Hochschule für Technik und Wirtschaft
Fachhochschule Ostschweiz
HTW Chur
Ringstrasse
CH 7004 Chur

Tel. 081 286 24 24
Fax 081 286 24 00

Hermann Knoll

MATHEMATIK

Studiengang
Telekommunikation und Informatik
1. Studienjahr

ver. 4.0/ 06.10.2003

Menge

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Dingen (Elementen). Es gibt endliche Mengen (Anzahl der Elemente ist endlich) oder unendliche Mengen (Anzahl der Elemente ist unendlich).
Mengen werden mit Grossbuchstaben bezeichnet, z.B. A, B, M, …
Beispiele:
Menge der Studenten der Schule M = {Meier, Müller, Huber, … }
Menge der natürlichen Zahlen N = {1, 2, 3, 4, … }
Menge der natürlichen Zahlen zwischen 10 und 15: A = {10, 11, 12, 13, 14, 15}
Menge der Kongruenzabbildungen

Angabe von Mengen

1. **Aufzählen der Elemente:**
   A = {5, 6, 7, 8, 9, 10}
2. **Mengendiagramm**
3. **beschreibend:**
   A = Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 10 = {n   N: 1 ≤ n ≤ 10} (lies: Menge aller n aus N, für die gilt, 1 kleiner oder gleich n kleiner oder gleich 10)
   Menge der Studenten der Schule

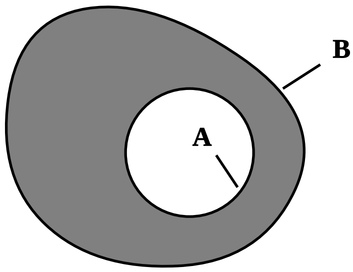
Leere Menge

Die leere Menge enthält keine Elemente. Schreibweise: {} oder Ø

Teilmenge

Eine Menge A ist Teilmenge der Menge B, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind. Eine Menge A ist echte Teilmenge der Menge B, wenn A Teilmenge von B ist, aber A ungleich B ist.

A   B



Gleichheit von zwei Mengen

Zwei Mengen A und B sind gleich (A = B), wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind und umgekehrt.

Äquivalenz von Mengen

Zwei Mengen A und B heissen äquivalent (A ~ B), wenn es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von A und B gibt.

Mächtigkeit von Mengen

Äquivalente Mengen sind auch von gleicher Mächtigkeit. Die Mächtigikeit der Menge M wird mit |M| bezeichnet. Bei endlichen Mengen gibt sie die Anzahl der Elemente an.

Potenzmenge

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heisst die Potenzmenge von M ($\mathcal{P}$(M)).
Beispiel:
M = {1, 2, 3}
$\mathcal{P}$(M) = {{}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

Kartesisches Produkt (Produkt von Mengen)

Das kartesische Produkt A × B von zwei Mengen A und B ist die Menge der (geordneten) Paare (a, b), a A, b B.

A × B = {(x,y) | x A y B}

Beispiel: A = {Meier, Müller, Huber}, B = {Chur, Zürich, Genf, Zug}

A × B = {(Meier, Chur), (Meier, Zürich), (Meier, Genf), (Meier, Zug), (Müller, Chur), (Müller, Zürich), (Müller, Genf), (Müller, Zug), (Huber, Chur), (Huber, Zürich), (Huber, Genf), (Huber, Zug)}

allgemein:

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \mid a_i \quad A_i \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$

Der Ausdruck $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ wird als n-Tupel bezeichnet.

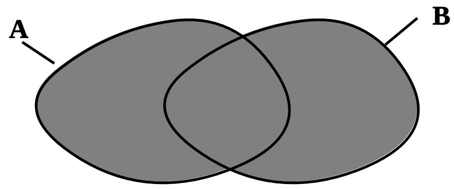
Menge mit algebraischer Struktur

Eine Menge M, für deren Elemente mindestens eine Verknüpfung definiert ist, heisst Menge mit algebraischer Struktur oder kurz algebraische Struktur.

Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge A B ist die Menge jener Elemente, die entweder zu A oder zu B oder zu beiden gehören.

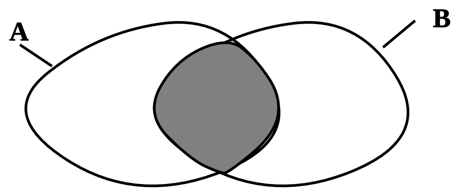
A B = {x : x A x B}



Schnittmenge

Die Schnittmenge A ∩ B ist die Menge jener Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

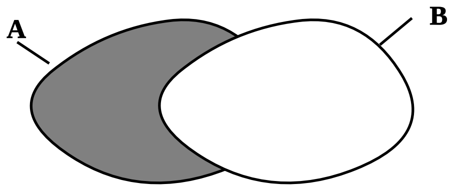
A ∩ B = { x : x A x B}



Differenzmenge

Die Differenzmenge A\B (lies: "A ohne B") ist die Menge jener Elemente, die zu A aber nicht zu B gehören.

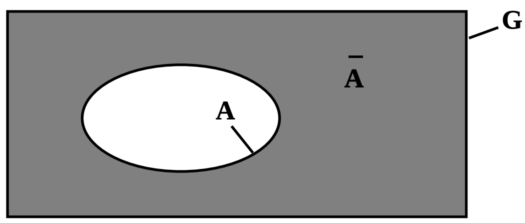
A\B = {x : x A x B}



Komplementmenge

Die Komplementmenge ¾A bezüglich der Grundmenge G ist die Menge jener Elemente der Grundmenge G, welche nicht zu A gehören.

¾A = G \ A = {x : x G x A}



Aussagenlogik

Aussage

Eine *Aussage* ist ein Satz, von dem man sagen kann, dass er *wahr* oder *falsch* ist.

Beispiele: "Die Banane ist krumm", "Die Tomate ist blau", "Ein Meter misst 127 Zentimeter".

Keine Aussagen sind Fragen oder Befehle.

