorstellen, dass durch das Gravitationsfeld ständig Impuls zu den Massenpunkten des Körpers fliesst und damit den Gesamtimpuls des Körpers vergrössert. Das bedeutet, dass der Körper seine Geschwindigkeit verändern muss. Wir registrieren diese Geschwindigkeitsänderung z.B. beim freien Fall oder beim senkrechten Wurf. Wenn der zufließende Impuls aber abgeleitet wird, z.B. über eine Auflage wie einen Tisch usw., könnte der Gesamtimpuls im Körper auch konstant gehalten werden, ja sogar auf Null stehen bleiben. Konstanter Impuls im Körper heisst Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, Impuls gleich Null bedeutet Stillstand im gewählten Bezugssystem.

Auch im Fall des durch Gravitation verursachten Impulsstromes in den Körper mit der Masse  $m$  besteht die bekannte Beziehung zwischen Impulsstrom und Kraft. Es gilt:  $F_G = I_{p_{grav}}$ . Die Gravitationskraft (Gewichtskraft) hängt nur von der Masse des Körpers und dem Gravitationsfeld ab. Es gilt:  $F_G = m \cdot g$ , wobei  $g$  die Stärke des Gravitationsfeldes beschreibt. Diese Stärke ist vom Abstand von der Masse, welche das Gravita-



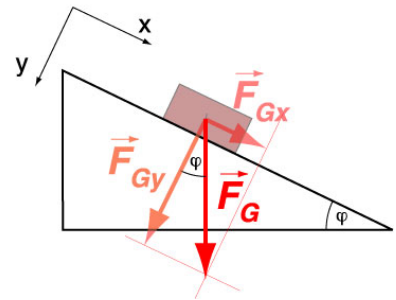
tionsfeld erzeugt, abhängig. Bei der Erde gilt in der Nähe der Erdoberfläche ein Wert für  $g$  von  $9.81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ . Jede Masse erzeugt ein Gravitationsfeld, das von der Grösse der Masse abhängt, und das den ganzen Raum durchsetzt. Wird eine zweite Masse in das Gravitationsfeld der ersten gebracht, so erfolgt die oben beschriebene Wirkung auf diesen massebehafteten Körper.



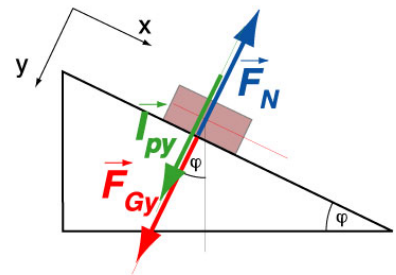
## 2.7 Beispiele

### 2.7.1 Körper auf der schiefen Ebene

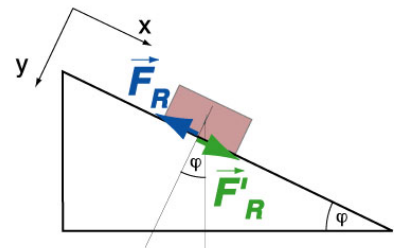
Ein Körper mit der Masse  $m$  liegt auf einer schiefen Ebene, die unter dem Winkel  $\varphi$  gegenüber der Horizontalen geneigt ist. Im Gravitationsfeld erfährt der Körper eine Gewichtskraft  $\vec{F}_G$ , die in diesem Fall nach unten zeigt. Nun ist es sinnvoll, ein Koordinatensystem einzuführen, dessen Achsen nicht parallel oder senkrecht zur Gewichtskraft sondern zur schiefen Ebene stehen. Hier soll also die  $x$ -Achse parallel und die  $y$ -Achse senkrecht zur schiefen Ebene verlaufen. Da  $\vec{F}_G$  ein Vektor ist, kann man ihn nun in seine Komponenten in diesem Koordinatensystem zerlegen. Diese sind  $\vec{F}_{Gx}$  und  $\vec{F}_{Gy}$ . Mit diesen Komponenten können nun die Impulsstrombilanzen unabhängig voneinander gemacht werden.



Die Gewichtskomponente  $\vec{F}_{Gy}$  drückt senkrecht auf die Unterlage und verformt sie damit. Diese Druckverformung weist uns auf einen Impulsstrom in positiver Richtung hin, hier nach unten in Pfeilrichtung. Fließt der Impulsstrom in den Körper hinein (hier in die Unterlage), zeigt die Kraft in positive Richtung. Das ist die Kraftkomponente  $\vec{F}_{Gy}$  in der nächsten Abbildung. Gleichzeitig ist aber auch eine Kraft auf den Körper zu beobachten (konkret auf die Kontaktfläche des Körpers mit der Unterlage), aus dem der Impulsstrom heraus fließt. Diese Kraft ist gleich gross und zeigt in negative Richtung. Sie wird hier *Normalkraft*  $\vec{F}_N$  genannt. Diese Normalkraft hält den Körper über der Unterlage, sie verhindert, dass er im Boden versinkt.



Die Druckbelastung an den Kontaktfläche des Körpers mit der Unterlage hat aber eine weitere Konsequenz. Sie bewirkt eine Verzahnung der Kontaktflächen, was sich bei einer Bewegung oder Belastung in  $x$ -Richtung als Reibung bemerkbar macht. Ist der Körper in Ruhe, nennt man diese Reibung *Haftreibung*, gleitet der Körper über die Unterlage, handelt es sich um *Gleitreibung*. Diese Reibung zeigt sich auch durch einen aus dem Körper abfließenden, in die Unterlage hineinfließenden Impulsstrom. Die dazugehörigen Kräfte sind die Reibungskraft  $\vec{F}_R$ , die an der Kontaktfläche des Körpers angreift und die Wechselwirkungskraft  $\vec{F}'_R$ , die an der Bodenfläche angreift.



Je nachdem man die Reibung als Druck- oder Zugbelastung sieht, fließt der Impulsstrom in positive oder in negative  $x$ -Richtung. Das spielt aber für die eingezeichneten Kräfte keine Rolle. Für den Impuls ist hier auf jeden Fall klar, dass er aus dem Körper in den Boden fließt.

Nun kann man sich fragen, was mit dem Körper geschieht, wenn hier nur die Gravitation als Ursache für den Impulsstrom vorhanden ist. Mit der Zerlegung in Komponenten können wir eine Impulsstrombilanz in  $x$ -Richtung und eine eigene in  $y$ -Richtung bilden. Die Summe der Impulsströme ist gleich der Summe der angreifenden Kräfte, wobei die Richtungen zu berücksichtigen sind. Und diese Summe ist gleich der Impulsänderungsrate in der jeweiligen Richtung.

$$x\text{-Richtung: } F_{Gx} - F_R = m \cdot \ddot{x}$$

$$y\text{-Richtung: } F_{Gy} - F_N = m \cdot \ddot{y}$$

In  $y$ -Richtung ist die Sache schnell klar. Da die Beträge von  $\vec{F}_{Gy}$  und  $\vec{F}_N$  gleich sind, ist die Impulsänderungsrate gleich Null. D.h. in  $y$ -Richtung gibt es keine Änderung der Geschwindigkeit, der Körper bleibt also auf der Bahn und versinkt nicht, was wir auch so erwartet haben.

In  $x$ -Richtung kommt es darauf an, wie gross die Reibungskraft ist. Aus der Theorie der Reibung wissen wir, dass diese Kraft nur von der Grösse der Normalkraft abhängt, mit welcher der Körper gegen die Unterlage gedrückt wird. Es gilt:  $F_R = \mu \cdot F_N$ , wobei  $\mu$  der Reibungskoeffizient ist. Sein Wert ist positiv. Konkrete Werte können für verschiedene Materialkombinationen der Oberflächen den einschlägigen Tabellenwerken entnommen werden, wobei noch zwischen Haftreibung und Gleitreibung zu unterscheiden ist. Bei der Haftreibung wird der maximale Reibungskoeffizient  $\mu_H$  angegeben. Dieser Wert wird dann erreicht, wenn der Körper bei einem Zug parallel zur Unterlage gerade aus der Ruhe in Bewegung kommt. Meistens ist aber die konkrete Haftreibungskraft kleiner als der Maximalwert  $\mu_H F_N$ .

Mit etwas Trigonometrie kann man die Beziehungen zwischen den Komponenten der Gewichtskraft und ihrem Betrag herstellen. es gilt:

$$\sin \varphi = \frac{F_{Gx}}{F_G} \quad \Rightarrow \quad F_{Gx} = F_G \sin \varphi = mg \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{F_{Gy}}{F_G} \quad \Rightarrow \quad F_{Gy} = F_G \cos \varphi = mg \cos \varphi$$

Für  $F_N$  ergibt sich dann:  $F_N = F_{Gy} = mg \cos \varphi$

Die Reibungskraft  $F_R$  wird berechnet zu:  $F_R = \mu F_N = \mu mg \cos \varphi$

Die Impulsstrombilanz in  $x$ -Richtung lautet dann:

$$m \ddot{x} = F_{Gx} - F_R = mg \sin \varphi - \mu mg \cos \varphi = mg(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$$

Ein spezieller Fall ist gegeben, wenn die Impulsstrombilanz in  $x$ -Richtung Null ergibt. Das ist der Fall, wenn z.B. die Haftreibungskraft gleich gross wie  $F_{Gx}$  ist. Vergrössert man den Winkel  $\varphi$  kontinuierlich, wird man einen Wert erreichen, bei dem der Körper gerade ins Rutschen kommt. In diesem Fall hat man die maximale Haftreibungskraft  $\mu_H F_N$  erreicht. Durch Bestimmen des Winkels kann daher der Wert für  $\mu$  berechnet werden. Es gilt:  $\sin \varphi - \mu \cos \varphi = 0$  und damit  $\tan \varphi = \mu$ .

### 2.7.2 Eisenbahnzug

Ein Eisenbahnzug besteht aus einer Lokomotive (60 t) und 3 Wagons (je 18 t). Die Lokomotive beschleunigt den Zug auf horizontaler Strecke gleichmässig aus dem Ruhezustand in 30 s auf eine Geschwindigkeit von 60 km/h. Welche Belastung muss der Kupplungshaken zwischen Lokomotive und 1. Wagon aushalten, welche muss der Haken zwischen 2. und 3. Wagon aushalten? Für die Rollreibung an den Rädern kann man mit einem Rollreibungskoeffizienten von  $\mu_R = 0.002$  rechnen.

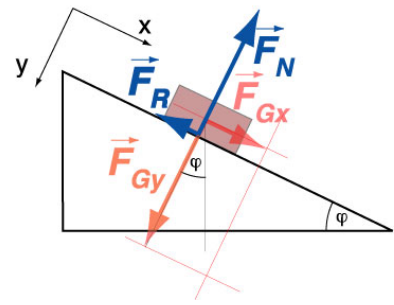
Für die Lösung können wir die Impulsstrombilanz betrachten. Die Lokomotive fördert, angetrieben durch ihren Motor Impulsstrom aus der Erde in den Zug. Zu beachten ist, dass der ganze Zug immer dieselbe Geschwindigkeit hat. Deshalb gilt:

$$m_{gesamt} \cdot \dot{v} = I_{pLok} - I_{pReibung}$$

$I_{pReibung}$  hängt nur von der Normalkraft (hier Gewicht des Zuges) und dem Material (hier  $\mu_R = 0.002$ ) ab.

Es ist  $I_{pReibung} = \mu \cdot m_{gesamt} \cdot g = 0.002 \cdot 114'000 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2'240 \text{ N}$

$$\dot{v} = \frac{60 \text{ km/h}}{30 \text{ s}} = \frac{60}{3.6 \cdot 30} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.56 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Somit ist  $I_{p_{Lok}} = m_{gesamt} \cdot \dot{v} + I_{p_{Reibung}} = 114'000 \text{ kg} \cdot 0.56 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 2'240 \text{ N} = 116'000 \text{ N}$

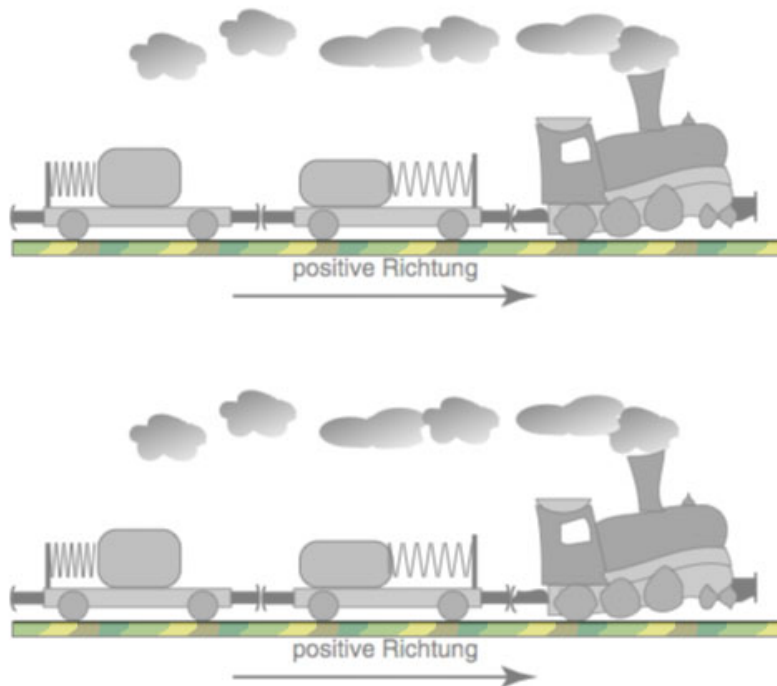
Der geförderte Impuls wird gemäss den Massen aufgeteilt. Auf die 3 Wagons entfallen  $\frac{54}{114}$  Teile. Der Zughaken an der Lokomotive muss also  $\frac{54}{114} \cdot 116'000 \text{ N} = 55'000 \text{ N}$  übertragen. Der Haken zwischen dem 2. und dem 3. Wagen muss  $\frac{18}{114} \cdot 116'000 \text{ N} = 18'000 \text{ N}$  übertragen.

## 2.8 Bemerkungen

In diesem Kapitel wurden Körper wie Massenpunkte behandelt. So müssten beim Beispiel mit der schiefen Ebene noch die Angriffspunkte der Kräfte und die daraus folgenden Konsequenzen berücksichtigt werden. In der Praxis sehen wir immer auch Fälle, bei denen z.B. so ein Körper auf der schiefen Ebene kippt. Die am Körper angreifenden Kräfte können also auch Drehmomente bewirken, die aber hier vernachlässigt wurden. In einem späteren Kapitel wird auf diese Problematik eingegangen und die entstehenden Drehmomente werden dann auch tatsächlich berücksichtigt. Jetzt sollen aber nur Fälle diskutiert werden, bei denen auftretenden Drehmomente keine Rolle spielen.

## 2.9 Aufgaben

- Am Ende des Abschnittes 2.3 ist eine Abbildung, welche den Zusammenhang zwischen Impulsströmen und Kraftpfeilen aufzeigt. Die Kraftpfeile an den Puffern sind eingezeichnet. Es fehlen die Kraftpfeile, die zum Impulsstrom des Antriebs und zu den Impulsströmen bei der Reibung gehören. Zeichnen Sie jetzt in die beiden Abbildungen unten die Kraftpfeile ein, die zum Impulsstrom des Antriebs und zu den Impulsströmen der Reibung gehören. In der oberen Abbildung sollen die Kraftpfeile eingezeichnet werden, die auf die Räder wirken, in der unteren Abbildung die Kraftpfeile, die auf die Schienen wirken.



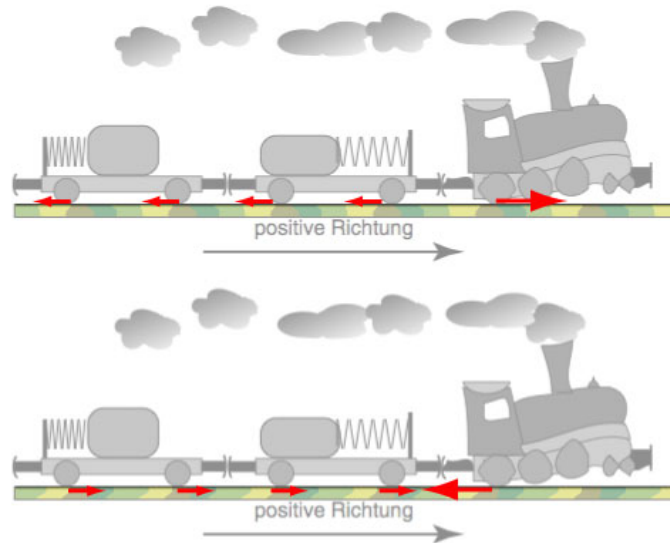
- Auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel von  $\varphi = 30^\circ$  liegt ein Körper mit der Masse  $m = 200 \text{ kg}$ . Er wird gerade noch durch die Reibung gehalten, d.h. eine Vergrößerung des Neigungswinkels  $\varphi$  würde den Körper sofort ins Rutschen bringen.
  - Zeichnen Sie alle am Körper angreifenden Kräfte in dieser Situation ein.
  - Mit diesen Angaben ist es möglich, den maximalen Haftreibungskoeffizienten  $\mu_H$  für die Materialkombination Körperbodenfläche – Unterlage zu bestimmen. Bestimmen Sie  $\mu_H$ .

- 3) Ein Auto (Gesamtmasse  $m = 1500$  kg) fährt mit der Geschwindigkeit von 45 km/h auf einer Bergstrasse mit 5% Neigung aufwärts. Um ein vor ihm fahrendes Fahrzeug zu überholen beschleunigt der Fahrer des Autos innerhalb von 10 s gleichmässig auf 60 km/h. Die Rollreibung ist bei dieser Autofahrt mit dem Rollreibungskoeffizienten von  $\mu_R = 0.02$  zu berücksichtigen.
- Welchen Impuls hat das Auto vor bzw. nach der Beschleunigungsphase in sich?
  - Muss der Automotor vor der Beschleunigungsphase, also bei Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit von 45 km/h Impuls aus der Erde fördern? Wenn ja, wie gross ist der Impulsstrom?
  - Welchen Impulsstrom muss der Automotor während der Beschleunigungsphase fördern?
- 4) Ein Auto ( $m = 1000$  kg) steht auf einer schiefen Ebene (Winkel  $\varphi$ ) und möchte aus der Ruhe nach oben hin abfahren. Bekanntlich ist es die Haftreibung, welche für das Stehen auf der schiefen Ebene und für das Abfahren nach oben verantwortlich ist. In unserem Fall soll die Haftreibung voll ausgenutzt werden ( $\mu_H = 0.8$ ), um den Abfahrvorgang mit möglichst grosser Beschleunigung zu erreichen.
- Zeichnen Sie ein Bild und alle beim Abfahren auf das Auto wirkenden Kräfte ein. Beachten Sie insbesondere die richtige Lage der Angriffspunkte der Kräfte.
  - Schreiben Sie eine Gleichung auf, welche es ermöglicht, im oben dargestellten Fall die Beschleunigung des Autos zu berechnen (abhängig von den auftretenden Kräften).
  - Beurteilen Sie ohne Rechnung mit schlüssiger Begründung in ein paar Zeilen, ob bei Verkleinerung des Neigungswinkels der schiefen Ebene die zu erzielende Beschleunigung grösser oder kleiner wird.
- 5) Ein Auto ( $m_1 = 1200$  kg) fährt mit einer Geschwindigkeit von  $v_1 = 10$  m/s auf ein zweites ( $m_2 = 800$  kg), stillstehendes Auto ungebremst auf. Die Knautschzonen werden verformt und die beiden Autos bleiben nach dem Stoss zusammen. Der Stossprozess dauert 0.2 s. Es wird angenommen, dass während des Stosses ein konstanter Impulsstrom fliesst. Die Rollreibung ist hier vernachlässigbar.
- Welche Beschleunigung erfahren bei diesem Zusammenstoss die angegurteten Passagiere in den beiden Autos?
  - Sie erfahren in a), dass die Passagiere des zweiten Autos stärker unter dem Zusammenstoss leiden, als jene aus dem ersten Auto. Wäre es für die Passagiere des zweiten Autos eventuell besser gewesen, wenn das zweite Auto auf das stillstehende erste aufgefahren wäre? Begründen Sie Ihre Antwort mit geeigneten Argumenten (mit Worten, Bildern bzw. einer Rechnung).
- 6) Ein Curlingstein wird gestossen und gleitet über die Eisfläche. Er soll am Ziel (hier nach genau 10 m) mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s auf einen anderen Stein stossen, um ihn aus dem Rennen zu schlagen. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit muss der Curlingstein auf die Bahn gesetzt werden, damit der Stoss gelingt?
- Daten:  
 Masse des Curlingsteins: 18.16 kg.  
 Gleitreibungszahl:  $\mu = 0.01$

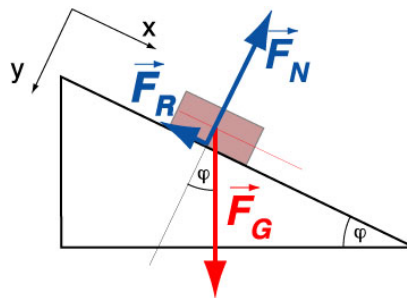


## 2.10 Lösungen

- 1) oben: Kräfte auf die Räder, unten: Kräfte auf die Schienen

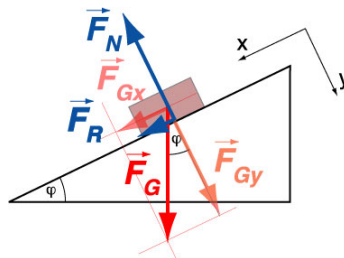


- 2) a) Alle am Körper angreifenden Kräfte:



- b) Im gegebenen Fall sind  $F_R$  und  $F_{Gx}$  gleich gross. es gilt:  $\mu F_N = F_{Gx}$   
 $\mu mg \cos \varphi = mg \sin \varphi$   
 $\mu = \tan \varphi = \tan 30^\circ = 0.58$

- 3) 5% Steigung bedeutet  $\tan \varphi = 0.05$ . Der Neigungswinkel ist dann:  $\varphi = 2.86^\circ$ .



