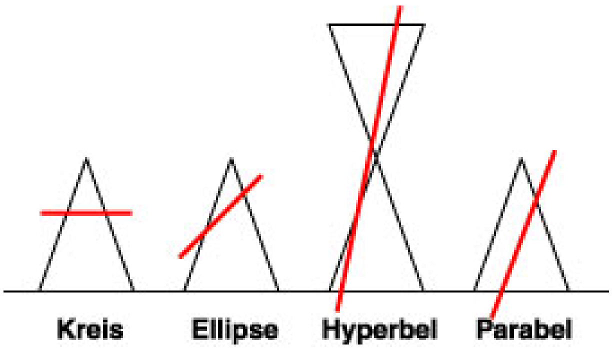
NTB
INTERSTAATLICHE HOCHSCHULE
FÜR TECHNIK BUCHS

Klasse 4ct/4cv
Chur
H. Knoll

Kegelschnitte

Wie der Name sagt, entstehen Kegelschnitte, wenn ein Kegel von einer Ebene geschnitten wird. So entstehen *Kreis*, *Ellipse*, *Hyperbel* und *Parabel*.



Der Kreis

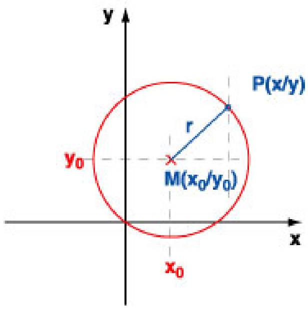
Der Kreis ist die Menge aller Punkte, welche vom Mittelpunkt M den gleichen Abstand r haben.

Aus dieser Definition kann man die Kreisgleichung herleiten. Denn es gilt im rechtwinkeligen Dreieck der Satz von Pythagoras.
Somit ist:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Wird diese Form aufgelöst, erhält man eine Gleichung folgender Art:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$



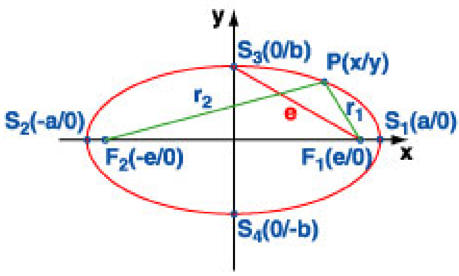
Die Ellipse

Die Ellipse ist die Menge aller Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten (den *Brennpunkten*) konstant ist. $(r_1 + r_2 = 2a)$

Für die zu den Koordinatenachsen symmetrisch liegende Ellipse erhält man die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{oder} \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

a ist die grosse Halbachse, b ist die kleine Halbachse und e ist die Exzentrizität. Das Verhältnis $\frac{e}{a} = \epsilon$ nennt man die numerische Exzentrizität. Sie hat immer einen Wert zwischen 0 und 1.
S_1 und S_2 sind die Hauptscheitel, S_3 und S_4 die Nebenscheitel. F_1 und F_2 sind die Brennpunkte.

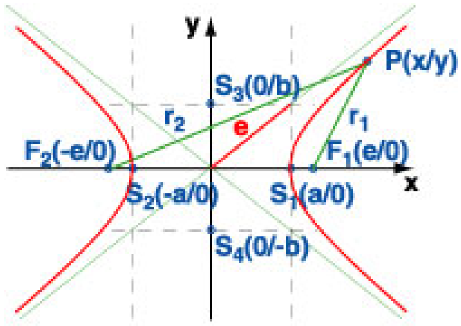


Die Hyperbel

Die Hperbel ist die Menge aller Punkte, für welche die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten (den *Brennpunkten*) konstant ist. ($|r_2 - r_1| = 2a$)

Für die zu den Koordinatenachsen symmetrisch liegende Hyperbel erhält man die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{oder} \qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$



a ist die grosse Halbachse, b ist die kleine Halbachse und e ist die Exzentrizität. Das Verhältnis $\frac{e}{a} = \epsilon$ nennt man die numerische Exzentrizität. Sie hat immer einen Wert grösser 1.
S_1 und S_2 sind die Hauptscheitel, S_3 und S_4 heissen Nebenscheitel, auch wenn sie nicht auf der Hyperbel liegen. F_1 und F_2 sind die Brennpunkte.
Die Hyperbel hat Asymptoten. Ihre Gleichungen sind: $y = \pm\frac{b}{a}x$

Eine achsensymmetrische Hyperbel mit nach oben und unten geöffneten Ästen hat die Gleichung:

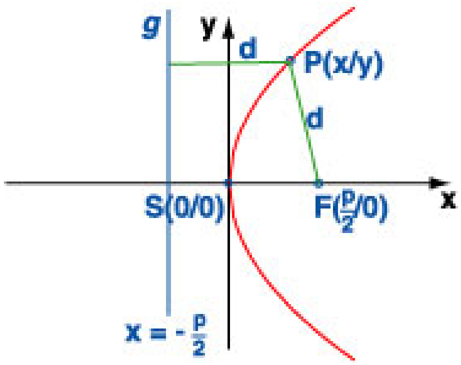
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{oder} \qquad -b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Die Parabel

Die Parabel ist die Menge aller Punkte, welche von einem festen Punkt (dem *Brennpunkt*) denselben Abstand wie von einer Geraden (der *Leitgeraden*) haben.

Für die zur x-Achse symmetrisch liegende Parabel mit dem Scheitel im Ursprung erhält man die Gleichung:

$$y^2 = 2px$$



S ist der Scheitel, F der Brennpunkt. p ist ein Parameter. Für $p > 0$ ist die Parabel nach rechts, für $p < 0$ ist sie nach links geöffnet. Die Gerade g ist die Leitgerade mit der Gleichung $x = -\frac{p}{2}$

Parabeln mit zur x-Achse paralleler Symmetrieachse und dem Scheitel $S(x_0/y_0)$ haben die Gleichung:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Nach oben bzw. nach unten geöffnete Parabeln (Symmetrieachse ist parallel zur y-Achse) mit dem Scheitel $S(x_0/y_0)$ haben die Gleichung:

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \qquad \text{oder} \qquad y = ax^2 + bx + c$$

Quadratische Formen

Ein Gleichung der Art

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

nennt man eine *quadratische Form.* Der Graph einer quadratischen Form kann eine Kegelschnittslinie (Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel) sein. Bei speziellen Konstellationen der Koeffizienten ist es auch möglich, dass gar keine Kurve im $\mathbb{R}^2$ dargestellt wird. Das xy-Glied weist darauf hin, dass der Graph gegenüber den achsensymmetrischen Grundformen gedreht ist. Die Identifizierung der konkreten Form ist nicht immer ganz einfach und soll hier nicht Gegenstand der Diskussion sein.