Verknüpfung von Aussagen

Aussagen können auf vielfältige Weise miteinander verknüpft werden, sodass neue Aussagen entstehen. Wir werden uns nur für solche Aussageverknüpfungen interessieren, deren Wahrheitswert (WAHR oder FALSCH) nur von den Wahrheitswerten der einzelnen Aussagen abhängt. Es sind dies: *Negation* (NICHT, NOT, ¬), *Konjunktion* (UND, AND,), *Adjunktion* (ODER, OR,), *Subjunktion* (WENN-DANN, IF-THEN, →) und *Bijunktion* (GENAU DANN-WENN,↔). Die Theorie der aussagenlogischen Operationen bezeichnet man als *Aussagenlogik* oder *formale Logik*.

Die Negation (NICHT, NOT, ¬)

Das Ergebnis einer Negation ist immer das Gegenteil der Aussage. Als Werte einer Aussage gibt es WAHR (W) oder FALSCH (F). Die Negation macht also aus WAHR FALSCH und aus FALSCH WAHR. Man schreibt: NICHT A = ¬A

Ab besten ist es, die Zusammenhänge in einer Wahrheitswerttabelle darzustellen. Hier wird der Zusammenhang zwischen den Wahrheitswerten von A und ¬A angegeben. Da es für die Aussage A nur zwei mögliche Wahrheitswerte gibt (W oder F), hat die Tabelle zwei Zeilen.

A	¬A
W	F
F	W

Die Konjunktion (UND, AND,)

Das aussagenlogische UND ist vom umgangssprachlichen 'und' etwas verschieden. Nur wenn beide Aussagen A und B WAHR sind, folgt für A B = W. In allen anderen Fällen resultiert FALSCH. Wahrheitswerttabelle:

A	B	A B
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Beispiel: Eine Prüfungsordnung schreibt für das Erlangen des Diploms vor, dass die Prüfung in Mathematik und die Prüfung in Chemie bestanden wurde.

Die Adjunktion (ODER, OR,)

Das aussagenlogische ODER bedeutet nicht das exklusive 'oder', wie es meist in der Umgangssprache verwendet wird. Es heisst vielmehr, dass Aussage A oder B oder beide gültig sind. Demnach gilt folgende Wahrheitswerttabelle:

A	B	A B
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Beispiel: Eine Schule schreibt den Besuch von Wahlfächern vor: Jeder Student hat das Fach Ökologie oder Informatik zu belegen
Wenn ein Student beide Fächer belegt, ist die Vorschrift auch erfüllt).

Die Subjunktion (WENN-DANN, IF-THEN, →)

Die Folgerung WENN A, DANN B kommt in vielen Bereichen vor. Deshalb ist es angezeigt, dass dafür eine aussagenlogische Operation definiert wird. A und B sind die Eingangsgrössen, WENN A, DANN B ist die Ausgangsgrösse. Diese ist sicher FALSCH, wenn B FALSCH ist bei WAHR für A. In der natürlichen Sprache kommt nur dieser Fall vor. Bei zwei Eingangsgrössen gibt es aber prinzipiell vier Möglichkeiten. Es ist sinnvoll, die restlichen drei Ausgangswerte mit WAHR zu besetzen. Die Wahrheitswerttabelle lautet somit:

A	B	A→B
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Beispiel: **A = "Es ist Nacht", B = "Es scheint der Mond"**
A → B = "Wenn es Nacht ist, scheint der Mond"

Die Bijunktion (GENAU DANN-WENN, ↔)

Wenn aus A B folgt und umgekehrt aus B A, dann kann man sagen, dass A genau dann gültig ist, wenn B erfüllt ist. Die Wahrheitswerttabelle lautet:

A	B	A↔B
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

EXKLUSIV ODER (XOR)

Beim ODER haben wir darauf hingewiesen, dass es nicht wie in der Umgangssprache funktioniert. Dem umgangssprachlichen oder entspricht das EXKLUSIV ODER. Es gilt folgende Wahrheitswert-tabelle:

A	B	A XOR B
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Junktoren

Die Verknüpfungssymbole der Aussagenverknüpfungen heissen Junktoren. Wir führen gleichzeitig eine Reihenfolge ihrer Wertung ein. Es gilt:

1. ¬ NICHT
2. UND
3. ODER
4. → WENN-DANN
5. ↔ GENAU DANN-WENN

Übergeordnet sind natürlich noch die Klammern.

Regeln für die Klammerungen

Nach der Einführung einer Wertigkeit der Junktoren kann in vielen Fällen auf das Setzen von Klammern verzichtet werden. Wir treffen folgende Vereinbarung:

(1) Auf jedes äussere Klammerpaar kann verzichtet werden.

(2) Verzicht auf die Klammern für die Negation: (¬A) = ¬A

(3) Für jede zweistellige Veknüpfung wird die Linksassoziativität vereinbart.
z.B.: A B C = (A B) C

Beispiele:

Zu erstellen ist eine Wahrheitswerttabelle für (A ¬B) C.

A	B	C	¬B	A ¬B	(A ¬B) C
W	W	W	F	F	W
W	W	F	F	F	F
W	F	W	W	W	W
W	F	F	W	W	W
F	W	W	F	F	W
F	W	F	F	F	F
F	F	W	W	F	W
F	F	F	W	F	F

Die Tabelle kann verkürzt werden, indem nur die Wahrheitswerte der einzelnen Operationen in der entsprechenden Reihenfolge ermittelt und notiert werden. Hier werden zuerst die Wahrheitswerte für A, B und C eingetragen. Als erstes wird ¬B ermittelt (linke Tabelle), dann kommt die UND-Verknüpfung, zuletzt die ODER-Verknüpfung (rechte Tabelle). Die Lösungen werden immer genau unter das Operationszeichen geschrieben. In der Praxis füllt man nur eine Tabelle aus. Hier wurde zur besseren Übersicht zwei Tabellen angelegt.