In  $y$ -Richtung ist die Impulsänderungsrate gleich Null, da die Normalkraft die  $y$ -Komponente der Gewichtskraft kompensiert. In  $x$ -Richtung muss auch während der Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit der Motor die  $x$ -Komponente der Gewichtskraft und die Reibungskraft kompensieren. Es gilt:

$$m\ddot{x} = 0 = F_M - F_{Gx} - F_R$$

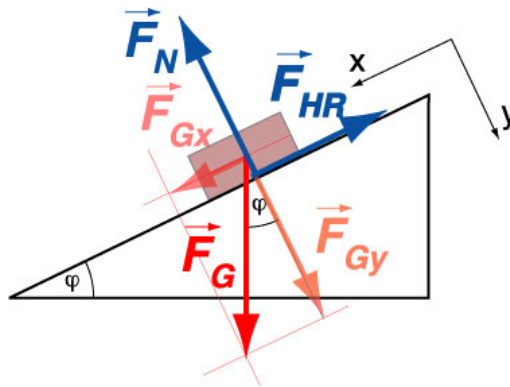
$$F_M = F_{Gx} + F_R = mg \sin \varphi - \mu mg \cos \varphi = mg(\sin \varphi - \mu \cos \varphi) = 1500 \cdot 9.81(\sin 2.86^\circ - 0.02 \cos 2.86^\circ) = 440.3 \text{ N}$$

Die Beschleunigung von 45 km/h auf 60 km/h in 10 s berechnet man mit:  $a = \dot{v} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{15}{3.6}}{10} = 0.417 \text{ m/s}^2$ . Diese Beschleunigung gibt die Geschwindigkeitsänderungsrate an. Für den Beschleunigungsvorgang gilt die Impulsstrombilanz:

$$m\dot{v} = F_{M_{beschl}} - F_{Gx} - F_R$$

$$F_{M_{beschl}} = m\dot{v} + F_{Gx} + F_R = m\dot{v} + mg \sin \varphi + \mu mg \cos \varphi = 1500 \cdot 0.417 + 1500 \cdot 9.81 \cdot (\sin 2.86^\circ + 0.02 \cos 2.86^\circ) = 1'653.6 \text{ N.}$$

- a) Der Impuls vor der Beschleunigungsphase ist  $p_1 = mv_1 = 1500 \cdot \frac{45}{3.6} = 18'750 \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$   
Nach der Beschleunigungsphase beträgt er  $p_2 = mv_2 = 1500 \cdot \frac{60}{3.6} = 25'000 \frac{\text{kg m}}{\text{s}}$
- b) Der Automotor muss Impuls aus der Erde fördern, da in  $x$ -Richtung  $\vec{F}_{Gx}$  und  $\vec{F}_R$  in negative Richtung zeigen und damit einen Impulsstrom aus dem heraus anzeigen. Der Automotor muss einen gleich grossen Impulsstrom aus der Erde fördern, damit der Impulsverlust ausgeglichen wird. Der Wert beträgt  $I_p = F_M = 440.3 \text{ N}$
- c) Während der Beschleunigungsphase muss der Automotor einen Impulsstrom fördern der gleich der Motorkraft  $F_{M_{beschl}}$  ist. Der Impulsstrom  $I_{p_{beschl}}$  beträgt 1'653.6 N.
- 4) Wenn mittels der Haftreibung das Fahrzeug beschleunigt werden soll, muss der Motor diese Kraft aufbringen. Die maximale Haftreibungskraft kann mit dem Haftreibungskoeffizienten berechnet werden. Dieser limitiert die Beschleunigung des Fahrzeugs. Zu beachten ist, dass auch die  $x$ -Komponente der Gewichtskraft kompensiert werden muss.
- a) Kräfte auf das Auto:



- b) Impulsstrombilanz in  $x$ -Richtung:  $m\dot{v} = F_{Gx} - F_{HR}$   
 $m\dot{v} = mg \sin \varphi - \mu_H mg \cos \varphi = mg(\sin \varphi - \mu_H \cos \varphi) = 1000 \cdot 9.81(\sin \varphi - 0.8 \cos \varphi)$   
 $\dot{v} = 9.81(\sin \varphi - 0.8 \cos \varphi)$
- c) Beim hier gewählten Koordinatensystem ( $x$ -Achse nach links unten) wird die Beschleunigung  $\dot{v}$  negativ sein. Bei einem Winkel  $\varphi = 0^\circ$  wird die Beschleunigung zu  $9.81 \cdot (-0.8) = -7.85 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Wird der Winkel vergrössert, nähert sich der Wert von  $\dot{v}$  Null an. Der Betrag der Beschleunigung wird kleiner. Wenn  $\dot{v}$  den Wert 0 erreicht hat, kann der Motor mittels der Haftreibung nur der Gewichtskomponente in  $x$ -Richtung entgegen halten, aber das Auto nicht mehr in Bewegung setzen. Bei weiterer Vergrösserung des Winkels würde das Auto abwärts rutschen, eventuell mit durchdrehenden Rädern. Diese Situation ist vielleicht vom Fahren auf Schnee und Eis bekannt (natürlich bei kleinerem  $\mu_H$  und kleinerem Neigungswinkel der Strasse).
- 5) Beim Stoss wird der Impuls des ersten Fahrzeugs entsprechend der Masse auf beide Fahrzeuge verteilt. Es gilt:  $m_1 v_1 + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2) v$   
 $v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1200 \cdot 10}{1200 + 800} = 6 \text{ m/s}$
- a) Wenn die Passagiere angegurtet sind, nehmen wir an, dass sie dieselbe Beschleunigung erfahren wie das Auto, in dem sie sitzen.  
Die Beschleunigung des ersten Autos ist:  $a_1 = \frac{v - v_1}{\Delta t} = \frac{6 - 10}{0.2} = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$   
Die Beschleunigung des zweiten Autos ist:  $a_2 = \frac{v - v_2}{\Delta t} = \frac{6 - 0}{0.2} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

b) Man kann die Rechnung mit vertauschten Massen durchführen. Dann ergibt sich:

$$m_2 v_1 + m_1 \cdot 0 = (m_1 + m_2)v$$

$$v = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{800 \cdot 10}{1200 + 800} = 4 \text{ m/s}$$

$$a_{2neu} = \frac{v - v_1}{\Delta t} = \frac{4 - 10}{0.2} = -30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{1neu} = \frac{v - v_1}{\Delta t} = \frac{4 - 0}{0.2} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Belastungen in beiden Fällen sind gleich. Das muss auch so sein, weil die Relativgeschwindigkeit in beiden Fällen gleich ist. Man könnte ja ein Koordinatensystem wählen, welches sich mit der Geschwindigkeit  $v_1$  gegenüber dem von uns gewählten bewegt.

6) Während der Fahrt des Culingsteins wirkt in horizontaler Richtung nur die Gleitreibung und lässt Impuls zur Erde abfließen. Es gilt:  $m\dot{v} = -F_R = -\mu mg$

$$\dot{v} = -\mu g = -0.01 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -0.0981 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Durch Integrieren erhält man die Geschwindigkeit und dann die Positionsgleichung:

$$v(t) = \int (-0.0981) dt = -0.0981t + v_0$$

$$x(t) = \int (-0.0981t + v_0) dt = -0.0981 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$$

Für  $t = 0$  s ist  $x(0 \text{ s}) = x_0 = 0$  m

Für  $t = 10$  s ist  $x(10 \text{ s}) = -0.0981 \frac{100}{2} + v_0 \cdot 10 + 0 = 10$  m

Daraus ergibt sich:  $v_0 = \frac{10 + 4.905}{10} = 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

## Kapitel 3 Translationsmechanik: Impuls und Energie

Wird ein Körper mit der Masse  $m$  beschleunigt, muss Impuls zugeführt oder abgeführt werden. Es fließt also Impulsstrom in den Körper hinein oder aus ihm heraus. Wir kennen dazu auch die Beziehung zwischen Impulsstrom und Kraft. Aus unserer Erfahrung wissen wir, dass in einem Körper, der sich bewegt, Energie gespeichert ist. Konkret merken wir dies, wenn wir einen Körper beschleunigen wollen. Da muss man Energie zu- oder abführen. In diesem Kapitel soll der Zusammenhang zwischen Impuls und Energie aufgearbeitet werden.

### 3.1 Prozessleistung und Energiestrom

Das Bild zeigt eine Lokomotive, die gerade mit der Geschwindigkeit  $v$  fährt und deren Maschine (z.B. Dampfmaschine, Elektromotor) dafür besorgt ist, dass die Lokomotive samt angehängten Wagons beschleunigt wird. Dazu wird Impuls aus der Erde gefördert, wobei die Maschine Energie vom Treibstoff (z.B. Dampfvolument oder elektrische Ladung) auf den Impuls umgeladen wird. Die *Energiebeladungsrate* nennt man *Prozessleistung*  $P$ . Sie wird in J/s (= W) gemessen und gibt an, wieviel Energie pro Sekunde an den Impuls gebunden wird. Die Prozessleistung ist also eine Kennzahl der Maschine. Sie drückt aus, welches Umladevermögen diese Maschine hat und sagt nichts über die gesamte Energiemenge aus, die umgeladen wird. Die umgeladene Energiemenge kann man natürlich mit Hilfe der Prozessleistung und der Umladezeit berechnen. Bei *konstanter* Prozessleistung gilt:

$$\Delta W = P \cdot \Delta t$$

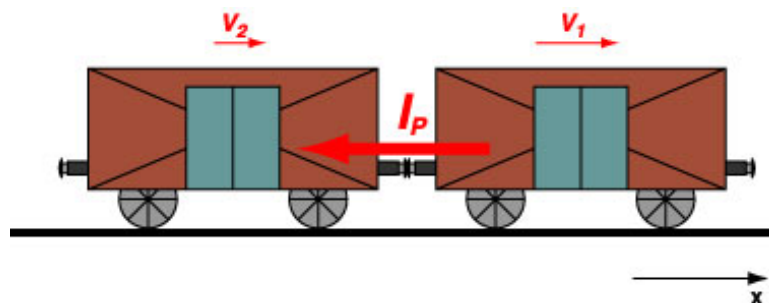
Ist die Prozessleistung *zeitabhängig*, muss man für die Berechnung der umgeladenen Energie das Integral benutzen. Es gilt:

$$\Delta W = \int_{t=t_1}^{t_2} P(t) dt$$

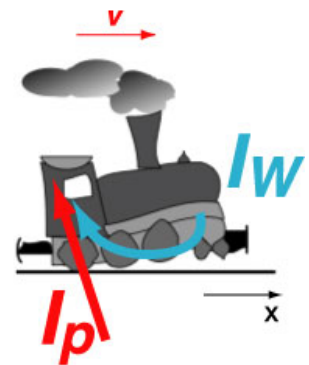
Energie wird also an den Impuls gebunden und fließt mit ihm weiter. Wieviel Energie der Impulsstrom binden kann, hängt vom Potential ab, das hier gleich der Geschwindigkeit des Körpers ist. Je grösser das Potential, also die Geschwindigkeit, umso grösser ist der an den Impulsstrom  $I_p$  gebundene Energiestrom  $I_W$ . Es gilt:

$$I_W = v \cdot I_p$$

Im folgenden Beispiel sind zwei Eisenbahnwagen miteinander gekuppelt. Der vordere hat gerade eine etwas grössere Geschwindigkeit als der hintere. Zwischen den Wagen steht damit die Kupplung unter einer Zugbelastung und es fließt ein Impulsstrom  $I_p$  in negative Richtung. Die dazugehörigen Kräfte sind hier nicht eingezeichnet, sie sind aber dem Betrag nach gleich wie der Impulsstrom. Der Impulsstrom besagt zunächst, dass Impuls übertragen wird, und zwar so lange, bis sich die Geschwindigkeiten der beiden Wagons ausgeglichen haben. Da die Massen ja unverändert bleiben, wird der zweite Wagen seine Geschwindigkeit vergrössern und der erste wird sie verkleinern, sofern er nicht einen Impulszufluss von anderer Seite erfährt. (Weitere Impulsströme wie z.B. durch Reibung werden jetzt nicht beachtet.)



Der Impuls ist aber auch Träger von Energie. Somit wird durch den Impulsstrom auch Energie vom ersten zum zweiten Wagen übertragen. Der Energiestrom  $I_W$  ist gleich dem Produkt  $vI_p$ , wobei  $v$  die Geschwindigkeit der Kontaktstelle zwischen dem 1. und dem 2. Wagen ist (hier die Oberfläche der Puffer).



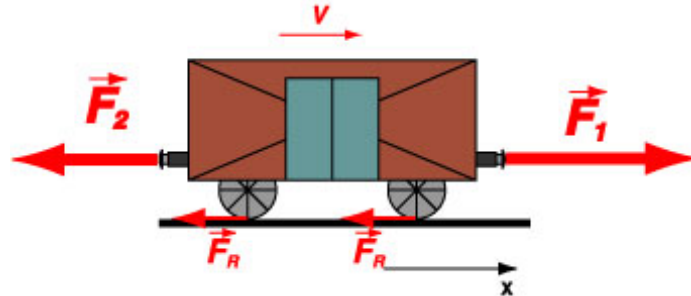
Der Energietransfer vom 1. zum 2. Wagen hängt von der Potentialdifferenz (also der Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta v$ ) und der Grösse des Impulsstromes  $I_p$  ab. Er ist also gleich dem Produkt dieser beiden Grössen und gibt die Prozessleistung an, welche das Umladen der Energie vom Impuls des 1. Wagens auf den Impuls des 2. Wagens beschreibt. Es gilt:

$$P = \Delta v \cdot I_p$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta v$  wird dabei so gebildet, dass die Prozessleistung positiv ist, wenn der Impulsstrom Energie freisetzt. Die Geschwindigkeit am Stromausgang wird deshalb immer von der Geschwindigkeit am Stromeingang abgezogen. Im oben beschriebenen Fall ist der Impulsstrom negativ. Die Geschwindigkeitsdifferenz wird gebildet als  $\Delta v = v_2 - v_1$ . Dieser Wert ist hier ebenfalls negativ. Somit ist die Prozessleistung positiv.

### 3.2 Die Leistung einer Kraft

Das Bild zeigt einen Eisenbahnwagen, der in einem fahrenden Zug eingekuppelt ist. Offenbar fliesst von der positiven Seite her ein Impulsstrom zu, da die Kraft  $\vec{F}_1$  in positive Richtung zeigt. Auf der anderen Seite fliesst ein etwas kleinerer Impulsstrom ab, die Kraft  $\vec{F}_2$  zeigt in negative Richtung. Beide Enden des Wagens stehen unter einer Zugspannung. Dann fliesst noch Impulsstrom über die Räder wegen der Reibung ab. Die am Zug angreifenden Reibungskräfte sind mit  $\vec{F}_R$  eingezeichnet.



Wir bilden nun die Impulsstrombilanz.

$$\dot{p} = m\dot{v} = I_{p1} + I_{p2} + 2I_{pR}$$

Zufließende Impulsströme werden positiv, abfließende negativ gemessen. Und mit den Kräften geschrieben ergibt sich:

$$m\dot{v} = F_1 - F_2 - 2F_R = F_{res}$$

Nun wird mit der Geschwindigkeit des Wagens  $v$  multipliziert.

$$m\dot{v} \cdot v = F_1 v - F_2 v - 2F_R v = F_{res} v$$

Die rechte Seite gibt die Leistung der Kräfte an. Ein positiver Wert bedeutet, dass die Energie ins System (das ist hier der Wagen) zufließt, ein negativer, dass sie aus dem System abfließt. Bei konstantem  $v$  wird  $\dot{v} = 0$  und damit auch die linke Seite gleich Null. Die rechte Seite muss dann auch Null ergeben, was bedeutet, dass die Kräfte ein Gleichgewicht bilden.

### 3.3 Die kinetische Energie

In den vorherigen Abschnitten haben wir den Energiestrom  $I_W$  kennen gelernt, der an den Impulsstrom gebunden ist. So wird z.B. beim Beschleunigen eines Wagens Impuls und Energie in den Wagen gefördert, die dann auch im Wagen verbleiben. Ein sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegendes Körper mit der Masse  $m$  ist also ein Impuls- und Energiespeicher. Der gespeicherte Impuls ist gleich  $p = mv$ , die im bewegten Körper gespeicherte Energie müssen wir noch ermitteln.

Wir wissen, dass die Impulsstrombilanz  $\dot{p} = \sum_i I_{p_i} = \sum_i F_i = F_{res}$  ergibt.

Multipliziert man die Gleichung mit  $v$ , ergibt sich eine Leistungsgrösse:  $v\dot{p} = v \cdot F_{res}$ . Diese Grösse muss man nach  $t$  integrieren, um die ausgetauschte Energie zu erhalten.

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} v \cdot \dot{p} dt.$$

Für konstante Masse  $m$  erhält man:  $\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} v \frac{m \cdot dv}{dt} dt = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = m \frac{v_2^2}{2} - m \frac{v_1^2}{2}$ .

Für  $v_1 = 0$  und  $v_2 = v$  erhält man die bekannte Formel für die kinetische Energie einer mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten Masse  $m$ :

$$W_{kin} = \frac{mv^2}{2}$$

Das  $\Delta W = m\frac{v_2^2}{2} - m\frac{v_1^2}{2}$  gibt die Energie an, welche ausgetauscht wird, wenn die Masse  $m$  ihre Geschwindigkeit von  $v_1$  auf  $v_2$  ändert.

### 3.4 Die Energie im Gravitationsfeld

Wird im Gravitationsfeld ein Körper mit der Masse  $m$  von einem Gravitationsniveau  $gh_1$  auf ein Niveau  $gh_2$  befördert, muss Energie ausgetauscht werden. So wird z.B. beim Heben vom tieferen auf das höhere Niveau Energie von der Antriebsmaschine (z.B. Elektromotor einer Hebeanlage, Energie aus dem menschlichen Körper bei einem Seilzug) an die Masse gebunden. Wie bei dynamischen Prozessen gilt auch hier, dass der Energiestrom  $I_W$  proportional zum Massenstrom  $I_m$  ist. Es gilt:

$$I_W = gh \cdot I_m$$

Die Prozessleistung ist:

$$P_{grav} = \Delta(gh) \cdot I_m$$

$gh$  ist das Gravitationspotential. Es hängt, wie die Grösse zeigt, von der Gravitationsfeldstärke  $g$  und der geometrischen Höhe  $h$  ab. Der Wert von  $g$  wiederum kann von  $h$  abhängig sein. Dann wird die Energieberechnung komplizierter.

#### Gravitationsenergie in der Nähe der Erdoberfläche

In der Nähe der Erdoberfläche kann man vereinfachend annehmen, dass sich die Gravitationsfeldstärke  $g$  nicht verändert. Sie hat hier den Wert von  $9.81 \frac{m}{s^2} \approx 10 \frac{m}{s^2}$ .

Die beim Heben eines Körpers umgesetzte Energie wird in der Masse gespeichert. Es gilt:

$$\Delta W = g \cdot \Delta h \cdot I_m \cdot \Delta t = g \cdot \Delta h \cdot m \quad (\text{wenn die Masse } m \text{ beim Heben nicht verändert wird})$$

Die in der Masse  $m$  gespeicherte Energie ist dann:

$$W_{grav} = mgh,$$

wobei sich  $h$  auf das Nullniveau der Höhe bezieht.

#### Gravitationsenergie allgemein

Ändert sich die Gravitationsfeldstärke  $g$  mit der Höhe, muss man die ausgetauschte Energie mit dem Integral berechnen. Für einen Körper mit der Masse  $m$ , der von der Höhe  $h_1$  auf die Höhe  $h_2$  versetzt wird, kann man berechnen:

$$\Delta W = \int_{h_1}^{h_2} m \cdot g(h) dh$$

nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz ist:

$$F_{grav} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = \gamma \frac{m \cdot m_E}{(R+h)^2} = m \cdot g(h)$$

Dabei ist  $r$  der Abstand zwischen den Schwerpunkten der Massen und  $\gamma$  die Gravitationskonstante.  $R$  ist der Erdradius und  $h$  die Höhe über der Erdoberfläche.  $m$  ist die Masse des Körpers in der Höhe  $h$ . Hier wird auf die Berechnung der ausgetauschten Energie im allgemeinen Fall verzichtet. Das Integral zeigt aber, dass die ausgetauschte Energie eigentlich als Fläche in einem Kraft-Weg-Diagramm berechnet werden kann.  $m \cdot g(h)$  ist ja das Gewicht der Masse  $m$  in der Höhe  $h$ .

### 3.5 Federgesetz und Federenergie

Wird eine an einem Ende eingespannte Feder am anderen Ende weggezogen, steigt der durch die Feder fließende Impulsstrom linear mit der Federverlängerung  $s$ . Es gilt daher:

$$F_F = D \cdot s$$

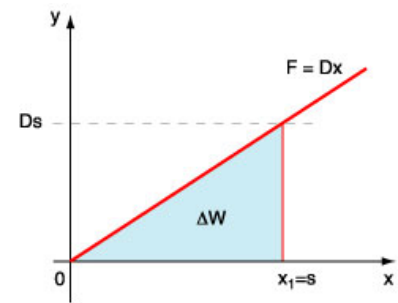
Der Proportionalitätsfaktor  $D$  heisst Federkonstante. Diese lineare Beziehung gilt allerdings nicht grenzenlos. Der Linearitätsbereich ist also begrenzt.

Wie oben gezeigt, kann die ausgetauschte Energie, die dann in der Feder gespeichert ist, als Fläche in einem Kraft-Weg-Diagramm berechnet werden. Das Federgesetz bietet so ein Kraft-Weg-Diagramm an.

$$\Delta W = \frac{1}{2} D s \cdot s = \frac{1}{2} D s^2$$

$s$  ist die Federverlängerung von der unbelasteten Lage aus gemessen. Wenn eine Feder bereits vorgespannt ist, kann man die Energiedifferenz berechnen, die man zuführen muss, um den zweiten Zustand zu erreichen. Es gilt:

$$\Delta W = \frac{1}{2} D (s_2 - s_1)^2$$



### 3.6 Aufgaben

- 1) Ein Auto ( $m_1 = 1200 \text{ kg}$ ) stösst mit der Geschwindigkeit  $v_1 = 10 \text{ m/s}$  auf ein zweites ( $m_2 = 800 \text{ kg}$ ), welches vor dem Zusammenstoss in Ruhe ist. was geschieht mit der Energie des ersten Autos beim Stoss und wieviel Energie wird vom ersten Auto auf das zweite übertragen?
- 2) Ein Eisenbahnzug, bestehend aus einer Lokomotive ( $m_L = 50 \text{ t}$ ) und 10 Wagons (Masse je  $m_W = 15 \text{ t}$ ) wird auf horizontaler Strecke aus dem Stand gleichmässig beschleunigt, und zwar in 40 s auf 20 m/s. Für die Rollreibung ist der Reibungskoeffizient mit  $\mu_R = 0.001$  gegeben.
  - a) Für welche Leistung muss die Lokomotive ausgelegt sein, damit dieser Beschleunigungsvorgang gelingen kann?
  - b) Stellen Sie in einem Diagramm den zeitlichen Verlauf des Energiestromes dar, der bei diesem Beschleunigungsvorgang vom Motor an den von der Erde in die Lok geförderten Impulsstrom gebunden wird.
  - c) Berechnen Sie mit Hilfe des Energiestrom-Zeit-Diagramms die gesamte umgesetzte Energie bei diesem Beschleunigungsprozess.
- 3) Aus einem Staubecken fliesst durch eine Druckleitung Wasser über eine Höhendifferenz von 200 m auf eine Turbine. Der Massenstrom ist dabei konstant mit  $I_m = 100 \text{ kg/s}$  gegeben.
  - a) Welche Prozessleistung ergibt sich dabei an der Turbine, wenn Verluste durch Reibung im Druckrohr nicht berücksichtigt werden?
  - b) Welche Energie wird dabei an der Turbine in 10 s umgesetzt?
- 4) Von einem Kran fällt durch einen unglücklichen Umstand die Last (Betonquader mit einer Masse von  $m_L = 200 \text{ kg}$ ) aus einer Höhe von 12 m auf den Erdboden und verursacht dort einen Eindruck von 5 cm Tiefe. Der Körper bleibt sofort dort liegen. Die Bremsphase dauerte dabei 0.2 s. Wie gross ist der beim Abbremsen in die Erde fliessende, als konstant angenommene Impulsstrom? Was geschieht mit der Energie beim Aufprall? Wieviel Energie wird umgeladen und auf welchen Träger?
- 5) In der vorherigen Aufgabe fällt ein Körper auf den Boden und bleibt liegen. Oft ist bei solchen Fällen eine gewisse Elastizität bei den beteiligten Körpern zu beobachten. Wir nehmen deshalb an, dass beim Aufprall 80% der Energie sofort an die Wärme gebunden wird. Die restlichen 20% bewirken ein Hochschnellen des Körpers. Wie hoch wird der Körper fliegen, wenn man annimmt, dass die Erde keine Bewegung macht (sehr grosse Masse)? Es wird auch angenommen, dass das elastische Verhalten wie bei einer normalen Feder ist.
- 6) Eine vertikal aufgestellte, normale Druckfeder ( $D = 0.02 \text{ N/m}$ ) wird um um 2 cm zusammengedrückt. In dieser Position wird eine kleine Metallkugel ( $m = 0.05 \text{ kg}$ ) auf die Feder gelegt, die dann losgelassen wird. Wie hoch wird die Metallkugel geschleudert, wenn man Reibung und Luftwiderstand nicht berücksichtigt?

### 3.7 Lösungen

- 1) Die im fahrenden ersten Auto steckende Energie wird zu einem Teil an das zweite Auto abgegeben als kinetische Energie. Der Rest wird an die bei der Verformung der Autos entstehende Wärme gebunden.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v$$

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1200 \cdot 10}{1200 + 800} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

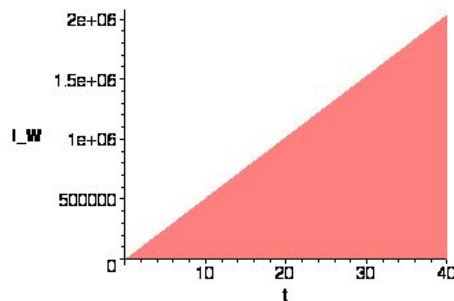
$$W_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200 \cdot 10^2 = 60 \text{ kJ}$$

$$W_{1\text{nachher}} = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1200 \cdot 6^2 = 21.6 \text{ kJ}$$

$$W_{2\text{nachher}} = \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 6^2 = 14.4 \text{ kJ}$$

Zusammen gibt dies nachher 36 kJ. Die Differenz auf 60 kJ ist 24 kJ. sie wird an die Wärme gebunden.