(A		¬	B)		C
W		F	W		W
W		F	W		F
W		W	F		W
W		W	F		F
F		F	W		W
F		F	W		F
F		W	F		W
F		W	F		F

(A		¬	B)		C
W	F	F	W	W	W
W	F	F	W	F	F
W	W	W	F	W	W
W	W	W	F	W	F
F	F	F	W	W	W
F	F	F	W	F	F
F	F	W	F	W	W
F	F	W	F	F	F

Regeln für das Umformen von Aussage- und Mengenverknüpfungen

	Aussagen	Mengen
Doppelte Negation	$\neg(\neg A) = A$	$\overline{\overline{A}} = A$
Idempotenz	$A \quad A = A$ $A \quad A = A$	$A \cap A = A$ $A \quad A = A$
Kommutativität	$A \quad B = B \quad A$ $A \quad B = B \quad A$	$A \cap B = B \cap A$ $A \quad B = B \quad A$
Assoziativität	$(A \quad B) \quad C = A \quad (B \quad C)$ $(A \quad B) \quad C = A \quad (B \quad C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \quad B) \quad C = A \quad (B \quad C)$
De Morgan	$\neg(A \quad B) = \neg A \quad \neg B$ $\neg(A \quad B) = \neg A \quad \neg B$	$\overline{A \quad B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \quad \overline{B}$
Distributivgesetze	$A \quad (B \quad C) = (A \quad B) \quad (A \quad C)$ $A \quad (B \quad C) = (A \quad B) \quad (A \quad C)$	$A \cap (B \quad C) = (A \cap B) \quad (A \cap C)$ $A \quad (B \cap C) = (A \quad B) \cap (A \quad C)$
Absorptionsgesetz I	$A \quad (A \quad C) = A$ $A \quad (A \quad C) = A$	$A \quad (A \cap C) = A$ $A \cap (A \quad C) = A$
II	$(A \quad B) \quad \neg B = A \quad \neg B$ $(A \quad B) \quad \neg B = A \quad \neg B$	$(A \cap B) \quad \overline{B} = A \quad \overline{B}$ $(A \quad B) \cap \overline{B} = A \cap \overline{B}$
III	$W \quad A = A$ $W \quad A = W$ $F \quad A = F$ $F \quad A = A$	$G \cap A = A$ $G \quad A = G$ $\{\} \cap A = \{\}$ $\{\} \quad A = A$
Transpositionsgesetz	$A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$	
Entbehrlichkeit der Subjunktion	$A \rightarrow B = \neg A \quad B$ $A \rightarrow B = \neg(A \quad \neg B)$	
Entbehrlichkeit der Bijunktion	$A \leftrightarrow B = (A \quad B) \quad (\neg A \quad \neg B)$ $A \leftrightarrow B = (\neg A \quad B) \quad (A \quad \neg B)$	

Beispiele:

$(((\neg((\neg A) \quad (\neg B))) \quad A) \quad (\neg B)) =$	äusseres Klammernpaar weglassen
$((\neg((\neg A) \quad (\neg B))) \quad A) \quad (\neg B) =$	Klammern der Negation weglassen
$(\neg(\neg A \quad \neg B) \quad A) \quad \neg B =$	de Morgan
$(A \quad B \quad A) \quad \neg B =$	Kommutativität und Idempotenz
$(A \quad B) \quad \neg B =$	Absorptionsgesetz II
$A \quad \neg B$	

$\left(\overline{A \cap \overline{B}} \quad \cap \left(A \quad \overline{B}\right)\right) =$	äusseres Klammernpaar weglassen
$\overline{A \cap \overline{B}} \quad \cap \left(A \quad \overline{B}\right) =$	de Morgan
$\left(\overline{A} \quad B\right) \cap \left(A \quad \overline{B}\right) =$	Distributivgesetz
$\left(\overline{A} \cap A\right) \quad \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \quad (B \cap A) \quad \left(B \cap \overline{B}\right) =$	$A \cap \overline{A} = \{\}$
$\{\} \quad \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \quad (B \cap A) \quad \{\} =$	Absorptionsgesetz, Kommutativität
$(A \cap B) \quad \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$	

Einführung in die Fuzzy-Logic

Gegeben sei eine Menge X mit den Elementen x.

$x \quad X, X = \{x\}$

Definition:

Unter einem Fuzzy-Set $\tilde{A}$ in X versteht man die Menge der geordneten Paare $\left\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \quad X\right\}$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ **heisst Zugehörigkeitsfunktion oder Zugehörigkeitsgrad, für die Werte gilt:** $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$.

Elemente mit einem Zugehörigkeitsgrad $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ **werden in** $\tilde{A}$ **nicht aufgeschrieben.**

Die Menge aller Zugehörigkeitsfunktionswerte kann mit M bezeichnet werden. Dann ist das Fuzzy-Set $\tilde{A} \quad X \times M \; (x \quad X, \mu_{\tilde{A}}(x) \quad M)$.

Definition:

Support von $\tilde{A} = S(\tilde{A}) = \{x \quad X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$

$S(\tilde{A})$ **ist somit eine Teilmenge von X.**

Definition:

α**-Level-Set** $A_\alpha = \{x \quad X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$

echter α**-Level-Set** $A'_\alpha = \{x \quad X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$

Definition:

Mächtigkeit von $\tilde{A} = |\tilde{A}| = \sum_{x \quad X} \mu_{\tilde{A}}(x)$ **(bei endlichen Mengen)**

Relative Mächtigkeit von $\tilde{A} = ||\tilde{A}|| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}$

Definition:

Schnittmenge $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$ **mit** $\mu_{\tilde{C}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$ **und** $x \quad X$

Definition:

Vereinigungsmenge $\tilde{C} = \tilde{A} \quad \tilde{B}$ **mit** $\mu_{\tilde{C}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$ **und** $x \quad X$

Definition:

Komplementmenge $\bar{\tilde{A}} = \complement\tilde{A} = \left\{(x, \mu_{\complement\tilde{A}}(x)) \mid x \quad X \quad \mu_{\complement\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\right\}$

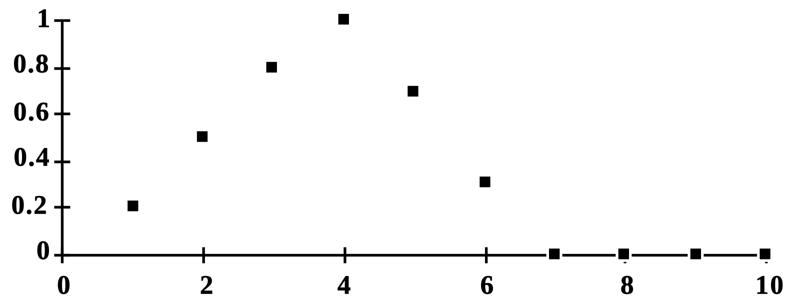
1. Beispiel:

Die Menge X beschreibe die mögliche Anzahl Zimmer in einem Haus. Das Fuzzy-Set $\tilde{A}$ soll durch die Eigenschaft "geeignet für 4 Personen" charakterisiert sein.

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\tilde{A} = \{(1,0.2), (2,0.5), (3,0.8), (4,1), (5,0.7), (6,0.3)\}$

Die Werte der Zugehörigkeitsfunktion wurden in diesem Beispiel nach Gefühl festgelegt. So kann wohl gesagt werden, dass eine 1- oder 2-Zimmer-Wohnung für 4 Personen relativ eng sein wird. Eine 6-Zimmer-Wohnung bietet zwar Platz, aber der Aufwand für die Reinigung oder die Mietkosten sind dafür relativ hoch. Das Diagramm stellt die Zugehörigkeitsfunktion graphisch dar. Meist werden die Werte so gewählt, dass eine Dreiecks- oder Trapezform entsteht.

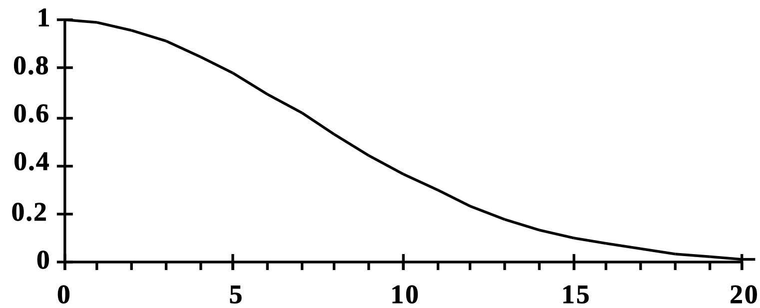


2. Beispiel:

Das Lebensalter von Menschen kann z.B. mit den Begriffen jung, sehr jung, alt, usw. charakterisiert werden. Das Fuzzy-Set $\tilde{A}$ gibt hier den Begriff "sehr jung" wider.

$X = \{x \quad R \mid 0 < x < 120\}$

$$\tilde{A} = \left\{ (x,\mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \quad X \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-\frac{x^2}{100}} \right\}$$



Ein Ausschnitt aus der Wertetabelle zeigt einige Werte der Zugehörigkeitsfunktion μ:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
μ	1.00	0.99	0.96	0.91	0.85	0.78	0.70	0.61	0.53	0.44	0.37	0.30	0.24	0.18	0.14	0.11

Menge der natürlichen Zahlen

Axiome von Peano:

1. **1 ist eine natürliche Zahl.**
2. **Jede Zahl a hat einen bestimmten Nachfolger a^+ in der Menge der natürlichen Zahlen.**
3. **Stets ist $a^+ \neq 1$, d.h. es gibt keine Zahl mit dem Nachfolger 1.**
4. **Aus $a^+ = b^+$ folgt a = b., d.h. zu jeder Zahl gibt es keine oder genau eine, deren Nachfolger jene Zahl ist.**
5. **"Prinzip der vollständigen Induktion": Jede Menge von natürlichen Zahlen, welche die Zahl 1 enthält und welche zu jeder Zahl a, die sie enthält, auch deren Nachfolger a^+ enthält, enthält alle natürlichen Zahlen.**

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

Rechengesetze

Kommutativgesetz:	**$a + b = b + a$**	**$a \bullet b = b \bullet a$**
Assoziativgesetz:	**$a + (b + c) = (a + b) + c$**	**$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$**
Distributivgesetz:	**$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$**	

Menge der ganzen Zahlen

Die Gleichung x + a = 0 (a N) ist in der Menge der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Deshalb wird der Zahlenbereich mit den negativen Zahlen erweitert. Zusammen mit den natürlichen Zahlen und 0 ergibt sich so die Menge der ganzen Zahlen.

Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} = {0, ±1, ±2, ±3, ...}

Menge der rationalen Zahlen

Innerhalb der Menge der ganzen Zahlen ist die Addition, die Subtraktion und die Multiplikation unbeschränkt ausführbar. Die Division jedoch führt in vielen Fällen nicht zu einem Ergebnis in Z. Aus diesem Grund muss die Menge der ganzen Zahlen durch die Bruchzahlen erweitert werden. So ergibt sich die Menge der rationalen Zahlen.

Q = {$x = \frac{p}{q}$: p Z und q Z\{0}}

Menge der reellen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen vereinigt die Menge der rationalen Zahlen mit der Menge der irrationalen Zahlen. Als Beispiele für irrationale Zahlen können die Wurzeln wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{17}$, die Kreiszahl π, aber auch die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen oder die Logarithmen genannt werden.

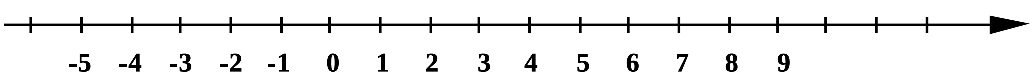
Stellt man reelle Zahlen als Dezimalbrüche dar, so sind die abbrechenden und die nichtabbrechenden, periodischen Dezimalbrüche rational, die nichtabbrechenden, nicht periodischen Dezimalbrüche sind irrational. Das konmmt daher, dass abbrechende, wie auch nichtabbrechende, periodische Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche der Form $\frac{p}{q}$ umgewandelt werden können.

Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten folgende Gesetze:

Kommutativgesetz (KG):	**$a + b = b + a$**	**$a \bullet b = b \bullet a$**
Assoziativgesetz (AG)	**$a + (b + c) = (a + b) + c$**	**$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$**
Distributivgesetz (DG)	**$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$**	

Der Zahlenstrahl

Zur graphischen Darstellung der reellen Zahlen wird oft der Zahlenstrahl verwendet.



Menge der komplexen Zahlen

Bekanntlich hat die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine reelle Lösung. Durch Erweiterung des Zahlenbereichs kann man aber dafür sorgen, dass es auch für diese Gleichung Lösungen gibt. Wir führen daher die komplexen Zahlen ein.