- 2) a)  $\dot{v} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20}{40} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$   
 $v = \int dot{v} dt = \int 0.5 dt = 0.5t + v_0 = 0.5t \quad (v_0 = 0 \text{ m/s})$   
 $I_{pReib} = \mu_R m g = 0.001 \cdot 200'000 \cdot 9.81 = 1.960 \text{ kN}$   
 Impulsstrombilanz:  $m\dot{v} = I_{pLok} - I_{pReib}$   
 $I_{pLok} = m\dot{v} + I_{pReib} = 200'000 \cdot 0.5 + 1960 = 102 \text{ kN}$   
 $P_{Lok} = \Delta v \cdot I_{pLok} = 20 \cdot 102'000 = 2.04 \text{ MW}$
- b) Der Energiestrom wird berechnet mit:  $I_W = v \cdot I_p$



- c) Die rot eingefärbte Fläche im Diagramm gibt die ausgetauschte Energie  $\Delta W$  an. Es ist:  $\Delta W = \frac{1}{2} \cdot 2.04 \cdot 10^6 \cdot 40 = 40.80 \text{ MJ}$
- 3) a)  $P_{grav} = g \Delta h I_m = 9.81 \cdot 200 \cdot 100 = 196'200 \text{ W}$   
 b)  $\Delta W = P_{grav} \Delta t = 196'000 \cdot 10 = 1'960'000 \text{ J} = 1.96 \text{ kJ}$
- 4) Das Abbremsen geschieht gemäss Angaben auf einer Strecke von 0.05 m in 0,2 s. Die Bremsbeschleunigung ist dann:  $a_{bremsen} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ . Zuvor wurde der Körper auf einer Strecke von 12 m durch die Gravitation beschleunigt. Die Geschwindigkeit beim Auftreffen auf dem Boden berechnet man schnell über die Energie. Es gilt:  
 $W_{oben} = W_{unten}$   
 $mgh = \frac{1}{2} m v^2$   
 $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 12} = 15.3 \text{ m/s}$   
 Weil vorgegeben ist, dass der Impulsstrom beim Bremsen konstant sein soll (konstante Bremskraft), ist die Beschleunigung konstant. Gegeben ist die Bremsstrecke, die Anfangsgeschwindigkeit und die Bremszeit. Aus der Kinematik kann man sich folgender Formeln bedienen:  
 $y = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 t + y_0$   
 $v = at + v_0$   
 Konkret erhält man das Gleichungssystem:  
 $-0.05 = -\frac{g}{2} t^2 + 15.3t + 0$   
 $0 = at + 15.3$   
 Die Lösungen sind:  $t = 1.56 \text{ s}$ ,  $a = -9.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$   
 Und der konstante, ausfliessende Impulsstrom (Bremskraft) = 1960 N.  
 Die gesamte Energie ist nach dem Aufprall an die bei der Verformung erzeugte Wärme gebunden. Der Betrag der umgeladenen Energie ist:  $\Delta W = mgh_2 = 200 \cdot 9.81 \cdot 12.05 = 23'600 \text{ J}$   
 Man kann sich überlegen, ob die Vorgabe, der beim Abbremsen auftretende Impulsstrom soll konstant



sein, der Wirklichkeit entspricht. So könnte es ja auch sein, dass anfangs mehr Impuls abgegeben wird als gegen Ende der Bremsphase. Das müsste man auch in Experimenten überprüfen.

- 5) In der vorhergehenden Aufgabe beträgt die umgeladene Energie  $\Delta W = 23'600$  J. Nun wird mit 20% davon der Körper wieder angehoben. Wir gehen davon aus, dass der Körper senkrecht in die Höhe fliegt und im höchsten Punkt dann die Geschwindigkeit 0 hat. Dann gilt:

$$\Delta W_2 = mg\Delta h$$

$$\Delta h = \frac{\Delta W_2}{mg} = \frac{0.20 \cdot 23'600}{200 \cdot 9.81} = 2.41 \text{ m}$$

- 6) Diese Aufgabe kann man am schnellsten über die Energie lösen: Summe aller Energiewerte vorher = Summe aller Energiewerte nachher.

$$\text{vorher: } W_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 + \frac{1}{2}Ds_1^2 = 0 + 0.05 \cdot 9.81 \cdot (-0.02)^2 + \frac{1}{2} \cdot 0.02 \cdot 0.02^2 = 2.002 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

$$\text{nachher: } W_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 + \frac{1}{2}Ds_2^2 = 0 + 0.05 \cdot 9.81 \cdot h_2 + 0 = 0.05 \cdot 9.81 \cdot h_2$$

$$W_2 = W_1$$

$$0.05 \cdot 9.81 \cdot h_2 = 2.002 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

$$h_2 = 4.1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Die Kugel wird ganz wenig über die Nulllage angehoben.

## Kapitel 4 Translationsmechanik: Gleichförmige Kreisbewegung

Die gleichförmige Kreisbewegung wird meist mit der Tangentialgeschwindigkeit eines Massenpunktes beschrieben. Deshalb ordnen wir diese Bewegung bei der Translation ein, auch wenn schliesslich eine Kreisbahn durchlaufen wird. Im nächsten Kapitel wird dann die Rotationsbewegung allgemein aufgearbeitet.

Am Beispiel der Kreisbewegung wird hier auch das Problem der Scheinkräfte diskutiert. Wie steht es mit der *Zentripetal-* und der *Zentrifugalkraft*? Unsere Erfahrung mit diesen Kräften ist oft widersprüchlich zu den Gegebenheiten der Physik.

### 4.1 Die gleichförmige Kreisbewegung

Unter einer gleichförmigen Kreisbewegung versteht man die Bewegung eines Massenpunktes  $m$  auf einer Kreisbahn mit *konstanter Bahngeschwindigkeit*  $v$ .

Bei der Kreisbewegung macht es allerdings Sinn, diese Bewegung mit Radius  $r$  des Kreises und dem Winkel  $\varphi$  des Radiusvektors  $\vec{r}$  mit der  $x$ -Achse zu beschreiben. Es gilt:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

und umgekehrt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Die Zeit für eine Umdrehung nennt man *Periodenlänge*  $T$ . Damit kann man auch die *Frequenz*  $f$ , die Anzahl Umdrehungen pro Sekunde berechnen. Es gilt:  $f = \frac{1}{T}$ .

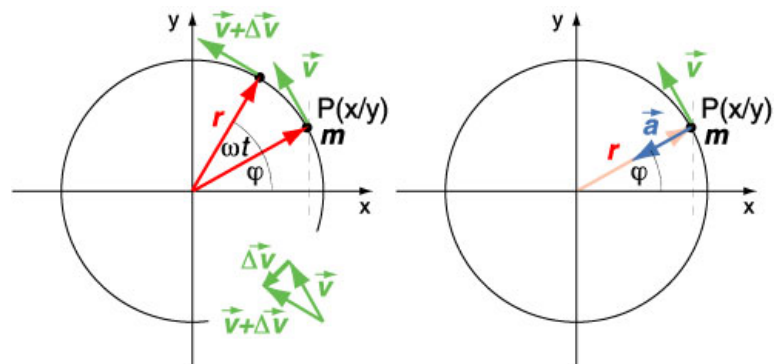
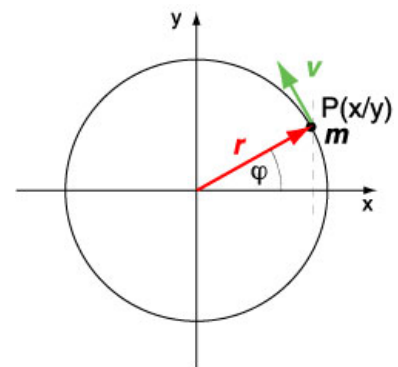
Neu wird die *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega$  eingeführt. Sie gibt die Änderungsrate des Winkels an, der durch den Radiusvektor überstrichen wird. Es ist also  $\omega = \dot{\varphi}$ . Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit kann man mit folgender Gleichung rechnen:  $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ .

Wenn  $\Delta t = T$  ist, ist  $\Delta\varphi = 2\pi$ . Daraus folgt:  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ .

Wir suchen nun den Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und Bahngeschwindigkeit  $v$ . Da in der Physik der Winkel grundsätzlich im Bogenmass gemessen wird, gibt also  $\varphi$  die Länge des Bogens im Einheitskreis an. Bei einer Streckung mit dem Radius  $r$  erhält man den Bogen im Kreis mit dem Radius  $r$ , sie beträgt  $r \cdot \varphi$  bzw. bei einem Winkel von  $\Delta\varphi$  den Wert  $r \cdot \Delta\varphi$ . Der Quotient aus Bogenlänge durch Zeit ist die Bahngeschwindigkeit  $v$ :

$$v = \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r\omega$$

Zu beachten ist, dass sich bei einer Kreisbewegung die Richtung des Bahngeschwindigkeitsvektors immer ändert, also auch dann, wenn sein Betrag gleich bleibt. Die Kreisbewegung ist deshalb immer eine beschleunigte Bewegung, da der Geschwindigkeitsvektor nicht konstant sein kann. Bei einer differentiell kleinen Änderung des Winkels um den Wert  $d\varphi$  steht der Vektor  $d\vec{v}$  senkrecht auf  $\vec{v}$ . Die Beschleunigung ist gleich dem Vektor  $\vec{v} = \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{\Delta t}$ . Er steht also senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  und zeigt somit vom Punkt  $P$  aus zum Kreismittelpunkt. Deshalb nennt man diese Beschleunigung auch *Radial-* oder *Zentralbeschleunigung*. Um diese Beschleunigung zu berechnen, ist es am einfachsten, die Kreisbewegung durch den Radiusvektor als Funktion der Zeit darzustellen. Die erste Ableitung gibt die Geschwindigkeit, die zweite Ableitung die Beschleunigung. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  s soll der Radiusvektor auf den Punkt  $P$  zeigen,



der Anfangswinkel ist also  $\varphi$ . Wenn die Zeit läuft, wird der Winkel dann um den Wert  $\omega t$  vergrößert. Der Winkelwert zum Zeitpunkt  $t$  ist somit gleich  $\omega t + \varphi$ .

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t + \varphi) \\ r \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t + \varphi) \\ r\omega \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

Die Beträge der Vektoren geben den Wert der Bahngeschwindigkeit und den Wert der Zentralbeschleunigung an. Es gilt:

$$v = \sqrt{(-r\omega \sin(\omega t + \varphi))^2 + (r\omega \cos(\omega t + \varphi))^2} = r\omega$$

$$a = \sqrt{(-r\omega^2 \cos(\omega t + \varphi))^2 + (r\omega^2 \sin(\omega t + \varphi))^2} = r\omega^2$$

Mit der Gleichung für  $v$  kann  $a$  mittels  $v$  und  $r$  dargestellt werden:  $a = \frac{r^2\omega^2}{r} = \frac{v^2}{r}$ .

## 4.2 Die Zentripetalkraft

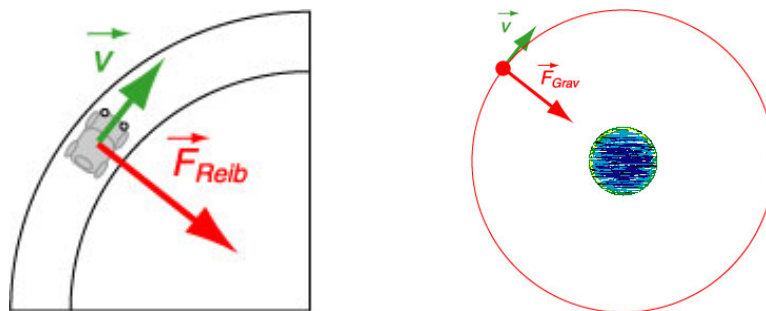
Die Beschleunigung  $\vec{a}$ , welche der Massenpunkt  $m$  erfährt, ruft nach einer Kraft. Wir nennen sie *Zentripetalkraft*  $\vec{F}_R$ . Sie zeigt vom Punkt  $P$  gegen den Kreismittelpunkt.

$$\vec{F}_R = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} ma_x \\ ma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mr\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ -mr\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

Der Betrag der Zentripetalkraft ist:

$$F_R = ma = mr\omega^2 = \frac{mv^2}{r}$$

Damit sich die Masse  $m$  auf der Kreisbahn bewegt, muss also eine Kraft wirken. Diese Kraft muss aus irgend einem gegebenen Anlass zustande kommen oder auf Grund eines Naturgesetzes vorhanden sein. Bei der Kurvenfahrt eines Autos ist es die Reibung, die in die Rolle der Zentripetalkraft schlüpft, wenn ein Satellit die Erde umkreist, ist es die Gravitationskraft (also die Gewichtskraft), die als Zentripetalkraft wirkt.



Die Zentripetalkraft ist also nicht eine neue Kraft, die neben den sonst zu beobachtenden Kräften auftritt. Sie wird vielmehr als Resultierende der vorhandenen Kräfte gebildet.

### 4.3 Scheinkräfte

Bei der Kreisbewegung wird häufig von der *Zentrifugalkraft* gesprochen. Diese Kraft wird vom Beobachter so wahrgenommen, dass er den Eindruck hat, dass die Zentrifugalkraft einen Körper aus der Kreisbahn hinaus zieht. Dieser Eindruck ist aber nur richtig, wenn man das rotierende System als Bezugssystem nimmt. Allerdings ist das rotierende System ein beschleunigtes Bezugssystem und somit kein Inertialsystem. Deshalb wird die Beschreibung von Bewegungsvorgängen aus dem rotierenden Bezugssystem heraus sehr schwierig. Bei physikalischen Analysen und Berechnungen ist deshalb empfehlenswert, sich auf ein unbeschleunigtes Bezugssystem zu stützen. Das ist z.B. das übliche Laborsystem, die als ruhend gedachte Erde. In diesem unbeschleunigten Bezugssystem existiert aber die Zentrifugalkraft nicht. Sie wird daher oft auch als *Scheinkraft* bezeichnet. Die Zentripetalkraft als Resultierende von realen Kräften ist aber jene Kraft, welche die Masse auf die Kreisbahn zwingt. Es braucht diesen Zwang, damit eine Masse nicht in ihrer sonst geradlinigen Bewegung nach dem *Trägheitssatz* verharret.

Eine andere Scheinkraft ist die *Corioliskraft*. Sie scheint zu wirken, wenn z.B. eine Kugel auf einer rotierenden Scheibe vom Zentrum nach aussen abgestossen wird. Dann bewegt sie sich entsprechend dem Trägheitsgesetz nicht auf dem anvisierten Radius sondern bleibt hinter dieser Linie zurück und beschreibt einen Kurvenbogen. Auf der Erde sind Phänomene zu beobachten, die der Corioliskraft zugeschrieben werden. Es sind dies z.B. die Wirbeldrehung bei einer Tiefdruck- oder einer Hochdruckzone und die Ablenkung der Passatwinde gegen Osten.

### 4.4 Beispiele

#### 4.4.1 Masse der Sonne

Die Erde bewegt sich um die Sonne auf einer Ellipsenbahn mit sehr geringer Exzentrizität. Wir nähern diese Bahn hier durch eine Kreisbahn an. Damit können wir die Sonnenmasse bestimmen, wenn die Erdmasse und der Erdbahnradius bekannt sind.

Auf die Erde wirkt die Gravitationskraft nach Newton. Sie ist:  $F_G = G \frac{m_{Erde} m_{Sonne}}{r^2}$

$G$  ist die Gravitationskonstante, sie hat den Wert:  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ .

Da keine weiteren Kräfte auf die Erde wirken (wir vernachlässigen Wirkungen von Mond und anderen Gestirnen, weil sie gegenüber der Kraft durch die Sonne sehr klein sind), übernimmt diese Kraft die Rolle der Zentripetalkraft. Es gilt:

$$F_R = m_{Erde} r \omega^2 = G \frac{m_{Erde} m_{Sonne}}{r^2}$$

Auf  $m_{Sonne}$  gelöst erhält man:

$$m_{Sonne} = \frac{r^3 \omega^2}{G} = \frac{r^3 \cdot 4\pi^2}{G \cdot T^2}$$

$T$  ist die Umlaufzeit der Erde um die Sonne und ist  $T = 365.256 \text{ Tage} = 31'558'120 \text{ s}$ .

Der mittlere Erdbahnradius beträgt:  $r = 149.6 \cdot 10^9 \text{ m}$ , die Erdmasse ist  $m_{Erde} = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$$m_{Sonne} = \frac{r^3 \cdot 4\pi^2}{G \cdot T^2} = \frac{(149.6 \cdot 10^9)^3 \cdot 4\pi^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 31'558'120^2} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

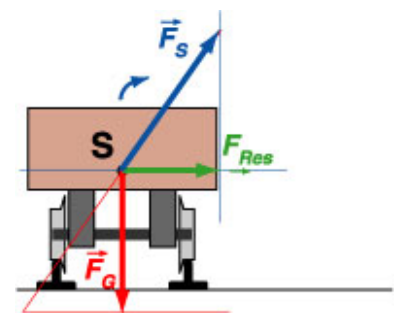
#### 4.4.2 Kurvenfahrt eines Schienenfahrzeugs

Ein Schienenfahrzeug ( $m = 20 \text{ Tonnen}$ ) mit der Spurweite von  $s = 1 \text{ m}$  fährt durch eine nicht überhöhte Kurve mit dem inneren Radius  $r_1 = 300 \text{ m}$ . Der Schwerpunkt liegt  $1 \text{ m}$  über der Schienenoberkante in der Mitte des Fahrzeugs. Mit welcher Maximalgeschwindigkeit kann das Schienenfahrzeug die Kurve gerade noch durchfahren?

Welche Kräfte wirken während der Fahrt auf das Fahrzeug? Es sind dies vertikal die Gewichtskraft  $\vec{F}_G$ , und die Kräfte durch die Schienen. Im Grenzfall, in dem das Fahrzeug gerade noch nicht kippt, ist die Kraft durch die innere Schiene  $0 \text{ N}$ . Es wirkt dann nur mehr die Kraft durch die äussere Schiene  $\vec{F}_S$ . Diese Schienenkraft muss mit ihrer vertikalen Komponente die Gewichtskraft kompensieren. Die horizontale Komponente bleibt als Resultierende aller Kräfte übrig und spielt hier die Rolle der Zentripetalkraft.

Aus den geometrischen Daten kann man nun den Winkel zwischen  $\vec{F}_S$  und  $\vec{F}_{Res}$  berechnen. Es gilt:

$$\tan \alpha = \frac{0.5 \text{ m}}{1 \text{ m}}$$



$$\alpha = 26.6^\circ$$

Ferner ist:

$$\tan \alpha = \frac{F_{Res}}{F_G}$$

Somit kann man  $F_{Res}$  berechnen:  $\frac{F_{Res}}{F_G} = \frac{0.5\text{m}}{1\text{m}}$

$$F_{Res} = \frac{0.5\text{m}}{1\text{m}} \cdot F_G = \frac{0.5\text{m}}{1\text{m}} \cdot 20'000 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 98'100 \text{ N}$$

Mit der Formel für die Zentripetalkraft ergibt sich:

$$F_R = \frac{mv^2}{r} = \frac{0.5\text{m}}{1\text{m}} \cdot mg$$

$$v = \sqrt{\frac{0.5\text{m}}{1\text{m}} \cdot g \cdot r} = \sqrt{\frac{0.5\text{m}}{1\text{m}} \cdot g \cdot 300 \text{ m}} = 38.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 138 \text{ km/h}$$

Die Rechnung zeigt auch, dass die Geschwindigkeit nicht von der Masse des Fahrzeugs abhängig ist..

## Kapitel 5 Rotationsmechanik: Drehimpuls und Drehmoment

Die Rotationsmechanik ist speziell das Gebiet der rotierenden, ausgedehnten Körper. War bisher in der Regel der Massenpunkt Gegenstand der Untersuchung und wurde seine Bahn unter den verschiedenen Einflüssen beschrieben, soll nun der *starre Körper* im Zentrum der Beobachtung stehen. Vielfach kann man natürlich für die Bewegung von starren Körpern auch auf die Translationsmechanik des Massenpunktes zurückgreifen. So ist es durchaus angebracht, die reguläre Bewegung eines Autos so zu beschreiben. Wenn es aber z.B. zu Schleuderbewegungen oder zum Überschlag kommt, handelt es sich um eine Rotation eines ausgedehnten Körpers um eine Achse.

Wir werden nun versuchen, die Rotationsmechanik in Analogie zur Translationsmechanik aufzubauen. Das ergibt den Vorteil, dass die Begriffe meist ähnlich sind und parallele Zusammenhänge beobachtet werden können. So kann dann der Formelsatz für die Beschreibung dieses Gebietes nach denselben Grundsätzen wie bei der Translation aufgebaut werden.

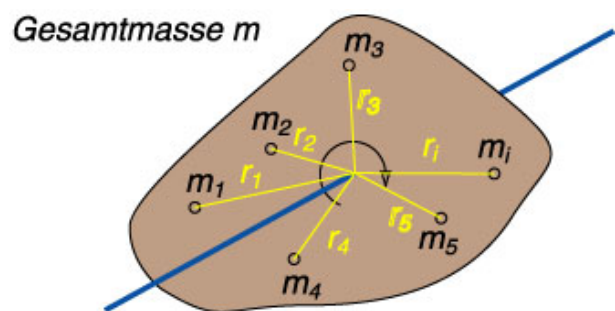
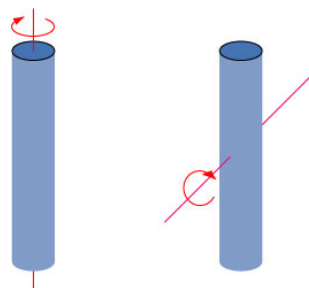
### 5.1 Der Massenpunkt und der starre Körper

Die Zeichnung zeigt einen starren Körper mit der Gesamtmasse  $m$  und auf diesem Körper mehrere Massenpunkte ( $m_1, m_2, \dots, m_i$ ), die alle um eine Drehachse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotieren. Bestimmen wir für verschiedene Massenpunkte die Rotationsenergie, werden wir auch bei gleicher Grösse von  $m_i$  wegen der unterschiedlichen Radien, verschiedene Resultate erhalten. Für einen Massenpunkt gilt wie in der Translationsmechanik  $W = \frac{1}{2}mv^2$ . Mit  $v = r\omega$  erhält man:  $W = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$

Möchte man die Rotationsenergie des starren Körpers berechnen, müsste man über alle Massenpunkte summieren, z.B. mit dem Integral. Solche Rechnungen kann man zwar bei vielen geometrischen Körpern mit mehr oder weniger Aufwand durchführen, bei unregelmässigen Körpern, deren Gestalt sich nicht mit mathematischen Funktionen gut erfassen lässt, ist dies aber kein tauglicher Weg. Deshalb führen wir eine Grösse ein, die wir *Trägheitsmoment*  $J$  nennen, und die bei der Rotation den Widerstand gegenüber einer Winkelbeschleunigung angibt, so wie die Masse eines Körpers bei der Translation den Widerstand gegenüber einer Beschleunigung darstellt. Mit dem Trägheitsmoment  $J$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  sollte man dann die Rotationsenergie  $W_{rot}$  berechnen können, wie bei der Translation die kinetische Energie aus Masse und Geschwindigkeit. Es gilt:

$$W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad W_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Das Trägheitsmoment  $J$  ist für denselben Körper verschieden, wenn man die Drehachse verändert. Das Trägheitsmoment für den Zylinder bei Drehung um die Längsachse (Bild links) ist  $J_{Zyl||} = \frac{1}{2}mr^2$ . Rotiert der Zylinder um eine Querachse (Bild rechts), so gibt die Tabelle den Wert  $J_{Zyl\perp} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$ .  $r$  ist der Radius und  $\ell$  ist die Länge des Zylinders. Diese Tatsache kann leicht überprüft werden. Nehmen Sie eine dünne Stange und versuchen Sie, sie einmal um die Längsachse und das andere Mal um eine Querachse in Rotation zu bringen. Sie spüren den Unterschied sofort.



## 5.2 Vergleich Translation - Rotation

Wenn man die passenden Grössen gegenüberstellt, lassen sich die formalen Beziehungen zwischen den Grössen bei der Rotation analog zur Translation herstellen.