Die Gleichung $x^2 +1$ wird umgeformt:

$x^2 = -1$

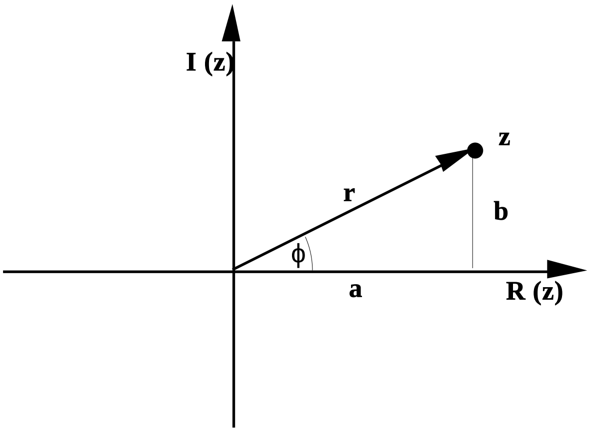
Formal gesehen wären die Lösungen:

$x_1 = \sqrt{-1}$ und $x_2 = -\sqrt{-1}$

Wir bezeichnen $\sqrt{-1}$ mit i und nennen dieses i die imaginäre Einheit. Die Vielfachen von i, welche mit einem reellen Faktor gebildet werden können, bilden die Menge der imaginären Zahlen.
$:= \{z \mid z = k \bullet i \quad k \quad R \setminus \{0\}\}$

Die Menge der komplexen Zahlen wird jetzt definiert als:
$C := \{z \mid z = a + bi \quad a, b \quad R\}$

Gauss'sche Zahlenebene



$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\qquad a = r \bullet \cos \phi$

$\tan \phi = \frac{b}{a}$ $\qquad b = r \bullet \sin \phi$

$\rightarrow z = a + bi = r(\cos \phi + i \bullet \sin \phi) = r \text{ cis } \phi$

Konjugiert komplexe Zahl

Die zu $z = a + bi$ konjugiert komplexe Zahl ist $\overline{z} = a - bi$

Rechenregeln

$z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$
$z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$

Gleichheit

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \quad b_1 = b_2$

Addition

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Kommutativgesetz: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
Assoziativgesetz: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

Subtraktion

$z_1 + z = z_2$
$a_1 + b_1 i + a + bi = a_2 + b_2 i$
$a_1 + a = a_2, \qquad b_1 + b = b_2$
$a = a_2 - a_1 \qquad b = b_2 - b_1$
$z = z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i$

Multiplikation

$z_1 \bullet z_2 = (a_1 + b_1 i) \bullet (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Interessant ist bei der Multiplikation von komplexen Zahlen die Darstellung mit Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} z_1 \bullet z_2 &= r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \bullet r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = \\ &= r_1 r_2[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)] = \\ &= r_1 r_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)] \end{aligned}$$

Kommutativgesetz: $z_1 \bullet z_2 = z_2 \bullet z_1$
Assoziativgesetz: $(z_1 \bullet z_2) \bullet z_3 = z_1 \bullet (z_2 \bullet z_3)$

Distributivgesetz: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Beispiel: $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + i$. Es ist $z_1 \bullet z_2$ zu bestimmen.

$r_1 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $\phi_1 = \text{acrtan}\left(\frac{-4}{3}\right) = 306{,}87°$

$r_2 = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\phi_2 = \arctan\left(\frac{1}{-2}\right) = 153{,}43°$

$\phi_1 + \phi_2 = 460{,}30°$

$z_1 \bullet z_2 = 5\sqrt{5}(\cos 460.30° + i\sin 460.30°) = -2 + 11i$

Potenzieren

$z^2 = z \bullet z = r^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi)$

$$\begin{aligned} z^3 &= z^2 \bullet z = r^2(\cos 2\phi + i\sin 2\phi) \bullet r(\cos\phi + i\sin\phi) = \\ &= r^3[(\cos 2\phi\cos\phi - \sin 2\phi\sin\phi) + i(\cos 2\phi\sin\phi + \sin 2\phi\cos\phi)] = \\ &= r^3(\cos 3\phi + i\sin 3\phi) \end{aligned}$$

$z^n = r^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$

Beispiel: $z = 3 - 4i$. Es ist z^{13} zu bestimmen.

$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $\phi = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) = 306{,}87°$

$z^{13} = 5^{13}(\cos 13 \bullet 306{,}87° + i\sin 13 \bullet 306{,}87°) = 1{,}0644 \bullet 10^9 + 5{,}975510^8 i$

Moivre'sche Formel: $(\cos\phi + i \bullet \sin\phi)^n = \cos n\phi + i \bullet \sin n\phi$ (n N)

Eulersche Relation: $\cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}$ (ohne Beweis)

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

Der Quotient von zwei komplexen Zahlen ist also wieder eine komplexe Zahl. Die Disvision kann aber einfacher mit der Polarkoordinatendarstellung durchgeführt werden. Wenn für das Produkt $z_1 = z \bullet z_2 = rr_2[\cos(\phi + \phi_2) + i\sin(\phi + \phi_2)]$ gilt, kann man z als Qutient von z_1 und z_2 berechnen: $z = \frac{z_1}{z_2}$, wobei für die Radien $r = \frac{r_1}{r_2}$ und für die Winkel $\phi = \phi_1 - \phi_2$ gilt. Also:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)]$$

Beispiel: $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + i$. Es ist $\frac{z_1}{z_2}$ zu bestimmen.

$r_1 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $\phi_1 = \text{acrtan}\left(\frac{-4}{3}\right) = 306{,}87°$

$r_2 = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\phi_2 = \arctan\left(\frac{1}{-2}\right) = 153{,}43°$

$\phi_1 - \phi_2 = 153{,}44°$

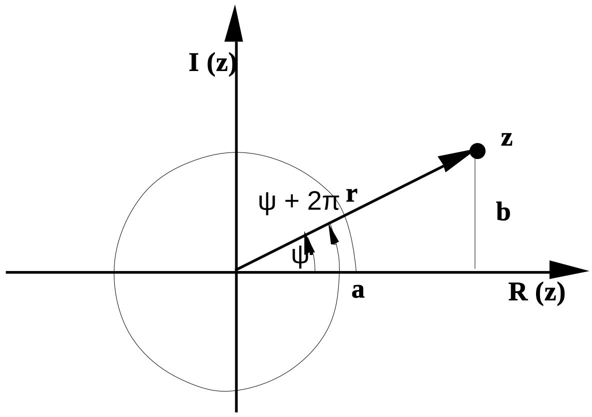
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos 153{,}44° + i\sin 153{,}44°) = -2 + i$

oder:

$$\frac{3 - 4i}{-2 + i} = \frac{(3 - 4i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = \frac{-6 - 3i + 8i - 4}{4 + 1} = \frac{-10 + 5i}{5} = -2 + i$$