Translation	Rotation
Weg $s$	Winkel $\varphi$
Geschwindigkeit $v = \dot{s}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung $a = \dot{v} = \ddot{s}$	Winkelbeschleunigung $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Masse $m$	Trägheitsmoment $J$
Impuls $p = m \cdot v$	Drehimpuls $L = J \cdot \omega$
Kraft $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{s}$	Drehmoment $M = J \cdot \dot{\omega} = J \cdot \ddot{\varphi}$
kinetische Energie $W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	Rotationsenergie $W_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$

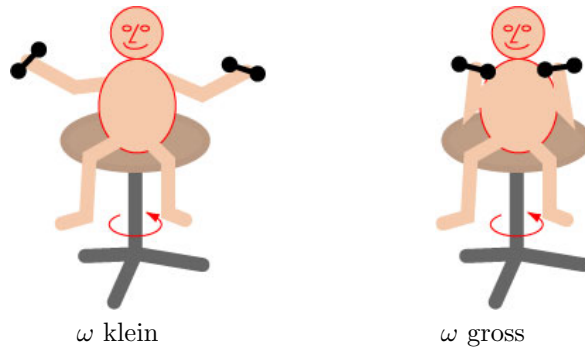
## 5.3 Der Drehimpuls

Bei der Rotation können wir den *Drehimpuls*  $L$  als Grundgrösse einführen. Er entspricht dem Impuls bei der Translation und ist definiert als Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit:  $L = J \cdot \omega$ . Wird einem drehbaren System Drehimpuls zu- oder von ihm abgeführt, fliesst Drehimpulsstrom  $I_L$ . Der Betrag des Drehimpulsstromes ist gleich dem Betrag des zugehörigen Drehmoments  $\vec{M}$ .

Wie bei der Translation die Impulsstrombilanz gebildet werden kann, bildet man bei der Rotation die Drehimpulsstrombilanz. Es gilt: Die Summe aller Drehimpulsströme ist gleich der Drehimpulsänderungsrate.

$$\sum_i I_{L_i} = \dot{L} = J\dot{\omega}$$

Folgendes Experiment zeigt, dass in einem abgeschlossenen System die Summe der Drehimpulse konstant ist. Eine Person sitzt auf einem rotierenden Drehschemel und hat zwei Hanteln in der Hand. Werden die Hanteln weit vom Körper weg gestreckt, ist die Winkelgeschwindigkeit der Rotation kleiner als wenn die Hanteln nahe an den Körper gezogen werden.



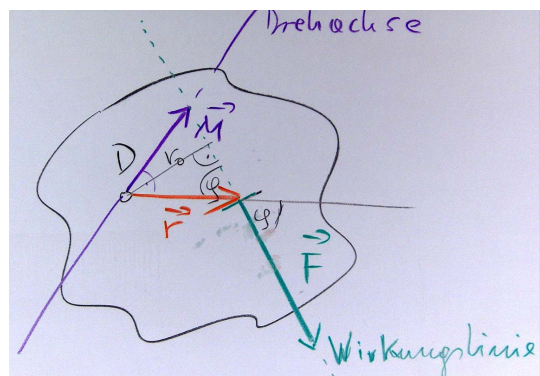
## 5.4 Das Drehmoment

Der Betrag eines Drehimpulsstromes ist gleich dem Betrag des zugehörigen Drehmoments. Das einzelne Drehmoment entsteht aber durch eine Kraft, die an einem Körper angreift.

Es gilt:

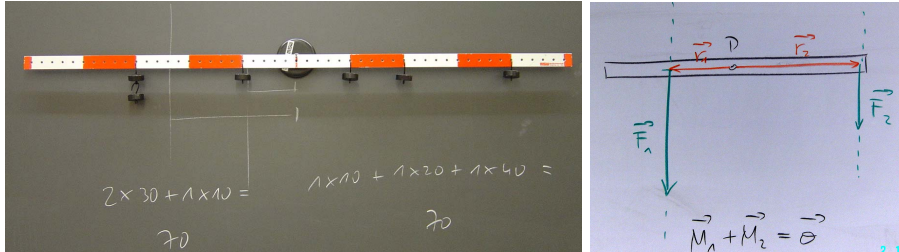
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Der Radius  $\vec{r}$  und die Kraft  $\vec{F}$  sind beides Vektoren. Das Drehmoment selbst hat auch eine Richtung, muss also auch



als Vektor dargestellt werden. Deshalb führt das Vektorprodukt zur Lösung. Der Drehmomentvektor steht damit senkrecht auf der durch  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$  aufgespannten Fläche. Er ist parallel zur Drehachse. Dabei wurde die Definition für  $\vec{M}$  so gewählt, dass der Vektor vom Beobachter weg zeigt, wenn die positive Winkelbeschleunigung im Uhrzeigersinn steht. Zu beachten ist ferner, dass sich das Vorzeichen von  $\vec{M}$  umkehrt, wenn beim Vektorprodukt  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$  vertauscht werden.

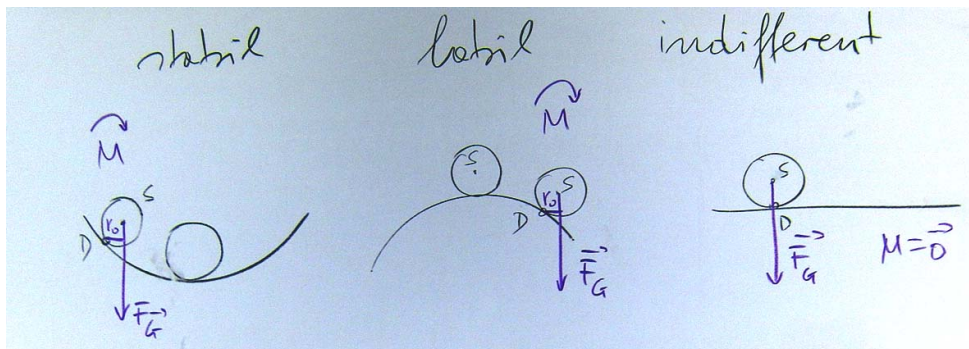
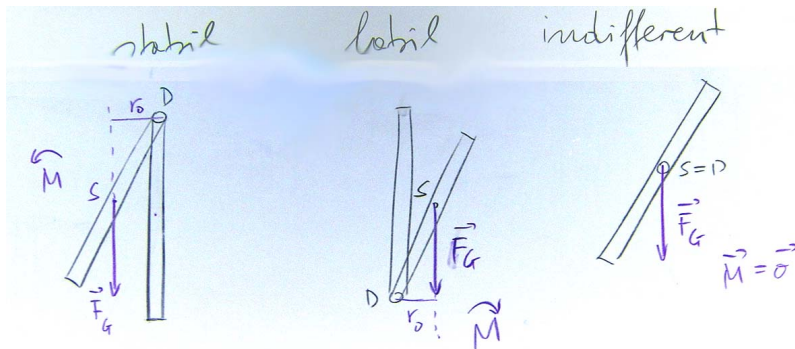
Gemäss Drehimpulsstrombilanz ergibt sich ein Gleichgewicht, wenn die Bilanzsumme Null ergibt, wenn also die Summe aller Drehmomente im Uhrzeigersinn gleich der Summe der Drehmomente im Gegenuhrzeigersinn ist. Das kann man gut am einfachen Hebel nachvollziehen.



### 5.5 Gleichgewicht

Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn Kräfte- und Drehmomentgleichgewicht vorhanden ist. Er behält dann seinen Bewegungszustand (Ruhe oder Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit und konstanter Winkelgeschwindigkeit) bei.

Man unterscheidet *stabiles*, *labiles* und *indifferentes* Gleichgewicht. Wird der Körper aus der stabilen Lage ausgelenkt, so wird er wieder in diese Lage zurückkehren. Wird er aber aus der labilen Lage ausgelenkt, sucht er eine stabile Gleichgewichtslage zu erreichen. Eine Auslenkung aus der indifferenten Gleichgewichtslage lässt den Körper in der neuen Lage verharren. Die Abbildungen zeigen Gleichgewichtslagen bei einer Stange und bei einer Kugel.





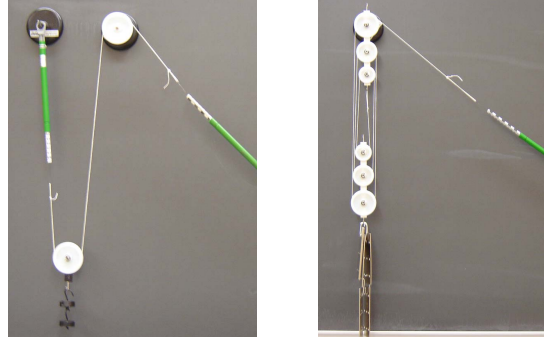
## 5.6 Kraftwandler

Kraftwandler sind Geräte (Maschinen), welche es ermöglichen, auf der Eingangsseite eine andere Kraft auszuüben als auf der Ausgangsseite. Dabei bleibt das Drehmoment unverändert.

### 5.6.1 Lose Rolle und Flaschenzug

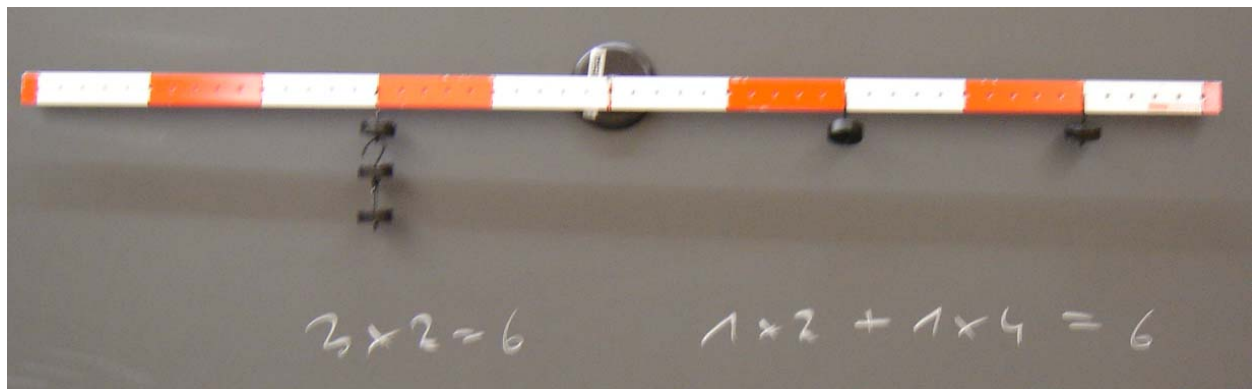
Die lose Rolle hängt an zwei Seilstücken, auf welche die gesamte Kraft aufgeteilt wird. Über jedes Seilstück wird die Hälfte der Kraft weiter geleitet.

Der Flaschenzug besteht aus einer Kombination von losen und festen Rollen. Für die Kraftwandlung sind die losen Rollen verantwortlich. Jede lose Rolle hängt an 2 Seilstücken, sodass bei  $n$  losen Rollen die Kraft auf  $2n$  Seilstücke aufgeteilt wird. Jedes Seilstück überträgt dann ein  $n$ -tel der Gesamtkraft.



### 5.6.2 Hebel

Das Hebelgesetz heisst *'Kraftarm mal Kraft ist Lastarm mal Last'*. Diese Regel resultiert aus der Tatsache, dass beim Gleichgewicht am Hebel das Drehmoment im Uhrzeigersinn gleich dem Drehmoment im Gegenurzeigersinn ist.



### 5.6.3 Wellrad

Das Wellrad ist mit dem Hebel vergleichbar. Als Kraftarm zählt immer der Radius der jeweiligen Scheibe. Das Drehmoment wird unverändert übertragen.

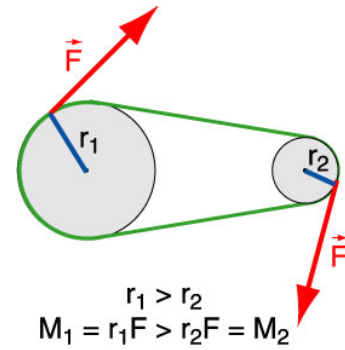
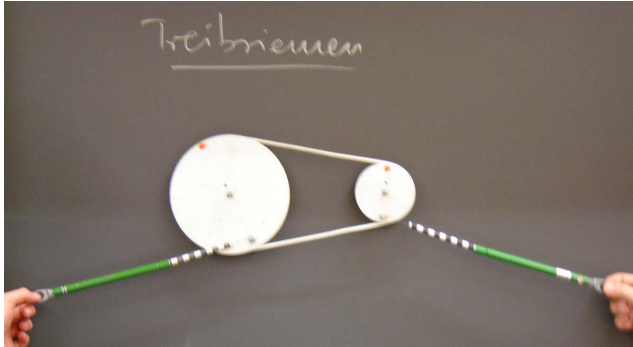


## 5.7 Drehmomentwandler

Drehmomentwandler sind Geräte (Maschinen), welche es ermöglichen, auf der Eingangsseite ein anderes Drehmoment auszuüben als auf der Ausgangsseite. Dabei wird eine Kraft unverändert übertragen.

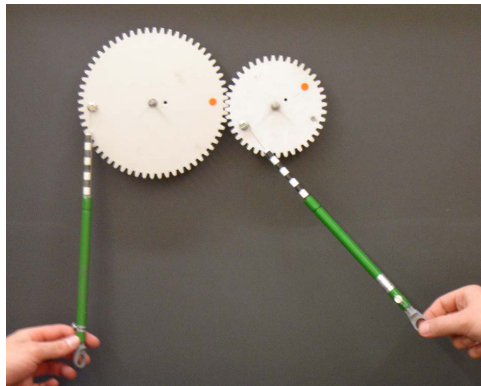
### 5.7.1 Treibriemengetriebe

Beim Treibriemengetriebe wird über den Treibriemen (Seil) die Kraft unverändert bez. Grösse und Richtung übertragen. Dafür wird das Drehmoment geändert. Es gilt  $M_1 = F \cdot r_1$  und  $M_2 = F \cdot r_2$ .



### 5.7.2 Zahnradgetriebe

Das Zahnradgetriebe funktioniert wie das Treibriemengetriebe. Die Übertragung der Kraft geschieht von Zahn auf Zahn, wobei die Grösse und die Richtung der Kraft bei der Übertragung gleich bleibt.



## Kapitel 6 Rotationsmechanik: Das Trägheitsmoment eines Körpers

Im vorhergehenden Kapitel haben wir bereits das Trägheitsmoment  $J$  eingeführt, und zwar als zur Masse analoge Grösse bei der Rotationsbewegung. Wir wollen jetzt aber dem Trägheitsmoment weiter auf der Spur bleiben und das Wissen vertiefen.

### 6.1 Berechnung von Trägheitsmomenten

#### 6.1.1 Trägheitsmoment einer Punktmasse

Das Trägheitsmoment einer Punktmasse ist definiert als  $J = mr^2$ , wobei  $r$  der Abstand der Masse  $m$  vom Drehpunkt ist.

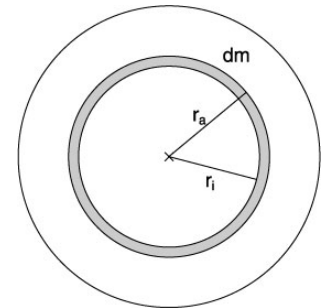
#### 6.1.2 Trägheitsmoment einer zylindrischen Scheibe

Die Abbildung rechts zeigt den Querschnitt durch eine zylindrische Scheibe mit dem Radius  $R$ . Die Drehachse soll die Zylinderachse sein. Wir greifen ein Massenelement  $dm$  in Form eines kreisförmigen Ringes heraus. Die Breite des Ringes ist  $\Delta r = r_a - r_i$  und soll sehr klein, d.h. nahezu Null sein. Die Dicke des Ringes ist  $h$ , sie spielt hier aber keine Rolle, da die Masse in der Tiefe homogen verteilt sein soll. Das ringförmige Massenelement hat den Wert:  $\Delta m = \rho dV = \rho(r_a^2 - r_i^2)\pi h = \rho\pi h(r_a + r_i)(r_a - r_i) = \rho\pi h(r_a + r_i) \cdot \Delta r$ . Das Trägheitsmoment dieses Ringes ist  $\Delta J = r_i^2 \Delta m = r_i^2 \rho\pi h(r_a + r_i) \cdot \Delta r$ . Wenn  $\Delta r$  nach Null geht, gehen  $r_i$  und auch  $r_a$  nach demselben Wert  $r$ . Für das differentielle Trägheitsmoment kann man deshalb schreiben:

$$dJ = r^2 dm = r^2 \cdot \rho\pi h \cdot 2r dr$$

Nun muss man über die Kreisscheibe integrieren vom Mittelpunkt ( $r = 0$ ) bis zum Rand ( $r = R$ ) und man erhält das Trägheitsmoment der zylindrischen Scheibe.

$$J_{Zylinder} = 2\rho\pi h \int_0^R r^3 dr = 2\rho\pi h \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = 2\rho\pi h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} r^2 \pi h \cdot \rho \cdot R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$



#### 6.1.3 Trägheitsmoment einer Kugel

Gesucht ist das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel mit dem Radius  $R$  bezüglich einer Achse durch den Kugelmittelpunkt. Die Kugel kann in Schichten geschnitten werden. Approximativ können diese Schichten Zylinderscheiben sein. Das Trägheitsmoment einer zylindrischen Scheibe bezüglich der Symmetrieachse haben wir soeben berechnet. Man muss diese Trägheitsmomente nur noch über alle Schichten aufsummieren, und zwar als unendliche Summe von infinitesimal dünnen Schichten mit dem Integral.

$$dJ = \frac{1}{2} x^2 dm$$

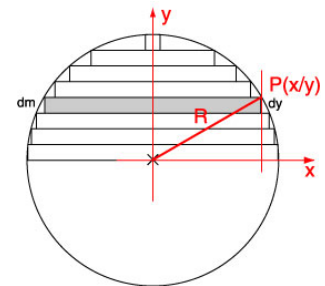
Für  $dm$  kann man schreiben:  $dm = \rho dV = \rho x^2 \pi dy$

Somit wird  $dJ$  zu:  $dJ = \frac{1}{2} \rho x^4 \pi dy$

Nach Pythagoras gilt ferner:  $x^2 = R^2 - y^2$

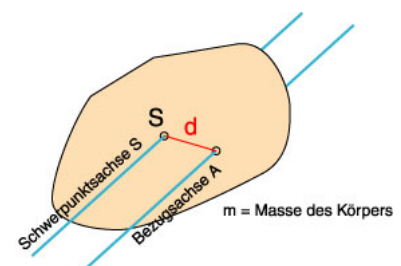
$$dJ = \frac{1}{2} \rho (R^2 - y^2)^2 \pi dy$$

$$J_{Kugel} = 2 \int_0^R \frac{1}{2} \rho (R^2 - y^2)^2 \pi dy = 2 \int_0^R \frac{1}{2} \rho (R^4 - 2R^2 y^2 + y^4) \pi dy = \rho \pi \left[ R^4 y - 2R^2 \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_0^R = \\ = \rho \pi \left( R^5 - \frac{2R^5}{3} + \frac{R^5}{5} \right) = \rho \pi \frac{15R^5 - 10R^5 + 3R^5}{15} = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \rho \frac{4R^3 \pi}{3} \cdot \frac{2R^2}{5} = \frac{2}{5} m R^2$$



### 6.2 Der Satz von Steiner

Der Fall, dass die Drehachse durch den Schwerpunkt des rotierenden Körpers geht, ist zwar häufig anzutreffen. Im anderen Fall aber brauchen wir eine Lösung, welche es ermöglicht, Trägheitsmomente bez. beliebiger Achsen anzugeben, die sich einfach aus den Trägheitsmomenten bez. einer Achse durch den Schwerpunkt bestimmen lassen. Die Trägheitsmomente von vielen Körpern bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt findet



man in Tabellenwerken.

Der *Satz von Steiner* gibt eine Hilfe für dieses Problem an: Er besagt:

$$J_A = J_S + d^2 m$$

Dabei bedeutet  $J_A$  das Trägheitsmoment bezüglich der Bezugsachse A,  $J_S$  ist das Trägheitsmoment bezüglich der parallelen Achse durch den Schwerpunkt und  $d$  ist der Abstand der beiden Achsen.

### 6.3 Experimentelle Bestimmung von Trägheitsmomenten

Bei unregelmässigen Körpern kann man meist das Trägheitsmoment nicht berechnen. dann muss man es in einem Experiment bestimmen. Es gibt zwei Arten von Experimenten, die dies ermöglichen.

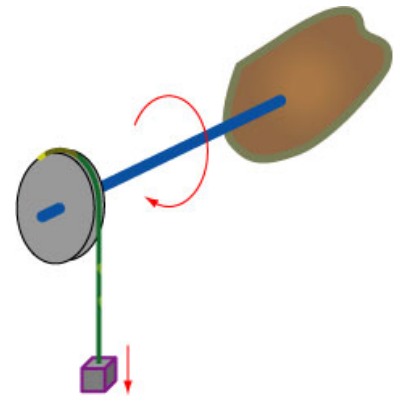
#### 6.3.1 Beschleunigungsexperimente

Das Trägheitsmoment ist ja jene Grösse, welche bei einem Versuch, einen Körper mit einem Drehmoment einer Winkelbeschleunigung auszusetzen, Widerstand leistet. Bei der Translation wäre die entsprechende Grösse die Masse, die durch eine Kraft beschleunigt wird. Somit gilt in analogie zur Translation:

$$M_{res} = J\ddot{\varphi}$$

Das Gewichtstück erzeugt eine Drehmoment an der Rolle ( $M = r \cdot F_G$ ). Startet man das Experiment aus der Ruhe, wird das Gewichtstück in der Zeit  $\Delta t$  die Höhe  $\Delta h$  durchfallen. Daraus gewinnt man die Beschleunigung mit der Gleichung  $\Delta h = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$ . Die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi}$  erhält man durch die Beziehung  $\dot{v} = a = r \cdot \ddot{\varphi}$ , wobei  $r$  der Radius der Rolle ist.

Bei diesem Experiment ist noch zu beachten, dass das gesamte Trägheitsmoment des rotierenden Systems, also unbekannter Körper und Rolle gemessen wird. In einem Vorversuch muss also das Trägheitsmoment der leeren Anlage bestimmt werden, damit man es am Schluss vom gesamten Trägheitsmoment abziehen kann. Ausserdem ist zu empfehlen, die rotierenden teile möglichst reibungsarm zu lagern und einen dünnen Faden zu verwenden.



#### 6.3.2 Schwingungsexperimente

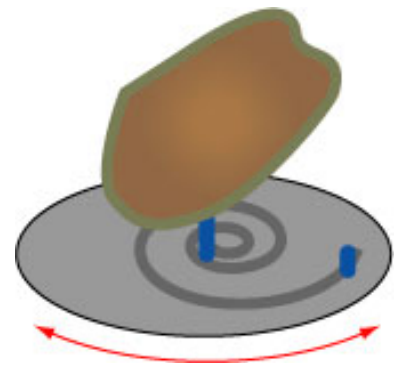
Mit Drehschwingungen eines Systems kann man das Trägheitsmoment eines unbekanntes Körpers ebenfalls bestimmen. Wird eine Drehpendel aus der Ruhelage ausgelenkt, erzeugt die Feder ein rücktreibendes Drehmoment, welches proportional zum Winkel ist. Somit kann man eine Differentialgleichung ansetzen:

$$J\ddot{\varphi} = -D \cdot \varphi$$

oder umgeformt:  $\ddot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0$

Aus der Theorie der Differentialgleichungen weiss man, dass  $\sqrt{\frac{D}{J}} = \omega_0$  ist, also gleich der Winkelgeschwindigkeit des ungedämpften Pendels. Und mit  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  erhält man:  $\sqrt{\frac{D}{J}} = \frac{2\pi}{T}$ .

Leicht zu messen ist die Periodenlänge  $T$ . So muss man in einem ersten Experiment mit einem Körper mit bekanntem Trägheitsmoment die Konstante  $D$  bestimmen. In einem zweiten Experiment kann man dann mit diesem  $D$  das Trägheitsmoment des zu untersuchenden Körpers ermitteln.



## Kapitel 7 Rotationsmechanik: Rotationsenergie

### 7.1 Ein einführendes Beispiel

**Beispiel:** Eine Kugel ( $r = 4 \text{ cm}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ), rollt über eine schiefe Ebene der Länge  $1 \text{ m}$  unter dem Neigungswinkel von  $30^\circ$  aus der Ruhe herunter. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Schwerpunkt am Ende der schiefen Ebene?