Die Wurzeln von Potenzgleichungen

Die Gleichung $z^n = a + bi = r \text{ cis } \psi$ hat in der Menge der komplexen Zahlen immer n Lösungen. Das Berechnen der Wurzeln ist die Umkehrung des Potenzierens.
Ist $z^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$, so kommt man zu z indem aus r^n die n-te Wurzel gezogen wird. Den Winkel erhält man als n-ten Teil von $n\phi$. Dabei sind aber n verschiedene Lösungen möglich. Ein Winkel $n\phi$ kann als gegebener Winkel ψ aber genau so als $\psi + 2\pi$ oder $\psi + 4\pi$ usw. aufgefasst werden.
($n\phi = \psi + (k-1)\bullet 2\pi$, k = 1, 2, ... n)



Es gilt also:

$z^n = a + bi = r(\cos \psi + i \sin \psi)$

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\psi + (k-1)\bullet 2\pi}{n} + i \sin \frac{\psi + (k-1)\bullet 2\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{(k-1)\bullet 2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{(k-1)\bullet 2\pi}{n}\right)\right)$$

mit k = 1, 2, ..., n

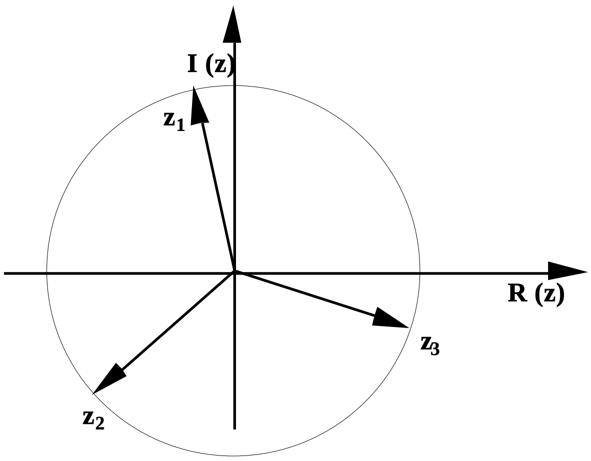
Beispiel: $z^3 = 3 - 4i$. Es sind alle Wurzeln zu bestimmen.

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5,\ \phi = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) = 306{,}87°$$

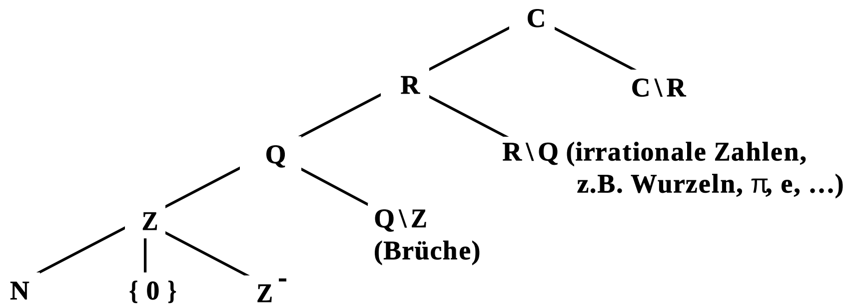
$$z_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos \frac{306{,}87°}{3} + i \sin \frac{306{,}87°}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\,(\cos 102{,}29° + i \sin 102{,}29°) = -0.3640 + 1.6708i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos \frac{306{,}87° + 360°}{3} + i \sin \frac{306{,}87° + 360°}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\,(\cos 222{,}29° + i \sin 222{,}29°) = -1.2650 - 1.1506i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos \frac{306{,}87° + 720°}{3} + i \sin \frac{306{,}87° + 720°}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\,(\cos 342{,}29° + i \sin 342{,}29°) = 1.6289 - 0.5202i$$



Zahlenmengen: Übersicht



Menge der natürlichen Zahlen **N = {1, 2, 3, …}**
Menge der ganzen Zahlen **Z = {0, ±1, ±2, ±3, …}**
Menge der rationalen Zahlen **Q = {$\frac{z}{n}$: z   Z, n   N}**
Menge der reellen Zahlen **R**
Menge der komplexen Zahlen **C = {z : z = a + bi, a   R, b   R}**

Geschichte der Zahlensysteme

Von alters her benutzten die Menschen die Finger zum Zählen. Somit ergab sich ganz natürlich die Zusammenfassung von 10 Elementen zu einem Bündel. Es entstand damit das *Zehnersystem* oder *Dezimalsystem*, bei welchem jeweils

10 Elemente, die Einer, zu einem Zehner,
10 Zehner zu einem Hunderter,
10 Hunderter zu einem Tausender,
10 Tausender zu einem Zehntausender, usw.

zusammengefasst werden.

Neben dem Dezimalsystem wurden aber auch in früher Zeit andere Zahlensysteme verwendet. So benützten die Babylonier das *Sechzigersystem*. Ein Rest davon hat sich bis heute in der Einteilung der Stunden in 60 Minuten zu je 60 Sekunden und in der Messung der Winkel erhalten. Das *Zwölfersystem* spiegelt sich im Dutzend wieder. Die Kelten benützten ein *Zwanzigersystem*, auf das noch das französische *quatre-vingts* für achtzig hinweist.
In unserem Jahrhundert erhielten durch die Entwicklung von Digitalrechnern das *Dualsystem* (Zweiersystem das *Oktalsystem* (Achtersystem) und das *Hexadezimalsystem* (Sechzehnersystem) grössere Bedeutung für das Rechnen.

Darstellung von Dezimalzahlen mittels Zehnerpotenzen

Die Zahl 12586 kann man folgendermassen zerlegen: 12586 = 10000 + 2000 + 500 + 80 + 6.
Mit Zehnerpotenzen schreibt man: $12586 = 1 \bullet 10^4 + 2 \bullet 10^3 + 5 \bullet 10^2 + 8 \bullet 10^1 + 6 \bullet 10^0$.

Dabei bedeutet:	$10^0 = 1$	$10^1 = 10$
	$10^2 = 10 \bullet 10 = 100$	$10^3 = 10 \bullet 10 \bullet 10 = 1'000$
	$10^4 = 10 \bullet 10 \bullet 10 \bullet 10 = 10'000$	usw.