Wenn die Kugel über die schiefe Ebene rollt, macht der Schwerpunkt eine Translationsbewegung. Gleichzeitig rotiert aber die Kugel, und zwar um den jeweiligen Auflagepunkt auf der schiefen Ebene. Das Problem ist also kein ganz einfaches, auch wenn wir hier die Reibung und den Luftwiderstand vernachlässigen.

Zu Beginn der Bewegung ist die Kugel in Ruhe und wir registrieren ausschliesslich Gravitationsenergie bezüglich dem unteren Ende der schiefen Ebene. Ihr Betrag ist  $W_{grav} = mgh$ . Für  $h$  erhält man hier den Wert  $h = 1 \text{ m} \cdot \sin 30^\circ = 0.5 \text{ m}$ .

Unterwegs bewegt sich der Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit  $v$  und die Kugel hat eine momentane Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , wenn man die Kugel im Schwerpunktsystem betrachtet. Dann kann man für  $J$  das Trägheitsmoment der Kugel bez. des Schwerpunktes einsetzen. Die Betrachtung der Rotation im Schwerpunktsystem ist insofern gerechtfertigt, da wir nur eine Aussage über die Rotationsenergie suchen und nicht eine Bewegungsgleichung für die Kugel.

Nun kann man die Gesamtenergie wie folgt berechnen:

$$W = W_{grav} + W_{trans} + W_{rot} = mgy + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

Mit  $y$  wird die momentane Höhe angegeben. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes  $v$  ist mit  $\omega$  durch die Gleichung  $v = r\omega$  verknüpft. Für  $J$  setzen wir das Trägheitsmoment einer Kugel bez. des Schwerpunktes ein. Es ist  $J = \frac{2}{5}mr^2$ . Somit wird die Energiegleichung zu:

$$W = mgy + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = mgy + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = mgy + \frac{7}{10}mv^2$$

Am unteren Ende der schiefen Ebene ist  $y = 0$  und für  $W$  können wir  $W_{grav}$  vom Anfang einsetzen. Dann erhält man:

$$mgh = 0 + \frac{7}{10}mv^2$$

Gelöst auf  $v$  ergibt sich:  $v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 9.81 \cdot 0.5}{7}} = 2.65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

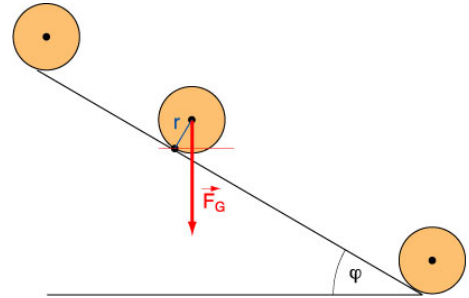
### 7.2 Rotationsenergie und Bezugssystem

Die Rotationsenergie eines Körpers wird berechnet zu:

$$W_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Mit dieser Aussage ist aber noch nicht festgehalten, in welchem Bezugssystem diese Rotationsenergie gemessen wird. In einem Schwerpunktsystem, d.h. in einem System, in dem der Schwerpunkt als ruhender Punkt gilt, ist  $J$  das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes. Wenn aber wie im obigen Beispiel der Drehpunkt nicht mit dem Schwerpunkt zusammen fällt, muss man das Trägheitsmoment bez. der effektiven Drehachse berechnen. Mit dem Satz von Steiner ist dies ja auch kein Problem. So ist das Trägheitsmoment bezüglich des Drehpunktes auf der schiefen Ebene gleich  $J_A = J_S + mr^2 = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$ . Die gesamte kinetische Energie ist jetzt gleich der Rotationsenergie mit Bezug auf den Drehpunkt auf der schiefen Ebene. Ihr Wert ist:  $W_{kin} = \frac{1}{2}J_A\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5}mr^2 \cdot \omega^2 = \frac{7}{10}mv^2$ . Diesen Wert haben wir aber auch mit der Betrachtung der Rotation im Schwerpunktsystem erhalten.

Die obige Überlegung hat gezeigt, dass es keine Rolle spielt, welches Bezugssystem man zur Beurteilung der



gesamten kinetischen Energie verwendet. Die kinetische Energie setzt sich immer aus der Translations- und der Rotationsenergie zusammen.

$$W_{kin} = W_{trans} + W_{rot}$$

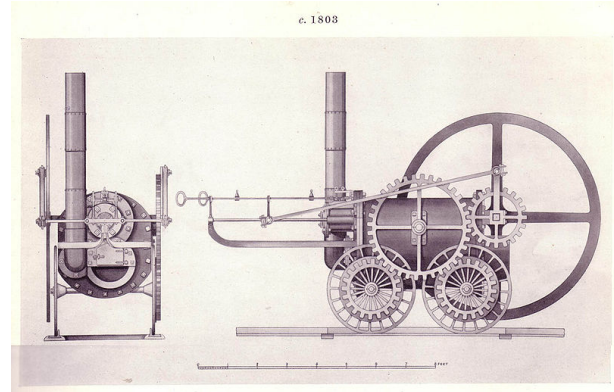
### 7.3 Energiespeicherung

Wir haben gesehen, dass in einem rotierenden Körper entsprechend seinem Trägheitsmoment und seiner Winkelgeschwindigkeit Energie gespeichert ist. Diese Tatsache kann man sich für die technische Speicherung und Rückgewinnung von Energie zunutze machen. Traditionellerweise benützte man Schwungräder zur Antriebsunterstützung bei verschiedenen Maschinen, wie z.B. Wasserpumpen oder Eisenbahnlokomotiven. Eine systematische Anlage zur Energiespeicherung und Rückgewinnung finden wir bei *Gyrobussen*, welche beim Bremsen die Energie auf den Drehimpuls in einem Schwungrad geladen haben. Beim Anfahren oder Beschleunigen konnte diese Energie wieder verfügbar gemacht werden. Bei Gyrobussen arbeitete man mit beträchtlichen Trägheitsmomenten. Moderne Konzepte funktionieren aber mit grösserer Winkelgeschwindigkeit bei relativ kleinen Trägheitsmomenten. Die Bilder zeigen Beispiele für die Energiespeicherung in Schwungrädern (bei der Dampfmaschine von Trevithick, bei einer Gesenkschmiede und in einem Gyrobus von Yverdon. Die folgenden Internetverweise bieten weitere Informationen zu Gyrosystemen an:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Gyrobus>

[http://photo.proaktiva.eu/digest/2008\\_gyrobus.html](http://photo.proaktiva.eu/digest/2008_gyrobus.html)

<http://systemdesign.ch/index.php/Gyrobus>

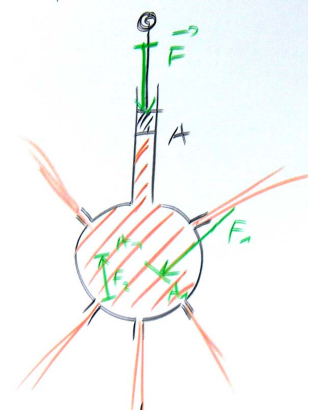


## Kapitel 8 Statik der Fluide: Druck

### 8.1 Druck in Flüssigkeiten und Gasen

#### 8.1.1 Der Stempeldruck in Flüssigkeiten

**Experiment:** Ein Glaskolben mit verschiedenen Öffnungen ist mit Wasser gefüllt. Wird der Stempel hineingedrückt, spritzt das Wasser aus den Öffnungen gleich stark heraus. Daraus schliessen wir, dass der Druck an jeder Stelle in der Flüssigkeit gleich gross ist. (*Pascal'sches Prinzip*, [http : //de.wikipedia.org/wiki/Blaise\\_Pascal](http://de.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal))



#### 8.1.2 Definition des Drucks

Der Druck  $p$  ist definiert als der Quotient aus Kraft  $F$  pro Fläche  $A$ .

$$p = \frac{F}{A}$$

Die Masseinheit des Drucks ist:

$$[p] = \left[ \frac{F}{A} \right] = \text{Pa (Pascal)}$$

Weitere Masseinheiten:

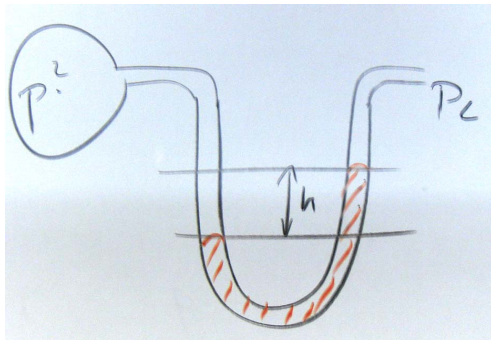
$$1 \text{ bar} = 1000 \text{ mbar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ mbar} = 1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa}$$

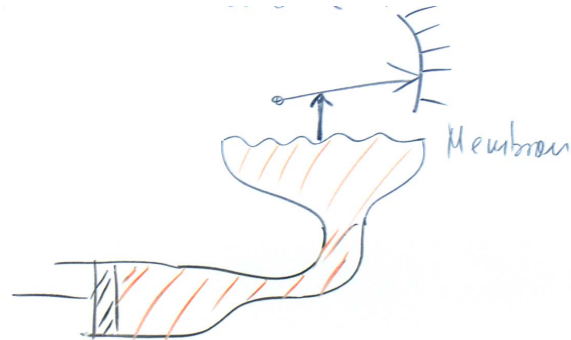
Früher wurden noch weitere Masseinheiten für den Druck verwendet: Torr (nach dem italienischen Physiker Torricelli, [http : //de.wikipedia.org/wiki/Evangelista\\_Torricelli](http://de.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli)), mmHg, mmWassersäule, at (Atmosphäre).

#### 8.1.3 Messverfahren und Messgeräte

Druckmessgeräte können den *Differenzdruck* oder den *absoluten Druck* messen. Ein Differenzdruckmessgerät ist z.B. das *U-Rohr-Manometer*. Es misst die Druckdifferenz zwischen dem zu untersuchenden Raum und dem Umgebungsdruck. Ein *Membranmanometer* kann den absoluten Druck bestimmen. In jedem Fall müssen die Manometer richtig kalibriert werden.



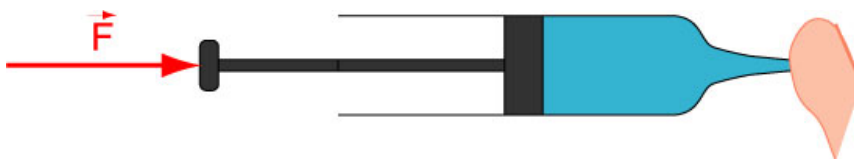
U-Rohr-Manometer



Membranmanometer

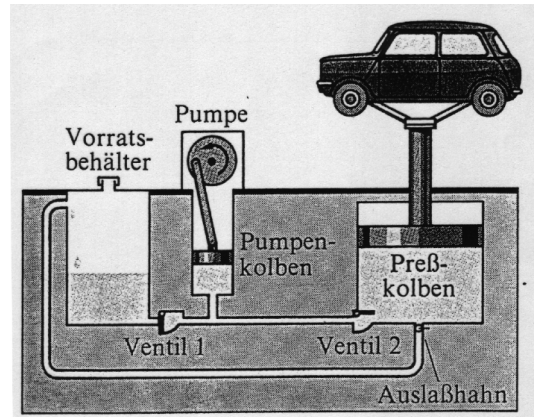
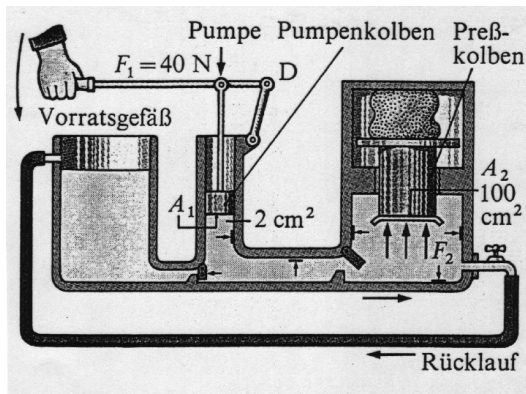
#### 8.1.4 Inkompressibilität von Flüssigkeiten

**Experiment:** Eine Glasspritze ist mit Wasser gefüllt. Mit dem Finger wird die Öffnung verschlossen. Man kann den Kolben nicht hin- und herbewegen. Flüssigkeiten lassen sich praktisch nicht zusammendrücken.



### 8.1.5 Anwendungen

**Die hydraulische Presse** In der Praxis wird die Hydraulik vielfach angewendet, um Kräfte zu übertragen. In einem geschlossenen hydraulischen System ist gemäss Pascal'schem Prinzip der Druck überall gleich, wobei allerdings noch die Auswirkungen der Gravitation zu berücksichtigen sind, was wir aber später machen. Nun kann man unterschiedliche Flächen bezeichnen, auf welche dann entsprechend der Beziehung  $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$  auch unterschiedlicher Druck festzustellen ist.



## 8.2 Der Hydrostatische Druck

**Experiment:** Ein Gefäß ist mit Wasser gefüllt. Nun wird eine Drucksonde eingetaucht, am Display wird der Differenzdruck zwischen dem Druck auf der Sonde und dem äusseren Luftdruck angezeigt. Gemessen werden die Druckwerte in Abhängigkeit von der Eintauchtiefe  $h$ . Man kann das Experiment auch mit anderen Flüssigkeiten wiederholen. Als Ergebnis erhält man:

Der hydrostatische Druck ist proportional zur Tiefe  $h$ , proportional zur Dichte  $\rho$  der Flüssigkeit und proportional zur Gravitationsstärke  $g$ . Es gilt:

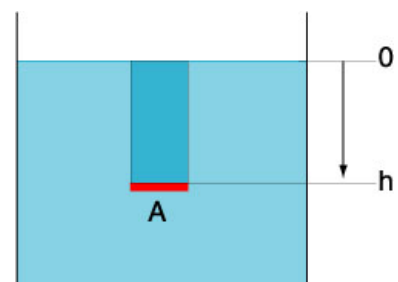
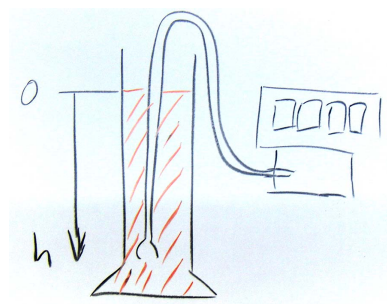
$$p_{hyd} = \rho g h$$

**Theoretische Begründung:** Der Druck auf die Fläche  $A$  ist gleich dem Quotienten aus dem Gewicht der darüberliegenden Flüssigkeitssäule und der Fläche  $A$ . Dieses Gewicht ist  $\rho V g = \rho A h g$ .

Der Druck ist somit  $p_{hyd} = \frac{\rho A h g}{A} = \rho g h$ .

Der Gesamtdruck in der Tiefe  $h$  ist:

$$p_{ges} = p_L + \rho g h$$





## 8.3 Druck in Gasen

### 8.3.1 Kompressibilität von Gasen

**Experiment:** Eine Glasspritze ist mit Luft gefüllt. Mit dem Finger wird die Öffnung verschlossen. Man kann den Kolben leicht hin- und herbewegen. Gase lassen sich zusammendrücken und expandieren.

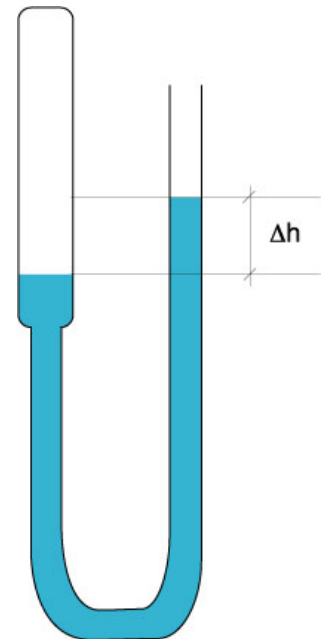


### 8.3.2 Abgeschlossene Gase: Das Gesetz von Boyle und Mariotte

**Experiment:** Das *Gasthermometer* besteht aus einem mit einem Gas (meistens Luft) gefüllten Raum, an dem ein mit Quecksilber gefüllter Schlauch angebracht ist, und zwar so, dass durch Heben bzw. Senken des Schlauches das eingeschlossene Gasvolumen in definierter und messbarer Weise verändert werden kann. Die im Schlauch hoch- oder tiefstehende Quecksilbersäule gibt den Differenzdruck zwischen dem Gasvolumen und der Umgebung an. *Gasthermometer* heisst das Gerät, weil es auch für die Messung von sehr tiefen Temperaturen verwendet wird.

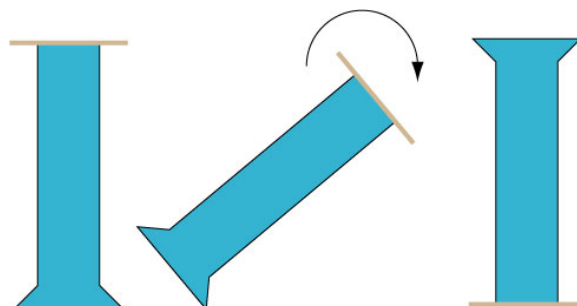
In unserem Experiment wird bei Druckausgleich ein bestimmtes Volumen eingeschlossen und der Hahn wird verriegelt. Nun wird das freie Stück des Schlauches gehoben, bzw. gesenkt und es werden zu verschiedenen Gasvolumina die Höhenunterschiede  $\Delta h$  der Quecksilbersäulen gemessen. Daraus und aus dem Luftdruck  $p_L$  kann man den Gesamtdruck im eingeschlossenen Gas ermitteln. Bei der Auswertung der Messwerte werden die jeweiligen Grössen für Gasvolumen  $V$  und Gesamtdruck  $p = p_L + \rho g \Delta h$  zueinander in Beziehung gesetzt. Es zeigt sich, dass das Produkt  $p \cdot V$  praktisch immer denselben Wert erzielt, dass also bei einem bestimmten Ausgangsvolumen und natürlich bei unveränderter Temperatur das Produkt  $pV$  konstant ist. Diese Gesetzmässigkeit ist unter dem Namen *Gesetz von Boyle-Mariotte* bekannt.

$$p \cdot V = \text{konstant}$$



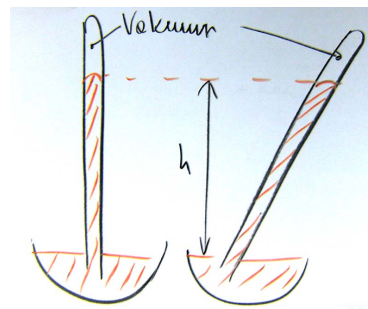
### 8.3.3 Der Luftdruck

**Experiment:** Ein Glaszylinder wird mit Wasser bis zum Rand gefüllt. Dann wird ein Blatt Papier auf den Rand gelegt und der Zylinder wird umgekehrt. Das Wasser bleibt im Glaszylinder. Auf die frag, was das Wasser im Glaszylinder hält, bleibt nur die Antwort: der Luftdruck.

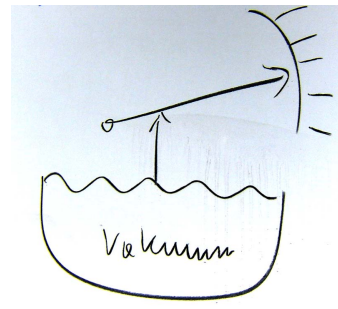


Zum Messen des Luftdrucks verwendet man ein *Barometer*. Ein Quecksilberbarometer besteht aus einem mit Quecksilber gefüllten Glasrohr, welches verkehrt aufgestellt wird. Der Luftdruck drückt das Quecksilber in das Rohr und zwar so weit, bis der hydrostatische Druck des Quecksilbers gleich dem Luftdruck ist. Auch mit

einem Dosenbarometer kann man den Luftdruck messen. Die Dose wird evakuiert und die Membran muss mit ihrer Spannung dem Luftdruck standhalten.



Quecksilberbarometer



Dosenbarometer

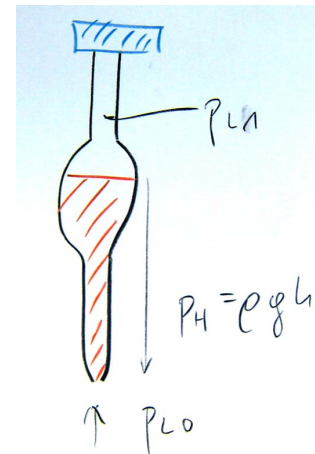
Der Luftdruck hängt von der Höhe über Meer ab. Diese Abhängigkeit kann man in der *Barometrischen Höhenformel* ausdrücken. Es gilt:

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h} \quad \text{und} \quad h = -\frac{p_0}{g \rho_0} \ln \frac{p}{p_0}$$

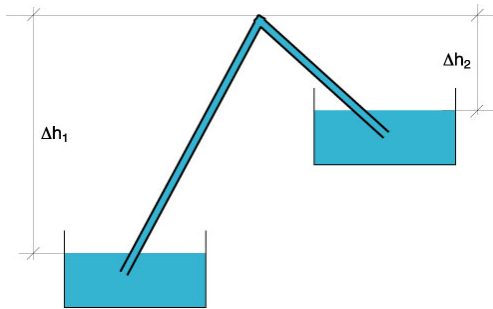
$p_0$  ist der Luftdruck  $\rho_0$  die Luftdichte auf Meeressniveau,  $p$  ist der Luftdruck in der Höhe  $h$  über Meer.

### 8.3.4 Anwendungen

**Pipette:** Die Pipette dient zum Aufnehmen von kleineren Flüssigkeitsmengen und zur kontrollierten Abgabe der gespeicherten Flüssigkeit. Oft gibt man sie tropfenweise ab. Wenn das obere Ende der Pipette verschlossen ist, stellt sich im oberen Luftraum der Druck so ein, dass die Summe aus diesem Druck und dem hydrostatischen Druck der Flüssigkeitssäule gleich dem äusseren Luftdruck ist. Da die Ausflussöffnung eng ist, hält die Pipette die Flüssigkeit, solange das obere Ende verschlossen ist.



**Winkelheber:** Der Winkelheber dient zum Überleiten von Flüssigkeiten über ein Hindernis. Dabei muss die Einlauföffnung immer höher als die Auslauföffnung liegen.



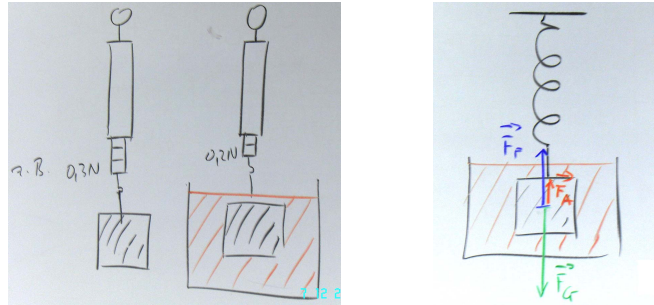
$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad \Delta h_1 &> \Delta h_2 && | \cdot \rho_{Fl} g \\ \rho_{Fl} g \Delta h_1 &> \rho_{Fl} g \Delta h_2 \\ p_1 &> p_2 && | \cdot (-1) \\ -p_1 &< -p_2 && | + p_L \\ p_L - p_1 &< p_L - p_2 \end{aligned}$$

Auf der linken Seite ist der Druck von aussen nach innen kleiner als auf der rechten Seite. Deshalb wird die Flüssigkeit von rechts nach links strömen. Die überwindbare Höhe hängt allerdings von der Dichte der Flüssigkeit ab.

# Kapitel 9 Statik der Fluide: Auftrieb, Kohäsion, Adhäsion

## 9.1 Der Auftrieb in Flüssigkeiten

**Experiment:** Ein Körper hängt an einer Federwaage, welche sein Gewicht in Luft anzeigt. Taucht man nun den Körper in eine Flüssigkeit ein, wird der Ausschlag an der Federwaage zurück gehen. Das Gewicht, also die Gravitationskraft, die von der Anziehung der Massen herrührt ist natürlich unverändert geblieben. Die Reduktion der Anzeige kann nur durch das Auftreten einer neuen Kraft erklärt werden, die offenbar durch die Flüssigkeit hervorgerufen wird. Wir nennen sie *Auftriebskraft*.