Das Dualsystem (Zweiersystem)

Wurden beim Zehnersystem die Zahlen mit Potenzen mit der Basis 10 dargestellt, so wird beim Dualsystem die Basis 2 verwendet. Beim Zehnersystem sind 10 Ziffern nötig (0, 1, ... 9), beim Dualsystem braucht man hingegen nur 2 Ziffern, nämlich die 0 und die 1. Jede Dualzahl kann man also mit einem Koeffizienten, der 0 oder 1 ist, und einer Potenz von 2 darstellen.

Beispiele: (Im folgenden wird zur Markierung des Zahlensystems die Basis als Fussnote zur Zahl geschrieben)

$10100_2 = 1 \bullet 2^4 + 0 \bullet 2^3 + 1 \bullet 2^2 + 0 \bullet 2^1 + 0 \bullet 2^0 = 1 \bullet 2^4 + 1 \bullet 2^2 = 16_{10} + 4_{10} = 20_{10}$

$100110101_2 = 1 \bullet 2^8 + 0 \bullet 2^7 + 0 \bullet 2^6 + 1 \bullet 2^5 + 1 \bullet 2^4 + 0 \bullet 2^3 + 1 \bullet 2^2 + 0 \bullet 2^1 + 1 \bullet 2^0 =$
$= 1 \bullet 2^8 + 1 \bullet 2^5 + 1 \bullet 2^4 + 1 \bullet 2^2 + 1 \bullet 2^0 = 256_{10} + 32_{10} + 16_{10} + 4_{10} + 1_{10} = 309_{10}$

Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen

Die Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen ist schon etwas schwieriger. Konnte man vorhin noch die Werte der Zweierpotenzen direkt ausrechnen, muss man jetzt umgekehrt fragen, wie man die Dezimalzahl in eine Summe von Zweierpotenzen zerlegen kann.

Beispiel: 5413_{10} soll in eine Dualzahl umgewandelt werden. Dazu muss man als erstes die grösste Potenz von 2 kennen, die in 5413 enthalten ist. Diese Zweierpotenz wird subtrahiert. Mit dem Rest verfährt man wie zuvor mit der gegebenen Zahl.

$2^1 = 2$	$2^5 = 32$	$2^9 = 512$
$2^2 = 4$	$2^6 = 64$	$2^{10} = 1024$
$2^3 = 8$	$2^7 = 128$	$2^{11} = 2048$
$2^4 = 16$	$2^8 = 256$	$2^{12} = 4096$

Also: in 5413 ist $2^{12} = 4096$ als grösste Zweierpotenz enthalten.	5413 - 4096 = 1317
Die grösste Zweierpotenz kleiner als 1317 ist $2^{10} = 1024$.	1317 - 1024 = 293
Die grösste Zweierpotenz kleiner als 293 ist $2^8 = 256$.	293 - 256 = 37
Die grösste Zweierpotenz kleiner als 37 ist $2^5 = 32$.	37 - 32 = 5
Die grösste Zweierpotenz kleiner als 5 ist $2^2 = 4$.	5 - 4 = 1
Und $1 = 2^0$	

Somit kann man 5413_{10} darstellen als: $5413_{10} = 1 \bullet 2^{12} + 1 \bullet 2^{10} + 1 \bullet 2^8 + 1 \bullet 2^5 + 1 \bullet 2^2 + 1 \bullet 2^0 =$
$= 1 \bullet 2^{12} + 0 \bullet 2^{11} + 1 \bullet 2^{10} + 0 \bullet 2^9 + 1 \bullet 2^8 + 0 \bullet 2^7 + 0 \bullet 2^6 + 1 \bullet 2^5 + 0 \bullet 2^4 + 0 \bullet 2^3 + 1 \bullet 2^2 + 0 \bullet 2^1 + 1 \bullet 2^0 =$
$= 1010100100101_2$

Das Hexadezimalsystem

Beim Dualsystem haben wir gesehen, dass es zwar möglich ist, Zahlen nur mit den Ziffern 0 und 1 darzustellen. Allerdings werden die Ausdrücke lang und für unser Auge schwerfällig. Der Computer rechnet mit solchen Zahlen, weil die Schaltkreise im Rechner nur in der Lage sind, zwei voneinander unterscheidbare Zustände einzustellen (z.B.: Strom ein - aus oder Spannung hoch -tief). Wie wir gesehen haben, ist die Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen mit einigem Aufwand verbunden. Deshalb wird bei der Darstellung von Zahlen in der Informatik meist auf das Hexadezimalsystem gegriffen, das System mit der Basis 16. Die Zahl 16 ist ja gleich 2^4, sie kommt also in der Reihe der Zweierpotenzen vor. Eine Umwandlung von Dualzahlen in Hexadezimalzahlen und umgekehrt sollte also einfacher sein. Das Hexadezimalsystem mit der Basis 16 braucht 16 Ziffern. Mit unseren zehn Ziffern aus dem Dezimalsystem haben wir zu wenig. Als zusätzliche Ziffernzeichen werden die ersten 6 Buchstaben des Alphabets gebraucht. Somit heissen die Ziffern, die als Koeffizienten der 16-er-Potenzen bei der Zahlendarstellung dienen: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
A, B, C, D, E und F haben den dezimalen Wert 10, 11, 12, 13, 14, und 15. Beispiele für Hexadezimalzahlen sind: 623_{16}, $A7B5_{16}$, $91F_{16}$, $FFFF_{16}$, ...

Umwandlung von Dualzahlen in Hexadezimalzahlen:

Die Zahl 1011010011001_2 soll in eine Hexadezimalzahl verwandelt werden. Weil ja $2^4 = 16$ ist, ist die Umwandlung relativ problemlos.

$$\begin{aligned} 1011010011001_2 &= 1\cdot 2^{12} + 1\cdot 2^{10} + 1\cdot 2^9 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^0 = \\ &= 1\cdot 2^{4\cdot 3} +(4 + 2)\cdot 2^{4\cdot 2} + (8 + 1)\cdot 2^4 + (8 + 1) = 1\cdot 16^3 + 6\cdot 16^2 + 9\cdot 16^1 + 9 = \\ &= 1699_{16} \end{aligned}$$

Dieses Zerlegungsverfahren zeigt aber, dass jeweils von rechts ausgehend Vierergruppen mit den Ziffern gebildet werden können, die je für sich in eine Hexadezimalzahl umgewandelt werden können. Mit einer einfachen Umrechnungstabelle ist die Arbeit ganz leicht.