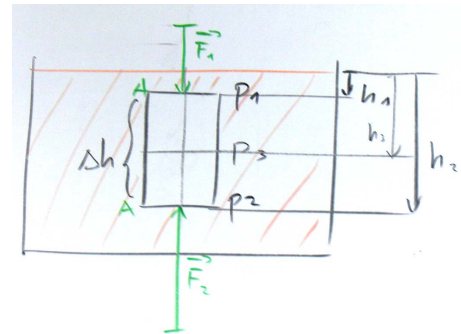


Wird ein Körper in eine Flüssigkeit eingetaucht, wirkt in verschiedener Tiefe ein unterschiedlicher hydrostatischer Druck. Die entsprechenden Druckkräfte sind jeweils anders. Deshalb wird die resultierende Druckkraft von unten nach oben grösser sein als die resultierende Druckkraft von oben nach unten. Es gilt:

$$F_2 = p_2 A = \rho g h_2 A$$

$$F_1 = p_1 A = \rho g h_1 A$$

$$F_{\text{Auftrieb}} = F_2 - F_1 = \rho g h_2 A - \rho g h_1 A = \rho g A (h_2 - h_1) = \rho g A \Delta h = \rho g V = m_{\text{Fl}} g = \text{Gewicht der verdrängten Flüssigkeit}$$



## 9.2 Steigen - Schweben - Sinken

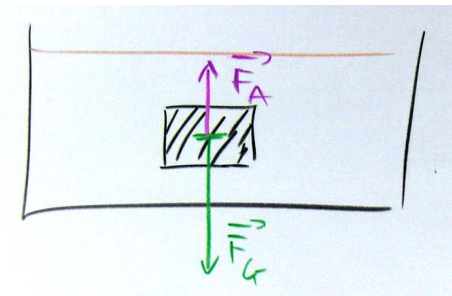
Wird ein Festkörper in einer Flüssigkeit ganz untergetaucht, gibt es drei Möglichkeiten. Er kann aufsteigen, er kann aber auch schweben oder sinken. Was er macht, hängt von den Dichtewerten von Festkörper und Flüssigkeit ab.

$$F_A > F_G \quad F_A = F_G \quad F_A < F_G$$

$$\rho_{\text{Fl}} g V > \rho_K g V \quad \rho_{\text{Fl}} g V = \rho_K g V \quad \rho_{\text{Fl}} g V < \rho_K g V$$

$$\rho_{\text{Fl}} > \rho_K \quad \rho_{\text{Fl}} = \rho_K \quad \rho_{\text{Fl}} < \rho_K$$

Steigen                      Schweben                      Sinken



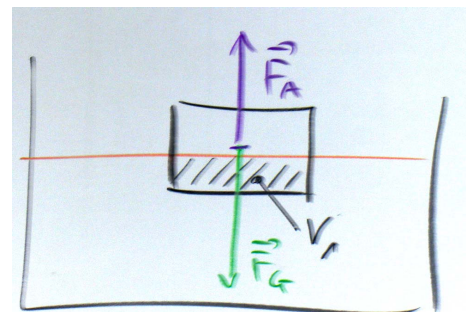
## 9.3 Schwimmen

Ein Körper, dessen durchschnittliche Dichte grösser als die Dichte der Flüssigkeit ist, wird schwimmen. er taucht dann nur so tief in die Flüssigkeit ein, bis ein Gleichgewicht zwischen Gewichtskraft und Auftriebskraft hergestellt ist.

$$F_G = F_A$$

$$\rho_K V g = \rho_{\text{Fl}} V_1 g$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_K}{\rho_{\text{Fl}}}$$



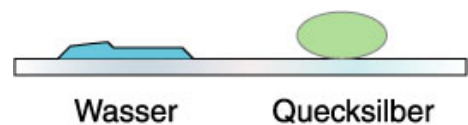
## 9.4 Adhäsion und Kohäsion

**Experiment:** Zwei Glasplatten liegen aufeinander. Es ist nicht leicht, sie durch Ziehen senkrecht zur Glasfläche zu trennen. Die Adhäsionskräfte zwischen den Glasmolekülen stehen dem entgegen.

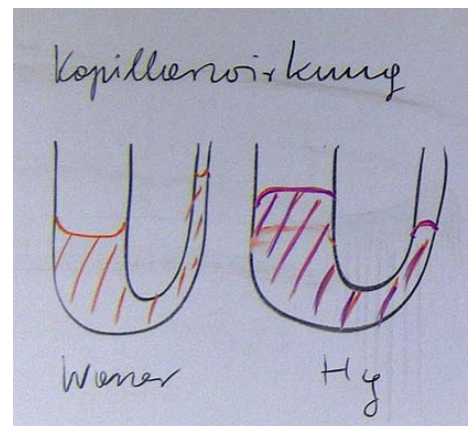
**Experiment:** Aus einem Wasserhahn kann man Wasser tropfenweise ausfliessen lassen. Wenn der Tropfen eine bestimmte Grösse hat, reisst er ab. Die Tropfengrösse wird durch die Oberflächenspannung des Wassers bestimmt. Diese Oberflächenspannung ist eine Wirkung der Molekularkräfte zwischen den Wassermolekülen (Kohäsionskräfte)

**Experiment:** Auf einer Wasseroberfläche kann man leichte Aluminiummünzen zum Schwimmen bringen. Sie werden durch die Oberflächenspannung getragen. Von der Oberflächenspannung profitieren auch Kleinlebewesen wie Wasserläufer. Wird ein gewöhnliches Spülmittel in das Wasser gegeben, wird die Oberflächenspannung vermindert und die Münzen versinken. Die Oberflächenspannung reduzierende Wirkung eines Spülmittels wird beim Reinigen geschätzt. Nicht gut ist es aber wenn solche Mittel (es sind Tenside) in die Umwelt gelangen, da sie negative Wirkung z.B. auf Kleinlebewesen haben.

**Experiment:** Ein Wassertropfen und ein Quecksilbertropfen werden auf eine Glasplatte gelegt. Der Wassertropfen benetzt die Glasplatte. Das sieht man darin, dass das Wasser auf der Glasplatte zerrinnt. Quecksilber benetzt die Glasplatte nicht, er bleibt als Tropfen erhalten und lässt sich über die Glasplatte rollen.



**Experiment:** In verbundene Gefässe von unterschiedlichem Querschnitt wird Wasser bzw. Quecksilber eingefüllt. Je kleiner der Querschnitt der Röhren ist, um so höher steht der Wasserspiegel und umso tiefer steht der Quecksilberspiegel. Beim Wasser überwiegen die Adhäsionskräfte zwischen den Wasser- und den Glasmolekülen die Kohäsionskräfte zwischen den Wassermolekülen. Beim Quecksilber ist es gerade umgekehrt.



Adhäsionskräfte treten zwischen verschiedenen Materialien auf, während Kohäsionskräfte zwischen den Molekülen desselben Stoffes wirken. Von der Natur her sind es elektromagnetische Kräfte zwischen den Molekülen. Kohäsionskräfte sind für das Zusammenhalten eines Körpers verantwortlich. Bei Flüssigkeiten wird dies z.B. in der Oberflächenspannung sichtbar. Adhäsionskräfte sind auch die Ursache für die Reibung. Sie sind aber auch für die Kapillarkapillarenwirkung z.B. von Wasser in einem dünnen Glasrohr verantwortlich. Das Zusammenspiel von Adhäsions- und Kohäsionskräften führt zu den unterschiedlichen Erscheinungen bei Wasser und Quecksilber in einem Glasgefäss. Wasser wird am Glasrand hochgezogen während sich Quecksilber durch die überwiegenden Kohäsionskräfte zusammenzieht und damit am Glas tiefer steht. Das Zusammenspiel von Adhäsions- und Kohäsionskräften ist auch wirksam bei der Frage, ob eine Flüssigkeit einen Festkörper benetzt.

## 9.5 Aufgaben

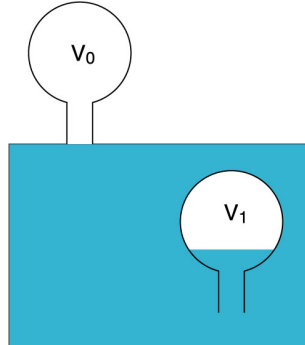
- 1) In einem Quecksilberbarometer misst man eine Säulenhöhe von 730 mm (730 Torr). Wieviel mbar sind das? Welcher Wassersäule kann diese Quecksilbersäule das Gleichgewicht halten?
- 2) Eine mit Luft gefüllte Flasche mit  $1000 \text{ cm}^3$  Inhalt wird mit der Öffnung nach unten in einem See versenkt. Auf welchen Bruchteil wird die Luft in 30m Tiefe zusammengedrückt? In welcher Tiefe würde diese Flasche schweben, wenn das Glas (Dichte  $2500 \text{ kg/m}^3$ ) 5 N wiegt? Die Dichte der Luft an der Oberfläche sei  $1.250 \text{ kg/m}^3$ .
- 3) Bei einem Unfall fährt ein Auto in einen See. Warum kann man unter Wasser die Türen nicht öffnen, auch wenn sie nicht beschädigt sind? Wie gross ist die Druckkraft auf eine Tür von  $0,5 \text{ m}^2$  Fläche in 3 m Tiefe?
- 4) Bei einem Wettersturz fällt das Barometer von 1000 mbar auf 970 mbar. Wieviel Liter Luft von 970 mbar verlassen dabei ein Zimmer von  $100 \text{ m}^3$  Rauminhalt, wenn die Temperatur konstant bleibt?
- 5) Die Hülle eines Kinderballons wiegt 3,0 cN und fasst 5,0 Liter Gas. Wie gross ist sein Auftrieb in Luft von der Dichte  $1.27 \text{ kg/m}^3$ ? Wie gross sind Gesamtgewicht und Tragkraft bei einer Füllung mit Leuchtgas ( $0,6 \text{ kg/m}^3$ ), Wasserstoff ( $0,09 \text{ kg/m}^3$ ), Helium ( $0,18 \text{ kg/m}^3$ )? Warum ist die Tragkraft bei dem gegenüber Wasserstoff doppelt so schweren Helium nicht auf die Hälfte gesunken?
- 6) Unter Wasser wird ein Felsblock ( $2500 \text{ kg/m}^3$ ) mit der Kraft von 100N gehoben. Welches Gewicht hat der Felsblock über Wasser?
- 7) Wieviel Prozent eines Eisberges ( $900 \text{ kg/m}^3$ ) ragen über die Oberfläche? (Dichte von Salzwasser  $1000 \text{ kg/m}^3$ ).
- 8) In einem randvoll gefüllten Becherglas schwimmt ein Eisbrocken ( $900 \text{ kg/m}^3$ ). Läuft das Wasser über, wenn das Eis schmilzt?
- 9) In einem abgeschlossenen Hafenbecken schwimmt ein Schiff. Bleibt der Wasserspiegel im Hafen gleich oder steigt oder sinkt er, wenn das Schiff sinken würde?
- 10) Ein Baumstamm ( $V = 0,5 \text{ m}^3$ , Dichte  $600 \text{ kg/m}^3$ ) schwimmt auf Wasser ( $1000 \text{ kg/m}^3$ ). Wieviele Schiffbrüchige könnten sich an ihm theoretisch halten, wenn sich jeder einzelne auf den Stamm mit 100 N stützen würde?
- 11) Die mittlere Dichte des Menschen liegt zwischen  $960$  und  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Warum ändert sie sich beim Atmen? Warum müssen wir auch in Salzwasser zusätzliche "Schwimm"-bewegungen machen, um mit dem Kopf über der Oberfläche zu bleiben?
- 12) In einem abgeschlossenen Hafenbecken schwimmt ein Schiff. Aus dem Schiff wird jetzt ein Körper in das Hafenbecken geworfen. Der Körper versinkt. Bleibt der Wasserspiegel im Hafen gleich oder steigt oder sinkt er?
- 13) Wie Nr. 12). Was passiert mit dem Wasserspiegel, wenn der ins Wasser geworfene Körper schwimmt?

## Lösungen

- 1) Der Quecksiberdruck ist  $p_{Hg} = \rho_{Hg}gh = 13550 \cdot 9.81 \cdot 730 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} = 97'000 \text{ Pa} = 97 \text{ kPa}$   
 Die Wassersäule müsste die Höhe  $h = \frac{p_{Hg}}{\rho_W \cdot g} = \frac{97000}{1000 \cdot 9.81} = 9.89 \text{ m}$  haben.
- 2) a) Oben ist der Druck  $p_0 = p_L$  und das Volumen  $V_0$ . Unten ist der Druck  $p_1 = p_L + p_W$  und das Volumen  $V_1$ . Somit gilt:

$$p_0 V_0 = p_1 V_1$$

$$V_1 = \frac{p_0 V_0}{p_1} = \frac{p_L V_0}{p_L + \rho_W g h} = \frac{10^5 \cdot V_0}{10^5 + 1000 \cdot 10 \cdot 30} = 0.25 V_0 = \frac{1}{4} V_0$$



- b) Die Flasche schwebt, wenn der Auftrieb gleich dem Gesamtgewicht ist. Auftrieb erzeugt das Glas und die eingefüllte Luft. Das Gesamtgewicht setzt sich aus Gewicht des Glases und der eingefüllten Luft zusammen. Gesucht ist dann die Tiefe  $h_2$ .

$$F_G = F_{GG} + F_{GL} = 5 \text{ N} + \rho_L g V_0 = 5 \text{ N} + 1.250 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ N} = 5.0125 \text{ N}$$

$$F_A = \rho_W g (V_{L2} + V_G) \text{ Nun brauchen wir noch das Glasvolumen } V_G. \text{ Es gilt: } F_{GG} = \rho_G g V_G = 5 \text{ N.}$$

$$V_G = \frac{F_{GG}}{\rho_G g} = \frac{5 \text{ N}}{2500 \cdot 10 \text{ N}} = 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$\text{Für das Luftvolumen in der Tiefe } h_2 \text{ gilt: } p_0 V_0 = (p_0 + \rho_W g h_2) V_{L2}$$

$$\text{Auf } V_{L2} \text{ gelöst ergibt sich: } V_{L2} = \frac{p_0 V_0}{p_0 + \rho_W g h_2}$$

$$F_A = \rho_W g (V_{L2} + V_G) = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left( \frac{p_0 V_0}{p_0 + \rho_W g h_2} + 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \right)$$

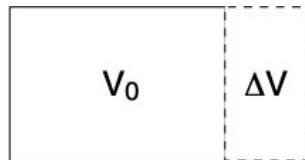
$$\text{Nun ist } F_G = F_A$$

$$5.0125 \text{ N} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left( \frac{p_0 V_0}{p_0 + \rho_W g h_2} + 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \right)$$

$$5.0125 \text{ N} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left( \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{10^5 \text{ Pa} + 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot h_2} + 2.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \right)$$

$$\text{Diese Gleichung wird auf } h_2 \text{ gelöst und man erhält: } h_2 = 23.2 \text{ m}$$

- 3) Die Druckkraft ist  $F = p \cdot A = \rho_W g h \cdot A = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m}^2 = 15000 \text{ N}$   
 Diese Kraft ist gleich gross wie das Gewicht einer Masse von 1500 kg auf der Erde.
- 4) Wir denken uns den Raum dehnbare. Dann wird das Volumen grösser, wenn der Luftdruck fällt. Die Differenz bei 970 hPa ist das Luftvolumen, das entweicht.



$$\text{Nach Boyle-Mariotte gilt: } p_0 V_0 = p_1 V_1$$

$$V_1 = \frac{p_0 V_0}{p_1} = \frac{1000 \text{ hPa} \cdot 100 \text{ m}^3}{970 \text{ hPa}} = 103.1 \text{ m}^3$$

$$\Delta V = V_1 - V_0 = 103.1 \text{ m}^3 - 100 \text{ m}^3 = 3.09 \text{ m}^3$$

- 5) Der Auftrieb kann als Gewicht der verdrängten Luftmenge berechnet werden. Die Tragkraft ist die Differenz zwischen Auftrieb und Gewicht. Eine Tragkraft ist natürlich nur vorhanden, wenn der Auftrieb grösser als das Gewicht ist.

Der Auftrieb hier ist nicht von der Gasfüllung abhängig, das das Ballonvolumen immer  $5.0 \ell$  ist. Es gilt:  $F_A = \rho_{Luft} g V = 1.27 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5.0 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 = 0.0635 \text{N}$

Leuchtgas:

$$F_G = F_{G_{gas}} + F_{G_{huelle}} = \rho_{gas} g V + F_{G_{huelle}} = 0.6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 + 3.0 \cdot 10^{-2} \text{N} = 0.06 \text{N}$$

$$F_{trag} = F_A - F_G = 0.0635 \text{N} - 0.06 \text{N} = 0.0035 \text{N}$$

Wasserstoff:

$$F_G = F_{G_{gas}} + F_{G_{huelle}} = \rho_{gas} g V + F_{G_{huelle}} = 0.09 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 + 3.0 \cdot 10^{-2} \text{N} = 0.0345 \text{N}$$

$$F_{trag} = F_A - F_G = 0.0635 \text{N} - 0.0345 \text{N} = 0.029 \text{N}$$

Helium:

$$F_G = F_{G_{gas}} + F_{G_{huelle}} = \rho_{gas} g V + F_{G_{huelle}} = 0.18 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 + 3.0 \cdot 10^{-2} \text{N} = 0.039 \text{N}$$

$$F_{trag} = F_A - F_G = 0.0635 \text{N} - 0.039 \text{N} = 0.0245 \text{N}$$

Beim Gewicht des Ballons ist vor allem die Hülle mit  $0.03 \text{N}$  stark beteiligt, das Gas hat einen kleineren Stellenwert. Somit verändert sich die Tragkraft nicht im gleichen Verhältnis wie die Gasdichte.

- 6) Unter Wasser wirkt der Auftrieb dem Gewicht entgegen. Deshalb ist die Kraft zum Heben kleiner als in Luft, wo der Auftrieb durch die Luft vernachlässigbar ist.

$$F_G = \rho_{Stein} g V$$

$$F_A = \rho_{Wasser} g V$$

Laut Angabe ist  $F_G = F_A + 100 \text{N}$

$$\rho_{Stein} g V = \rho_{Wasser} g V + 100 \text{N}$$

$$V = \frac{100 \text{N}}{g(\rho_{Stein} - \rho_{Wasser})} = \frac{100 \text{N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})} = 0.00667 \text{m}^3$$

$$F_G = \rho_{Stein} g V = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.00667 \text{m}^3 = 167 \text{N}$$

- 7) Beim schwimmenden Eisberg herrscht Gleichgewicht zwischen dem Gewicht und dem Auftrieb. Der Auftrieb wird aber nur durch das eingetauchte Volumen ( $V'$ ) bewirkt. somit gilt:

$$F_G = F_A$$

$$g \cdot \rho_{Eis} V = g \cdot \rho_{Wasser} V'$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho_{Eis}}{\rho_{Wasser}} = \frac{900}{1000} = 0.9$$

Das eingetauchte Volumen beträgt 90% des Gesamtvolumens, der herausragende Teil 10%.

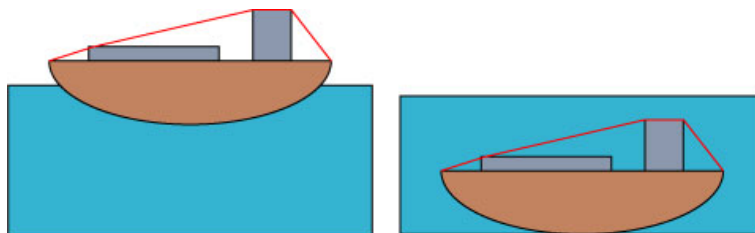
- 8) Der Eisbrocken hat ein Gewicht von  $F_G = g \rho_{Eis} V_{Eis}$ . wird das Eis geschmolzen, ändert sich das Volumen, nicht aber das Gewicht. somit gilt:  $F_G = g \rho_{Eis} V_{Eis} = g \rho_{Wasser} V_{Wasser}$ . Das eingetauchte Volumen  $V'$  ist 90% von  $V_{Eis}$ , also  $V' = 0.9 V_{Eis}$ . In die Gleichung für das Gewicht eingesetzt erhält man:

$$g \rho_{Eis} V_{Eis} = g \rho_{Wasser} V_{Wasser} \quad 900 \cdot \frac{V'}{0.9} = 1000 V_{Wasser}$$

$$V' = V_{Wasser}$$

Dieses Ergebnis bedeutet, dass das Volumen des aus dem Schmelzen entstandenen Wassers gleich ist, wie das Volumen des eingetauchten Teils des Eisblocks. Somit ändert sich der Wasserspiegel nicht.

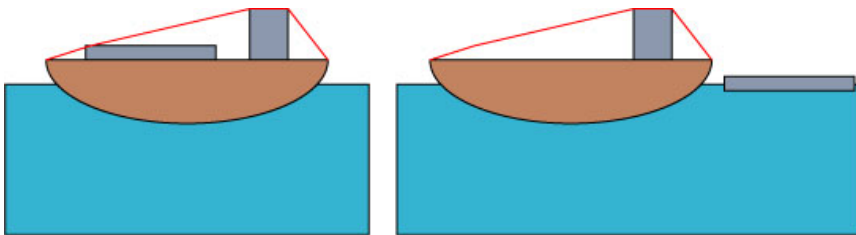
- 9) Wenn das Schiff schwimmt, verdrängt es so viel Wasser, wie sein Volumen unter Wasser ausmacht. Dazu zählen auch die Volumsteile, welche eine kleinere Dichte als Wasser haben. Sinkt das Schiff, werden z.B. die offenen Lufträume, die vorher unter der Wasserlinie waren, mit Wasser gefüllt. Das verdrängte Volumen umfasst nur mehr einen Wert, der sich aus dem Gewicht des Schiffes ergibt. Dieses ist kleiner als zuvor und der Wasserspiegel im Hafenbecken sinkt.



- 10) Die Tragkraft ist gleich der Differenz zwischen Auftrieb  $F_A$  im voll eingetauchten Zustand und Gewicht  $F_G$  des Baumstammes. Es gilt:  $F_A = g\rho_{Wasser}V$  und  $F_G = g\rho_{Holz}V$ .  
 Die Differenz ist:  $F_{Trag} = F_A - F_G = g\rho_{Wasser}V - g\rho_{Holz}V = gV(\rho_{Wasser} - \rho_{Holz}) =$   
 $= 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0.5 m^3 \cdot (1000 - 600) \frac{kg}{m^3} = 2000 N$   
 Die Anzahl Schiffbrüchiger mit je 100 N Belastung beträgt:  $\frac{2000 N}{100 N} = 20$ .
- 11) Beim Atmen wird Luft in die Lunge eingesogen und das Körpervolumen wird dabei etwas grösser. Das Gewicht der eingesogenen Luft ist praktisch vernachlässigbar. Die Dichte  $\rho = \frac{F_G}{V}$  wird kleiner, weil  $V$  etwas grösser geworden ist.  
 Im Salzwasser müssen wir zusätzliche Schwimmbewegungen machen, damit der Kopf über Wasser bleibt, weil die Dichte des Kopfbereiches grösser als die Dichte von Wasser ist.
- 12) Wenn der Körper noch im Schiff liegt, verdrängt er so viel Wasser, wie seinem Gewicht angemessen ist. Ist er aber einmal über Bord und versinkt er, wird er nur mehr seinem Volumen entsprechend Wasser verdrängen. Das ist aber nun weniger als vorher. Der Wasserspiegel im Hafenbecken sinkt.



- 13) Schwimmt der Körper, nachdem er über Bord gegangen ist, verdrängt er nur so viel Wasser, wie das eingetauchte Volumen ausmacht. Die Wasserverdrängung ist somit gleich wie vorher, als der Körper im Schiff gelegen ist.. Der Wasserspiegel bleibt im Hafenbecken gleich.





# Kapitel 10 Ungedämpfte Schwingung

## Lernziele

- Harmonische Schwingungen und gedämpfte Sinusschwingungen erkennen und mathematisch beschreiben können.
- Die grundlegenden Begriffe aus der Schwingungslehre kennen (Frequenz, Periodenlänge, Amplitude, Elongation, Periodizität)
- Das Zustandekommen von Schwebungen erklären und die Schwebungsfrequenz berechnen können.

## 10.1 Beispiele und Definition

Im Alltag kann man viele schwingende Systeme beobachten. Das Pendel in einer Pendeluhr oder die Unruhe bzw. Der Schwingquarz in einer Armbanduhr sind Beispiele. Im Bauwesen beobachtet man mechanische Schwingungen von Bauteilen wie Balken oder Platten. Ebenso zählen akustische Schwingungen mit hörbaren Tönen dazu. In physikalischen Versuchen werden wir speziell die Schwingung von Federpendeln und von Fadenpendeln studieren. Dabei fragen wir, wie eine Schwingung zu definieren ist.

### 10.1.1 Physikalische Beobachtungen

Um physikalische Erkenntnisse zu gewinnen, ist es nötig, Vorgänge in der Natur zu beobachten. Oftmals laufen Naturvorgänge unkontrolliert ab, sodass Beobachtungen schwierig sind. Deshalb werden gezielt Experimente eingerichtet, bei denen die Rahmenbedingungen festgelegt und auch immer wieder verändert werden können. Experimente können meist auch beliebig oft wiederholt werden. Für das Beobachten und das Aufzeichnen der Ergebnisse werden hier ein paar Tipps gegeben.

#### Anlage

- Habe ich die Anlage skizziert? Ansichtsskizze / Übersichtsskizze / Prinzipskizze
- Habe ich eine Skizze der elektrischen Schaltung?
- Habe ich eine Stückliste der verwendeten Geräte?
- Welche Messbereich haben die Messgeräte?

#### Ablauf

- Habe ich den zeitlichen Ablauf protokolliert?
- Habe ich die Messwerte in einer Tabelle erfasst?
- Habe ich mehrere Versuche durchgeführt?
- Habe ich verschiedene Anfangsbedingungen realisiert?
- Sind beim Ablauf besondere oder merkwürdige Erscheinungen aufgetreten?

#### Auswertung

- Habe ich die Beziehung zwischen Messwerten graphisch dargestellt?
- Habe ich ein mathematisches Modell für den Vorgang oder die Beziehung zwischen Messgrößen?
- Wie gross ist die Genauigkeit der Messungen?
- Habe ich mir ein Urteil über mögliche Beobachtungs- oder Messfehler gebildet?
- Habe ich die Resultate kritisch hinterfragt?

### 10.1.2 Federpendel

**Experiment:** An einer Schraubenfeder hängt ein Gewichtstück mit der Masse  $m$ . Die Feder wird nach unten ausgelenkt und dann losgelassen. Das Gewichtstück schwingt auf und ab. Über eine Vorrichtung wird die Bewegung des Federpendels mit dem Computer aufgezeichnet. Konkret erhält man Kurven für die Position des Gewichtsstücks  $s$ , seine Momentangeschwindigkeit  $v$  und seine momentane Beschleunigung  $a$ . Der Plot zeigt, dass es sich bei den Graphen um Sinuskurven handelt.

Wir halten fest: Das Federpendel führt eine sinusförmige Schwingung aus. Eine sinusförmige Schwingung wird als *harmonisch* bezeichnet.

### 10.1.3 Fadenpendel

**Experiment:** An einem Faden hängt eine kleine Metallkugel. Wird die Kugel aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen, bewegt sie sich in die Ruhelage zurück und schwingt darüber hinaus etwa gleich weit aus, wie sie zu Beginn auf der anderen Seite gestartet ist. Die Kugel (sie repräsentiert einen Massenpunkt) führt eine Schwingung aus. Ob sie auch harmonisch ist, muss noch untersucht werden.

Die permanente Aufzeichnung der Position ist hier nicht so einfach wie beim Federpendel, aber wir können die Zeit für eine Hin- und Herbewegung, die *Periodenlänge* oder *Schwingungsdauer* mit der Stoppuhr messen.

**Experiment:** An einem Balken sind mehrere Fadenpendel aufgehängt. Die beiden langen Pendel haben Kugeln aus verschiedenem Material (Metall und Holz) angehängt. Werden die beiden *gleich langen* Pendel ausgelenkt, kann man beobachten, dass sie mit gleicher Periodenlänge schwingen. Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels ist also unabhängig von der Masse des Pendels.

**Experiment:** An einem Balken sind mehrere Pendel unterschiedlicher Länge aufgehängt. Die Fadenlängen verhalten sich  $1 : 2 : 8$ . Man kann beobachten, dass das ganz lange Pendel eine Schwingungsdauer hat, welche doppelt so gross wie die Schwingungsdauer des mittleren Pendels ist. Wird also die Fadenlänge vierfacht, verdoppelt sich die Schwingungsdauer. Generell könnte man vermuten, dass die Schwingungsdauer indirekt proportional zum Quadrat der Fadenlänge ist.

**Definition** Eine mechanische Schwingung ist die periodische Hin- und Herbewegung eines Massenpunktes.

Periodisch bedeutet, dass dieselbe Bewegung immer wieder in der gleichen Art auftritt. In einem Auslenkungs-Zeit-Diagramm erkennt man dies durch die Wiederholung derselben Kurventeile

### 10.1.4 Begriffe

**Elongation** Die Elongation ist die Auslenkung eines Pendels aus der Ruhelage. Sie ist eine Weggrösse und wird in m (Meter) gemessen.

**Amplitude** Die Amplitude einer Schwingung ist die maximale Auslenkung aus der Ruhelage.

**Periodenlänge** Unter der Periodenlänge oder Schwingungsdauer  $T$  versteht man die Zeit für eine Hin- und Herbewegung. Die Masseinheit von  $T$  ist die Sekunde (s).

**Frequenz** Die Frequenz  $f$  einer Schwingung gibt die Anzahl von Hin- und Herbewegungen in einer Sekunde an. Ihre Masseinheit ist  $[f] = \text{s}^{-1} = \text{Hz}$  (Hertz)

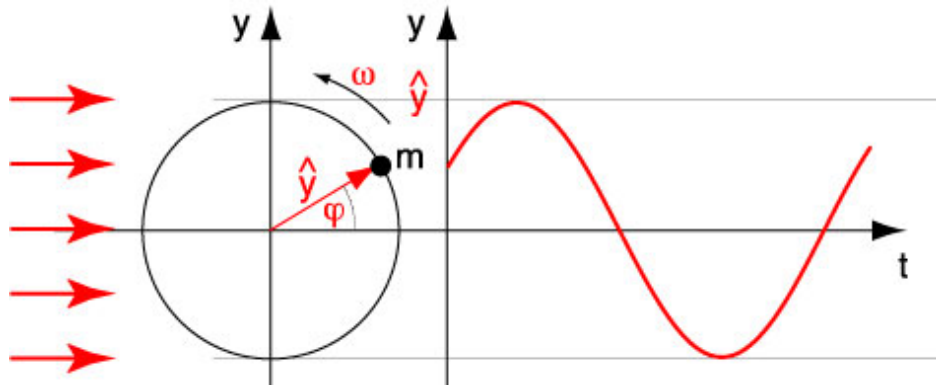
**Winkelgeschwindigkeit** Da die Schwingung mit einer Kreisbewegung verglichen wird, benützt man die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  auch zur Beschreibung der Schwingungsbewegung. Die Masseinheit von  $\omega$  ist  $\text{s}^{-1}$ . Zwischen Frequenz  $f$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und Periodenlänge  $T$  bestehen folgende Beziehungen:

$$f = \frac{1}{T} \text{ und } \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

## 10.2 Ungedämpfte Schwingungen

### 10.2.1 Kreisbewegung und harmonische Schwingung

**Experiment:** Ein Körper rotiert auf einem Kreis. er wird von einer Lampe beleuchtet, sein Schatten fällt auf die Wandtafel. Dort kann man eine Hin- und Herbewegung des Schattens beobachten. Wenn man z.B. mit der Kreide dem Schattenbild folgt und dabei die Wandtafel nach oben unten verschiebt, wird die Bewegung des Schattens zeitlich aufgelöst und es entsteht eine Orts-Zeit-Kurve. Bei genauer Erfassung dieser Kurve wird man eine Sinuskurve beobachten können.



Die Abbildung zeigt die Projektion einer Kreisbewegung auf die  $y$ -Achse. Die  $y$ -Ausschläge verhalten sich nach einer Sinusfunktion. Eine solche Sinusschwingung heisst *harmonisch*.

### 10.2.2 Schwingungsgleichung

Das Beispiel mit der Projektion der Kreisbewegung auf eine Achse ergibt eine Sinuskurve. Man kann Sie folgendermassen darstellen. Der Radius des Kreises ergibt die maximale Auslenkung, also die *Amplitude*  $\hat{y}$ . Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist ja definiert als  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ . Daraus kann man den in der Zeit  $t$  überstrichenen Winkel zu  $\omega t$  berechnen. Für die Beschreibung der Auslenkung, also des  $y$ -Wertes, der *Elongation* der Schwingung erhält man:

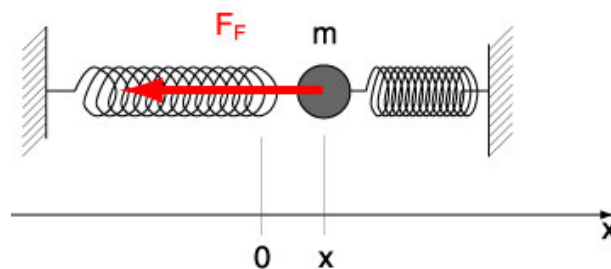
$$y = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi)$$

Da die Cosinuskurve gleich einer im  $\frac{\pi}{2}$  nach links verschobenen Sinuskurve ist, beschreiben auch Cosinuskurven harmonische Schwingungen.

### 10.2.3 Mathematisierung der Pendelschwingungen

#### Federpendel

Wir betrachten für die mathematische Auswertung ein horizontales, reibungsfrei gelagertes Federpendel.



Die Federkonstante der beiden Federn ist mit  $D$  gegeben. Die Abbildung zeigt das Pendel in der ausgelenkten Position mit der Federlängenänderung  $\Delta x = x - 0 = x$ . Die Federkraft ist die einzig wirkende Kraft an der Masse  $m$ .

Somit kann man für die resultierende Kraft an der Masse  $m$  ansetzen:  $F_{res} = m \cdot a = -Dx$ .

Die Momentanbeschleunigung ist die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit. Sie ist somit die 1. Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Es gilt:  $a = \dot{v}$ . Und da die Momentangeschwindigkeit  $v$  gleich der zeitlichen

Änderung der Position  $x$  ist, ist also  $v$  gleich der 1. Ableitung der Positionsfunktion nach der Zeit. Es gilt:  $v = \dot{x}$ . Somit ist die Momentanbeschleunigung gleich der 2. Ableitung der Positionsfunktion nach der Zeit:  $a = \dot{v} = \ddot{x}$ .

Aus dem oben aufgeschriebenen Ansatz für die resultierende Kraft wird die folgende Differentialgleichung:

$$m \cdot \ddot{x} = -Dx$$

oder umgeformt:

$$m \cdot \ddot{x} + Dx = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + \frac{D}{m} = 0$$

Für diese Differentialgleichung vermuten wir die Lösung  $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ . Diese Funktion und ihre 2. Ableitung in die Differentialgleichung eingesetzt müsste demnach eine wahre Aussage ergeben.

$$\begin{aligned} x &= A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{x} &= \omega A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x} &= -\omega^2 A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$m \cdot (-\omega^2 A \cdot \sin(\omega t + \varphi)) + D \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

Nach dem Dividieren durch  $A$  kann man feststellen, dass die Differentialgleichung für alle  $t$  erfüllt ist, wenn  $m\omega^2 = D$  ist. Also kann man für die Kreisfrequenz schliessen, dass sie folgendermassen berechnet werden kann:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Mit  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  gilt ferner:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{und} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Die Lösung der Differentialgleichung hat eine Sinuskurve ergeben. Somit haben wir eine Sinusschwingung, also eine *harmonische* Schwingung erhalten. Beim Ansatz der Differentialgleichung kann man sehen, dass die resultierende Kraft  $m\ddot{x}$  zu jedem Zeitpunkt direkt proportional zur Auslenkung  $x$  ist. Es gilt ja:  $m \cdot \ddot{x} = -Dx$ . Die Tatsache, dass die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist, kann man als Erkennungsmerkmal für eine *harmonische Schwingung* verwenden.

## Fadenpendel

Das Fadenpendel mit einer punktförmigen Masse  $m$  an einem Faden der Länge  $l$  heisst auch *mathematisches Pendel*. Wird das Fadenpendel aus seiner Ruhelage ausgelenkt, so ist die Gewichtskraft für die Zurückführung des Pendels in die Ruhelage verantwortlich.

[2mm]

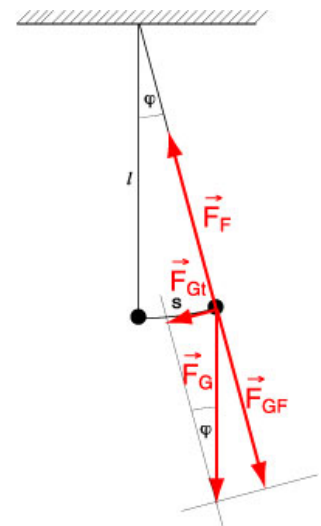
Die Gewichtskraft  $F_G$  kann in eine Komponente parallel zum Faden  $F_{GF}$  und eine Komponente  $F_{Gt}$  senkrecht zum Faden und somit tangential zum Kreisbogen zerlegt werden. Der Faden kompensiert die Komponente  $F_{GF}$  durch die Fadenkraft  $F_F$ . Als resultierende Kraft verbleibt also  $F_{Gt}$ , welche für die Beschleunigung der Masse verantwortlich ist. Damit erhält man wiederum eine Differentialgleichung. Die Auslenkung wird entlang des Kreisbogens gemessen, der hier mit  $s$  bezeichnet wird.

$$m\ddot{s} = -F_{Gt} = -F_G \cdot \sin \varphi = -mg \sin \varphi$$

Der Winkel  $\varphi$ , der im Bogenmass gemessen wird, kann mit der Fadenlänge  $l$  ausgedrückt werden. Er misst ja die Länge des Bogens im Einheitskreis und ergibt  $\varphi = \frac{s}{l}$ . Umgeformt erhält man:

$$m\ddot{s} = mg \sin \left( \frac{s}{l} \right)$$

Diese Gleichung zeigt uns aber, dass hier keine direkte Proportionalität zwischen der resultierenden Kraft und der Auslenkung  $s$  besteht. Vielmehr kommt das  $s$  als Teil des Arguments der Sinusfunktion vor. Das



bedeutet, dass das Fadenpendel keine harmonische Schwingung ausführt.

Für kleine Auslenkwinkel  $\varphi$  (in der Regel bis etwa  $6^\circ - 8^\circ$  kann man den  $\sin \varphi$  durch  $\varphi = \frac{s}{l}$  ersetzen. dann erhält man:

$$m\ddot{s} = mg\frac{s}{l}$$

In dieser Gleichung erscheint nun die resultierende Kraft proportional zur Auslenkung  $s$ , sodass wir also für kleine Winkel ein angenähert harmonische Schwingung erhalten. Durch eine kleine Umformung ergibt sich nun:

$$\ddot{s} + \frac{g}{l} \cdot s = 0$$

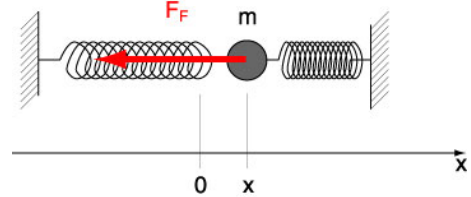
Im Vergleich mit der entsprechenden Gleichung beim Federpendel kann man für das  $\omega^2$  anstelle  $\frac{D}{m}$  nun  $\frac{g}{l}$  einsetzen. Das führt zu folgenden Beziehungen für die Frequenz  $f$  und die Schwingungsdauer  $T$ :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{und} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die Masse kommt hier nicht mehr vor, was bedeutet, dass die Schwingungsdauer des Fadenpendels (bei kleinem Winkel) nicht von der Masse  $m$  abhängt.

### 10.3 Impuls und Energie beim Federpendel

Um die Schwingung in Gang zu bringen, wird die Schwingmasse aus der Ruhelage verschoben. Dabei wird eine Feder auseinandergezogen, die andere zusammengedrückt. Somit beobachten wir auf der einen Seite eine Zugbelastung und auf der anderen Seite eine Druckbelastung. Diese Erscheinungen sind ein sicheres Zeichen für Impulsstrom. Nach der Impulsstromregel fließt bei Druckbelastung der Impulsstrom in positive Richtung, bei Zugbelastung in negative Richtung. Es fließt also permanent Impulsstrom von der Schwingungsmasse weg. Solange die Masse durch einen Mechanismus festgehalten wird, wird der Impulsabfluss durch die Halterung mit Impulszufluss ausgeglichen. Wird die Masse aber freigegeben, gibt es keinen zufließenden Impuls mehr. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeit, die anfangs Null war, nun negativ wird, die Schwingungsmasse wird in negative Koordinatenrichtung beschleunigt und bewegt sich nach links. Die Federn werden dabei entspannt. Wenn dann die Federn ganz entspannt sind, fließt kein Impulsstrom mehr.



Mit dem Impulsstrom fließt auch Energiestrom. Es gilt:  $I_W = v \cdot I_p$ . Mit zunehmender Geschwindigkeit wird der Energiestrom größer, jedoch sinkt gleichzeitig der Impulsstrom. Übrigens ist zu beachten, dass bei negativer Geschwindigkeit der Energiestrom in entgegengesetzte Richtung zum Impulsstrom fließt. Hier fließt am Anfang der Impulsstrom aus der Schwingungsmasse heraus. Somit fließt Energiestrom in die Schwingungsmasse hinein. Das zeigt sich ja auch in der zunehmenden kinetischen Energie der Masse. Die Energie, die den Energiestrom speist, stammt aus der in den gespannten Federn gespeicherten Energie.

Wenn die Schwingungsmasse die Nulllage erreicht hat, wird der Energiestrom zu Null, die Federn sind jetzt entspannt und der Betrag der Geschwindigkeit der Pendelbewegung wird kleiner, denn die Pendelmasse wird nun ihren negativen Impuls wieder auffüllen, d.h. gegen Null hin verändern wollen. Das geschieht durch von den Federn zufließenden Impulsstrom. Dabei wird jetzt die linke Feder zusammengedrückt und die rechte Feder gespannt. Die Druck- bzw. Zugverformung sind ein untrügliches Zeichen für den Impulsstrom, der von den Federn in die Schwingungsmasse fließt. Da die Geschwindigkeit noch immer negativ ist, wird der mit dem Impulsstrom verbundene Energiestrom aus der Schwingungsmasse in die Federn fließen, wodurch eine Umlagerung der kinetischen Energie der Schwingungsmasse auf die Spannungsenergie der Federn resultiert. Insgesamt kann man also sagen, dass die Energie von den gespannten Federn zur bewegten Masse und wieder zurück pendelt.

## 10.4 Aufgaben

- 1) Als Sekundenpendel bezeichnet man ein Fadenpendel, welches für einmal Hin bzw. einmal Her genau eine Sekunde braucht. Welche Länge muss der Faden auf der Erde haben?
- 2) Wie muss man die Masse eines ungedämpften Federpendels verändern, damit sich die Frequenz halbiert?

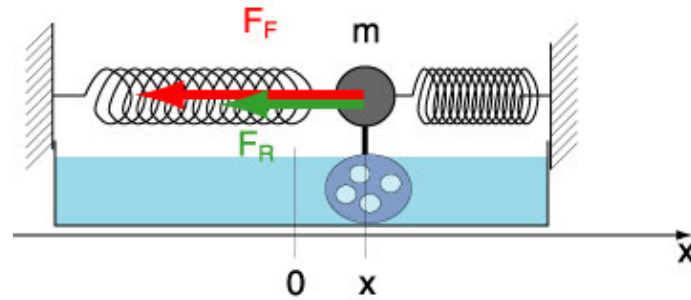
## Lösungen

- 1) 0.994 m
- 2)  $m_2 = 4m_1$

# Kapitel 11 Gedämpfte Schwingung, Drehschwingungen

## 11.1 Gedämpfte Schwingungen

In der Realität gibt es keine freien ungedämpften mechanischen Schwingungen. Immer tritt irgend eine Form von Reibung oder ein anderer Widerstand auf. Die Reibung zwischen Festkörpern ist nur von der Normalkraft und vom Material abhängig. Bei einer Dämpfung der Schwingung durch eine Flüssigkeitsbremse ist die Widerstandskraft proportional zur Momentangeschwindigkeit. Der Luftwiderstand hingegen verändert sich mit dem Quadrat der Momentangeschwindigkeit. In technischen Systemen tritt sehr oft die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung auf, sodass hier nur diese behandelt wird.



Die Bremskraft in einer Flüssigkeit bei laminarer Strömung ist proportional zur Momentangeschwindigkeit. Die Richtung der Kraft ist entgegengesetzt zur Geschwindigkeitsrichtung. Somit kann man ansetzen:  $F_R = -\beta \cdot v = -\beta \dot{x}$

Für die resultierende Kraft gilt dann:

$$F_{res} = m\ddot{x} = -Dx - \beta\dot{x}$$

und umgeformt:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

Wir bezeichnen  $\frac{D}{m}$  mit  $\omega_0^2$  und den neuen Ausdruck  $\frac{\beta}{m}$  mit  $2\delta$ . Somit wird die Differentialgleichung zu:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Als Lösung für diese Differentialgleichung kann man eine Sinusschwingung vermuten, deren Amplitude abfällt, z.B. mit einer fallenden Exponentialfunktion. (Exponentialfunktionen spielen in der Beschreibung von natürlichen Prozessen eine grosse Rolle. Deshalb kann man den Ansatz einmal so versuchen.

$$\text{Ansatz: } x = A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Die Ableitungen sind dann:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\delta A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + \omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) = A e^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)] \\ \ddot{x} &= -\delta A e^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)] + A e^{-\delta t} [-\delta \omega \cos(\omega t + \varphi) - \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)] = \\ &= A e^{-\delta t} [(\delta^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \varphi) - 2\delta \omega \cos(\omega t + \varphi)] \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt zu:

$$A e^{-\delta t} [(\delta^2 - \omega^2) \sin(\omega t + \varphi) - 2\delta \omega \cos(\omega t + \varphi)] + 2\delta A e^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)] + \omega_0^2 \cdot A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

Man kann nun durch  $A e^{-\delta t}$  dividieren und nach Sinus und Cosinus ordnen:

$$\begin{aligned} (\delta^2 - \omega^2 - 2\delta^2 + \omega_0^2) \sin(\omega t + \varphi) + (-2\delta \omega + 2\delta \omega) \cos(\omega t + \varphi) &= 0 \\ (-\omega^2 - \delta^2 + \omega_0^2) \sin(\omega t + \varphi) + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung ergibt eine wahre Aussage, wenn  $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$  ist.

$\omega_0$  ist die Kreisfrequenz des ungedämpften Pendels,  $\delta$  ist ein Mass für die Dämpfung und  $\omega$  ist dann die Kreisfrequenz der gedämpften Pendelschwingung. Es gilt:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Je grösser die Dämpfung ist, umso mehr weicht die Frequenz der gedämpften Schwingung von der Frequenz der ungedämpften ab. Sie wird bei der gedämpften Schwingung immer kleiner als bei der ungedämpften sein.

Was aber geschieht, wenn die Dämpfung sehr stark wird. Irgendwann wird das ausgelenkte Pendel keine Schwingung mehr machen sondern von der Auslenkposition zurück in die Nullposition gehen, ohne diese zu überschreiten. Die Lösung der Differentialgleichung wird dann keine Sinusfunktion sein. Es ergeben sich dann Lösungen mit Exponentialfunktionen vom Typ  $y = A \cdot e^{-kt}$ . Somit kann man drei Fälle beim Verhalten eines gedämpften Pendels unterscheiden. Der oben ausführliche dargestellte *Schwingfall* liefert als Lösung eine Sinuskurve. Bei starker Dämpfung ( $\delta > \omega_0$ ) spricht man vom *Kriechfall*. Und der Übergang zwischen diesen beiden Fällen, wenn also  $\delta = \omega_0$  ist, heisst *aperiodischer Grenzfall*.

In der Bautechnik sind alle drei Fälle von Bedeutung. So können Bauteile durch externe Anregung ins Schwingen geraten (Erdbeben, Verkehr). Da jede Konstruktion eine gewisse Elastizität hat, ist das Studium des Schwingverhaltens ein wichtiges Aufgabenfeld für den Bauingenieur. Durch konstruktive Vorkehrungen kann man das Schwingverhalten von Bauteilen und Bauwerken positiv beeinflussen.

In praxisnahen Modellen werden meist schwingungsfähige Systeme durch eine geeignete Kombination von Federpendel dargestellt und Simulationen durch Lösen der zugehörigen Differentialgleichungssysteme gerechnet. Deshalb ist für die Diskussion von Schwingungsvorgängen in der Baupraxis die Schwingung des Federpendels ein zentrales Element.

## 11.2 Drehpendel

Das im Labor beobachtete Drehpendel bewegt sich analog wie ein Federpendel. Statt der Masse  $m$  muss man das Trägheitsmoment  $J$  und statt der Ortskoordinate  $x$  den Winkel  $\varphi$  einsetzen. Die Dämpfung wird elektromagnetisch mit Wirbelströmen hervorgerufen. Sie lässt sich durch Verändern des magnetfelderzeugenden Stromes beeinflussen. Diese Dämpfung ist gemäss Theorie proportional zur Momentangeschwindigkeit und somit zur Winkelgeschwindigkeit des Pendels. Dann erhält man folgende Differentialgleichung:

$$J\ddot{\varphi} = -D \cdot \varphi - \beta\dot{\varphi} \quad \text{mit } D = \text{Direktionsmoment der Feder und } \beta = \text{Dämpfungskonstante}$$

$$J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{J}\dot{\varphi} + \frac{D}{J}\varphi = 0$$

Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:  $\frac{\beta}{J} = 2\delta$  und  $\frac{D}{J} = \omega_0^2$

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

Die Lösung ist gleich wie beim Federpendel:

$$\varphi(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Die Schwingungsfrequenz wird mit zunehmender Dämpfung kleiner. Für  $\delta = \omega_0$  gibt es keine Schwingung mehr. Der *aperiodische Grenzfall* ist erreicht, das Pendel kehrt in die Ruhelage in möglichst kurzer Zeit zurück. Wird  $\delta$  weiter vergrössert, wird die Rückkehrzeit in die Ruhelage ohne Schwingung weiter zunehmen. Dieser Fall wird als *Kriechfall* bezeichnet.

## 11.3 Drehimpuls und Drehschwingung

Analog zum Fall des Federpendel, bei dem die Frage um den Impulszu- bzw. -abfluss diskutiert wurde, fragen wir bei der Rotation, was mit dem Drehimpuls  $\vec{L}$  geschieht. Der Drehimpuls ist ja die Grundgrösse bei der Rotation. Er ist eine mengenartige Grösse, die erhalten bleibt.

Wenn sich das Drehpendel in einer ausgelenkten Position befindet, ist die Feder gespannt. Es kann ein Drehimpulsstrom beobachtet werden, der je nach Schwingungszustand einen Zufluss oder einen Abfluss von Drehimpuls darstellt. An den Drehimpuls ist Energie gebunden nach der Beziehung  $I_W = \omega \cdot I_L$ . Je nach Richtung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und der Situation des Pendels fließen  $I_W$  und  $I_L$  in dieselbe oder in entgegengesetzte Richtung.



## 11.4 Das Fadenpendel und die Rotationsbewegung

Im vorherigen Kapitel haben wir einen Ansatz für das Fadenpendel nur mit den Kräften gemacht. Das Fadenpendel macht aber eigentlich eine Drehbewegung, deshalb ist es angebracht, den Ansatz über die Rotation zu versuchen.

Die resultierende Kraft ist  $\vec{F}_{Gt}$ . Sie erzeugt ein Drehmoment

$$M = -l \cdot F_{Gt} = -l \cdot mg \sin \varphi. \text{ Dann gilt:}$$

$$J\ddot{\varphi} = -l \cdot mg \sin \varphi$$

Mit der Kleinwinkelbeziehung  $\sin \varphi \approx \varphi$  ergibt sich:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{lmg}{J}\varphi \quad J = ml^2$$

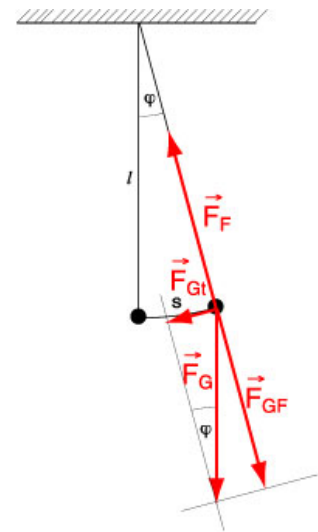
$$\ddot{\varphi} + \frac{lmg}{ml^2}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

Die Lösung ist:  $\varphi = \hat{\varphi} \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0)$

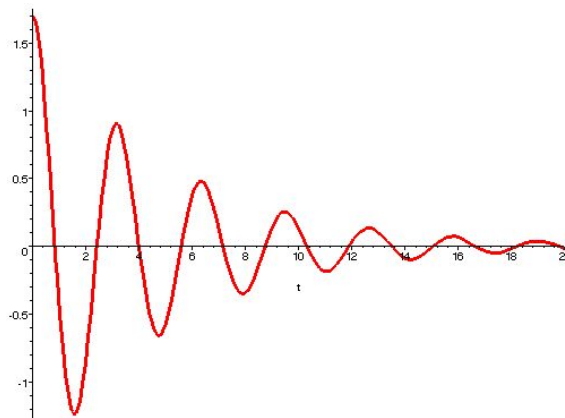
Wie schon in vorherigen Kapitel gezeigt gilt auch bei diesem Ansatz:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Daraus kann wieder die Periodendauer  $T$  und die Frequenz  $f$  ermittelt werden.



## 11.5 Aufgaben

- Ein horizontales Federpendel hat eine Masse von  $m = 10 \text{ kg}$ , die Federkonstante ist  $D = 250 \text{ N/m}$ . Das Pendel ist gedämpft, der Reibungsfaktor beträgt  $\beta = 80 \text{ kg/s}$ .
  - Berechnen Sie die Abklingkonstante  $\delta$  und die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften sowie des gedämpften Pendels.
  - Zeigen Sie mit den berechneten Werten, dass das Pendel tatsächlich eine gedämpfte Schwingung ausführt, wenn man es aus der Ruhelage auslenkt.
  - Schreiben Sie die allgemeine Lösung für die Schwingungsgleichung des Pendels auf.
  - Welche Schwingungsgleichung erhält man mit den Anfangswerten  $x(0) = 0.6 \text{ m}$  und  $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$ ?
- Das Diagramm zeigt den Plot einer gedämpften Schwingung an (Zeit in s, Auslenkung in cm).



Lesen Sie aus dem Diagramm geeignete Werte ab und bestimmen Sie damit die Eigenkreisfrequenzen des gedämpften sowie des ungedämpften Pendels und die Abklingkonstante  $\delta$ . Schreiben Sie auch eine Schwingungsgleichung für die im Diagramm dargestellte Kurve auf.

- Wie müsste man die Masse eines Federpendels mit der Federkonstanten  $D = 12 \text{ N/m}$  und dem Reibungsfaktor  $\beta = 2 \text{ kg/s}$  wählen, damit gerade keine Schwingung zustande käme (aperiodischer Grenzfall)?

- 4) Wie müsste die Masse eines gedämpften Federpendels verändert werden, damit die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Pendels verdoppelt würde?
- 5) Wie gross müsste die Abklingkonstante in Aufgabe 4) sein, damit die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Pendels doppelt so gross würde wie jene des gedämpften Pendels?
- 6) Wie muss man die Länge des Fadens eines Fadenpendels verändern, damit die Periodenlänge verdoppelt bzw vervierfacht wird?

## Lösungen

- 1) a)  $\delta = 4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 5 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega = 3 \text{ s}^{-1}$   
 b)  $\omega_0 > \delta \Rightarrow$  Schwingfall  
 c)  $\varphi = -0.644 \text{ rad} = -36.87^\circ$ ,  $A = -1 \text{ m}$
- 2)  $T = 3.2 \text{ s}$ ,  $\omega = 1.96 \text{ s}^{-1}$ ,  $\delta = 0.199 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 1.97 \text{ s}^{-1}$ ,  $\hat{y} = 1.7 \text{ cm}$
- 3)  $m = 0.833 \text{ kg}$
- 4)  $m_2 = \frac{Dm_1^2 \pm \sqrt{D^2 m_1^4 - 16Dm_1^3 \beta^2 + 16\beta^4 m_1^2}}{8Dm_1 - 8\beta^2}$
- 5)  $\delta_2 = \frac{3}{4} \frac{D}{m}$
- 6) bei Verdoppelung von  $T$  muss  $\ell$  vervierfacht werden, bei Vervierfachung von  $T$  muss  $\ell$  mit dem Faktor 16 multipliziert werden.

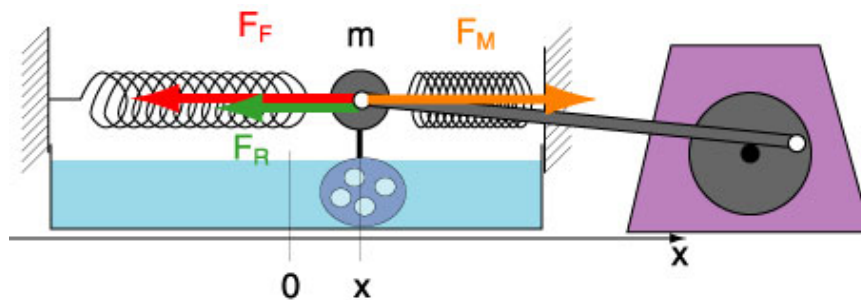
## Kapitel 12 Angeregte Schwingung, Resonanz

### 12.1 Angeregte Schwingung, Resonanz

Durch externe Einwirkung kann ein schwingungsfähiges System zum Mitschwingen angeregt werden. Unsere Beobachtungen zeigen, dass das Mitschwingen wesentlich vom Verhältnis zwischen der Eigenfrequenz des schwingungsfähigen System und der Erregerfrequenz abhängt. Wir werden diese Beziehung am gedämpften Federpendel konkret diskutieren. Dabei soll das Pendel durch eine sinusförmige Schwingung angeregt werden. Interessant ist zu verfolgen, wie sich die Amplitude der Pendelschwingung in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz entwickelt.

#### 12.1.1 Differentialgleichung des angeregten Federpendels

Wir nehmen das Federpendel aus dem vorherigen Kapitel und regen es durch einen Motor mit Exzenter zum Schwingen an.



Der Motor dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_M$ . Die Kraft, welche der Motor horizontal über die Stange auf das Pendel ausübt, kann man dann mit einer Sinusfunktion darstellen:  $F_M = \hat{F} \cdot \sin(\omega_M t)$ . Somit erhält man als resultierende Kraft auf die Pendelmasse:

$$F_{res} = m\ddot{x} = -Dx - \beta\dot{x} + \hat{F} \cdot \sin(\omega_M t)$$

Nach Umformen und dem Ersatz von  $\frac{\beta}{m}$  durch  $2\delta$  sowie  $\frac{D}{m}$  durch  $\omega_0^2$  ergibt sich:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\hat{F}}{m} \sin(\omega_M t)$$

Die linke Seite beschreibt das Eigenverhalten des Systems, während die rechte Seite den Einfluss der externen Wirkung darstellt. Man nennt die Funktion auf der rechten Seite deshalb auch *Störfunktion*. Die Lösung dieser Differentialgleichung besteht aus zwei Teilen, nämlich der ursprünglichen Lösung bei der gedämpften Schwingung ohne Anregung und einer speziellen Lösung des angeregten Systems. Die Mathematik gibt dafür folgende Gesamtlösung an:

$$x = C \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + A \sin(\omega_M t + \varphi_0)$$

mit  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ,  $A = \frac{\hat{F}}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_M^2)^2 + 4\delta^2\omega_M^2}}$  und  $\varphi_0 = \arctan\left(\frac{2\delta\omega_M}{\omega_M^2 - \omega_0^2}\right)$  (ohne Beweis).

Mit der Zeit wird in der Lösungsgleichung der erste Teil wegen  $e^{-\delta t}$  praktisch vernachlässigbar, sodass der zweite Teil, der durch die Erregerfrequenz  $\omega_M$  charakterisiert ist für die Schwingung des angeregten Federpendels massgebend ist. Dabei ist  $A$  die Amplitude der erzwungenen Schwingung. Man spricht von *Resonanz*, wenn die Amplitude maximal ist. Diese Maximalstelle kann man berechnen, indem man das Minimum des Radikanden im Nenner in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz  $\omega_M$  sucht. Wir bezeichnen diesen Radikanden mit  $R(\omega_M)$ .

$$R(\omega_M) = (\omega_0^2 - \omega_M^2)^2 + 4\delta^2\omega_M^2$$

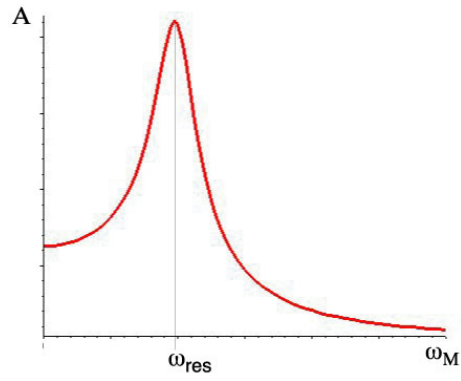
Die 1. Ableitung Null setzen ergibt die Extremalstellen:  $R'(\omega_M) = 2(\omega_0^2 - \omega_M^2) \cdot (-2\omega_M) + 8\delta^2\omega_M$

$$R'(\omega_M) = 0 = 2(\omega_0^2 - \omega_M^2) \cdot (-2\omega_M) + 8\delta^2\omega_M$$

$$0 = -\omega_0^2 + \omega_M^2 + 2\delta^2$$

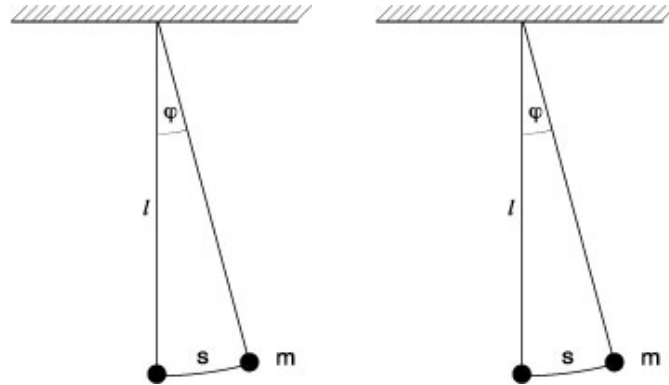
$$\omega_M^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$$
$$\omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Resonanz tritt ein, wenn die Erregerfrequenz in der Nähe der Eigenfrequenz des Pendels liegt. Die Dämpfung beeinflusst den genauen Wert der Resonanzfrequenz. Die Amplitude  $A$  kann auch als Funktion der Erregerfrequenz  $\omega_M$  dargestellt werden. Dabei erhält man die sogenannte Resonanzkurve:

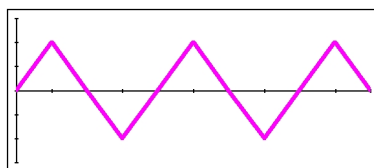


## 12.2 Aufgaben

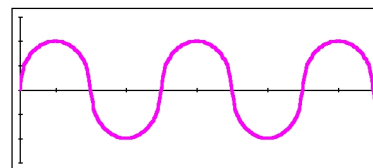
- 1) Mit welcher Frequenz müsste man ein Federpendel mit der Masse  $m = 3$  kg, der Federkonstanten  $D = 12$  N/m und dem Reibungsfaktor  $\beta = 2$  kg/s antreiben, damit Resonanz eintritt?
- 2) Die Abbildungen zeigen ein Fadenpendel in der Ruhelage und im ausgelenktem Zustand.
  - a) Zeichnen Sie im linken Bild alle reellen, auf die Pendelmasse  $m$  wirkenden Kräfte im ausgelenkten Zustand ein.
  - b) Zeichnen Sie im rechten Bild jene Kraft ein, welche im ausgelenkten Zustand das Pendel in die Ruhelage zurück treibt.



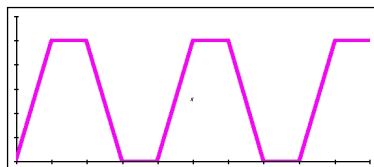
- c) Schreiben Sie die exakte Grösse der rücktreibenden Kraft auf, und zwar als Funktion von der Pendelmasse  $m$ , der Fadenlänge  $\ell$  und der Bogenlänge  $s$ .
- 3) Die folgenden vier Diagramme sind Elongations-Zeit-Diagramme von Schwingungen.
  - a) Welche von diesen Schwingungen sind harmonisch. Geben Sie den dazugehörigen Buchstaben an. Begründen Sie Ihre Wahl mit 2-3 Zeilen Text.



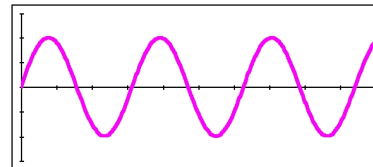
A



B



C



D

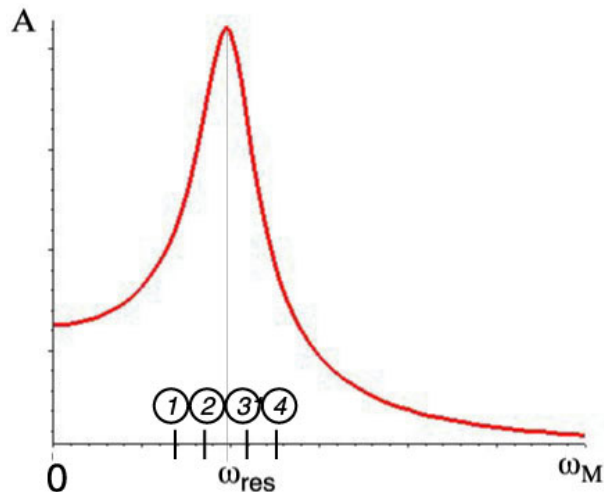
- b) Eine Basstuba ist im Wesentlichen ein Metallrohr von ca. 7 m Länge. In der Luftsäule in diesem Rohr, welches auf beiden Seiten offen ist, kann man verschiedene Töne erzeugen. Welche Frequenz wird man für den tiefsten möglichen Ton (Grundschiwingung) erhalten? Berechnen Sie!
- c) Fortschreitende Wellen transportieren Energie, stehende Wellen nicht. Erklären Sie in ein paar Sätzen, wie Energie in einer stehenden Welle gespeichert ist.

- 4) a) Die Abbildung zeigt die sogenannte Resonanzkurve, d.h. die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude eines gedämpften Federpendels von der Erregerfrequenz (Motorfrequenz)  $\omega_M$ . Neben der Resonanzfrequenz  $\omega_M$  sind bei der Schwingung von Federpendeln zwei weitere Frequenzwerte von Interesse, die Kreisfrequenz des ungedämpften Pendels  $\omega_0$  und die Eigenfrequenz der gedämpften Pendelschwingung  $\omega$ . Diese Kreisfrequenzwerte  $\omega_{res}$ ,  $\omega_0$  und  $\omega$  stehen zueinander in einer Größenbeziehung.

In der Abbildung sind 4 mögliche Positionen für die Lage von  $\omega_0$  und  $\omega$  mit den Nummern 1, 2, 3, 4 eingezeichnet. Geben Sie die Nummer an, bei welcher Sie die Position von  $\omega_0$  bzw.  $\omega$  sehen.

$\omega_0$  bei Nr.: .....

$\omega$  bei Nr.: .....



- b) Angeblich kann man leichte Balkenbrücken aus Holz leicht zum schwingen bringen, wenn z.B. mehrere Personen im Gleichschritt darüber laufen. Nemen wir an, wir haben einen Steg aus Holzbalken. Die Länge des Steges von Auflager zu Auflager ist 15 m. Der Steg ist 1.5 m breit. Die Holzbalken haben einen Querschnitt von 20 cm x 20 cm und sind in der Länge verlegt.
- Bei welcher Anregungsfrequenz kommt der Steg in die Grundschiwingung, wenn man für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle  $c = 50$  m/s annimmt?
  - Mit welcher Frequenz müsste die Brücke angeregt werden, damit sie in der 2. Oberschwingung schwingen würde?
- c) Geben Sie in ein paar kurzen Sätzen an, was Resonanz bei einem schwingungsfähigen System bedeutet.

## Lösungen

1)  $\omega_{Res} = 1.944 \text{ s}^{-1}$

## Formeln A (auswendig)

### Mechanik

Impuls	$p = m \cdot v$ $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
Impulsbilanz / Grundgesetz der Mechanik	$I_{p1} + I_{p2} + \dots = F_1 + F_2 + \dots = \dot{p}$ $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \dot{\vec{p}}$
Impulsstromstärke $\leftrightarrow$ Energiestromstärke	$I_W = v \cdot I_p$
Gewichtskraft	$F_G = m \cdot g$
Kinetische Energie (Translation)	$W_{kin,transl} = \frac{1}{2}mv^2$
Potentielle Energie	$W_G = mgh$
Mittlere Geschwindigkeit	$v_{mittel} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
Mittlere Beschleunigung	$a_{mittel} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
Geschwindigkeit $\leftrightarrow$ Ort	$v = \dot{x}$
Beschleunigung $\leftrightarrow$ Geschwindigkeit	$a = \dot{v}$
Winkelgeschwindigkeit $\leftrightarrow$ Winkel	$\omega = \dot{\varphi}$
Geschwindigkeit $\leftrightarrow$ Winkelgeschwindigkeit	$v = r \cdot \omega$
Frequenz $\leftrightarrow$ Periode	$f = \frac{1}{T}$
Winkelgeschwindigkeit $\leftrightarrow$ Frequenz	$\omega = 2\pi f$
Zentripetalkraft	$F_{ZP} = mr\omega^2$
Drehimpuls	$L = J \cdot \omega$ $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$
Drehmoment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Grundgesetz der Rotations-Mechanik	$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots = \dot{\vec{L}}$
Trägheitsmoment (Masse $m$ im Abstand $r$ )	$J = mr^2$
Kinetische Energie (Rotation)	$W_{kin,rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$
Druck $\leftrightarrow$ Kraft	$p = \frac{F}{A}$
Schweredruck	$p_s = \rho gh$
Masse $\leftrightarrow$ Volumen	$m = \rho \cdot V$

### Schwingungen

Federkraft	$F_F = -D \cdot x$
Federenergie	$W_F = \frac{1}{2}Dx^2$
Frequenz $\leftrightarrow$ Periode	$f = \frac{1}{T}$
Kreisfrequenz $\leftrightarrow$ Frequenz	$\omega = 2\pi f$
Ungedämpfter Federschwinger	$y(t) = \hat{y} \sin(\omega_0 t + \varphi)$
Gedämpfter Federschwinger	$y(t) = \hat{y} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$ (mit $F_D \sim v$ )

## Formeln B (nicht auswendig)

### Mechanik

Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Standardabweichung

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Relativer Fehler

$$\frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

Gleichmässig beschleunigte Bewegung

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

Trägheitsmoment

allgemein

$$J = \int (V) r^2 dm \approx \sum_i m_i r_i^2$$

Vollzylinder

$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

Vollkugel

$$J = \frac{2}{5} m R^2$$

Schwerpunkt

diskrete Massenverteilung

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

kontinuierliche Massenverteilung

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \int_{(m)} \vec{r} dm$$

Barometrische Höhenformel

$$p(h) = p_0 \cdot e^{\frac{\rho_0 g}{p_0} h}$$

### Schwingungen

Federschwinger

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Fadenpendel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Drehpendel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{J}}$$

Gedämpfter Federschwinger

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\text{mit } F_D = k \cdot v, \delta = \frac{k}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Erzwungene Schwingung Federschwinger

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + C_2) + \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

$$\text{mit } x_E(t) = \hat{x}_E \sin(\omega_E t) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \omega_E^2}} \hat{x}_E$$

$$\bar{P}_{diss} = \frac{k}{2} \hat{v}^2 \quad (\text{im eingeschwungenen Zustand})$$

Resonanz Federschwinger

$$\hat{x}_{max} \text{ bei } \omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$\hat{v}_{max} \text{ bei } \omega_E = \omega_0$$