$0000_2 = 0_{16}$	$0100_2 = 4_{16}$	$1000_2 = 8_{16}$	$1100_2 = C_{16}$
$0001_2 = 1_{16}$	$0101_2 = 5_{16}$	$1001_2 = 9_{16}$	$1101_2 = D_{16}$
$0010_2 = 2_{16}$	$0110_2 = 6_{16}$	$1010_2 = A_{16}$	$1110_2 = E_{16}$
$0011_2 = 3_{16}$	$0111_2 = 7_{16}$	$1011_2 = B_{16}$	$1111_2 = F_{16}$

0001	0110	1001	1001	2
1	6	9	9	16

Umwandlung von Hexadezimalzahlen in Dualzahlen:

Die Umwandlung von Hexadezimalzahlen in Dualzahlen ist jetzt ganz einfach. Für jede Hexadezimalzahl muss man die Entsprechung im Dualsystem (siehe Tabelle auf der vorhergehenden Seite) aufschreiben. Dabei muss nur der Stellenwert berücksichtigt werden.

Die Zahl $53B6_{16}$ soll in eine Dualzahl verwandelt werden:

5	3	B	6	16
0101	0011	1011	0110	2

Das Oktalsystem

Wie das Hexadezimalsystem baut das Oktalsystem auch auf einer Basis auf, die eine Potenz von 2 ist, es ist die Zahl $2^3 = 8$. Somit sind auch Umwandlungen zwischen dem Dualsystem und dem Oktalsystem einfach. Wurden bei den Umwandlungen mit dem Hexadezimalsystem jeweils Vierergruppen gebildet ($16 = 2^4$), so werden jetzt bei Umwandlungen vom Dualsystem ins Oktalsystem Dreiergruppen gebildet ($8 = 2^3$). Als Ziffern werden im Oktalsystem 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 verwendet.

Die Zahl 237_{10} soll in eine Oktalzahl verwandelt werden:
$237_{10} = 3 \bullet 64 + 5 \bullet 8 + 5 = 3 \bullet 8^2 + 5 \bullet 8^1 + 5 \bullet 8^0 = 355_8$

Man kann aber auch zuerst eine Verwandlung ins Dualsystem vorzunehmen, also
$237_{10} = 1 \bullet 128 + 1 \bullet 64 + 1 \bullet 32 + 1 \bullet 8 + 1 \bullet 4 + 1 = 1 \bullet 2^7 + 1 \bullet 2^6 + 1 \bullet 2^5 + 1 \bullet 2^3 + 1 \bullet 2^2 + 1 \bullet 2^0 =$
$= 11'101'101_2 = 355_8$

Die Zahl 417_8 soll in eine Dezimalzahl verwandelt werden:
$417_8 = 4 \bullet 8^2 + 1 \bullet 8^1 + 7 \bullet 8^0 = 256 + 8 + 7 = 271_{10}$

Die Zahl 3517_8 soll in eine Hexadezimalzahl verwandelt werden:
$3517_8 = 011'101'001'111_2 = 0111'0100'1111_2 = 74F_{16}$

Die Zahl $A4E9_{16}$ soll in eine Oktalzahl verwandelt werden:
$A4E9_{16} = 1010'0100'1110'1001_2 = 1'010'010'011'101'001_2 = 122351_8$

Einführung in Maple V

Maple ist ein Mathematikprogramm für numerisches und formales Rechnen. Die umfangreichen Grafikfähigkeiten (2D, 3D, Animation) unterstützen den Anwender bei der Lösung verschiedener Probleme. Mit der konfortablen Online-Hilfe (das gesamte Library Reference Handbuch ist verfügbar) ist nicht schwer, die Verwendung der eingebauten Kommandos und Funktionen zu überblicken.

Beim Starten von Maple erscheint ein sogenantes Worksheet, in welchem die Operationen ausgeführt werden. Um gewisse Teile zu speichern, empfiehlt es sich, einen Scratchpad (Schmierzettel) zu verwenden. Worksheet gibt es nur eines, während man verschiedene Scratchpads gleichzeitig offen halten kann.

Maple ist ein Interpreter, der sich den Wert von Variablen merkt. Nach längeren Maple-Sitzungen kann dies zu unerwarteten Effekten führen nämlich, wenn der Wert einer Variable am Morgen festgelegt wurde, man aber am Nachmittag mit dem entsprechenden Symbol wieder rechnen möchte.

Maple ist case sensitive, d.h. es unterscheidet zwischen Gross- und Kleinschreibung.

Arbeiten mit Maple V

Wie sollen Anfänger mit einem solch komplexen Mathematikprogramm umgehen. Insbesondere dann, wenn man die Vielfalt der Möglichkeiten nur selten braucht, bringt ein sytematischer Maple-Kurs relativ wenig. In Maple V ist das Online-Hilfe-System sehr weit ausgebaut, sodass zu empfehlen ist, darauf zu bauen. Neben dem Einstieg in die "Hilfe" über das entsprechende Kommando aus dem Menü kann zu jedem beliebigen Text eine spezielle Hilfe angefordert werden. Ist zum ausgewählten Text ein Eintrag im Hilfekatalog vorhanden, bietet Maple V auch seine Unterstützung an. Den Text auswählen und im Menü die Suche starten, so einfach ist es.

Für die verschiedenen Anwendungsbereiche empfiehlt es sich, in einem eigenen Maple-Ordner Beispiele zu sammeln und Erfahrungen aufzuzeichnen. Es gibt nicht den einzig wahren Umgang mit einem solchen Programm, insbesondere, wenn man bedenkt, dass es asuch noch andere Mathematik-Software (Mathematica, Derive, ...) gibt, in der sich ein Ingenieur ebenfalls zurechtfinden soll. Die Kommandos und Funktionen sind oft gleich oder klingen ähnlich. Ein intuitiver Zugang ist einem streng reglementierten vorzuziehen, weil somit genügend Flexibilität für das Umsteigen bleibt. Dennoch sind ein paar Punkte für den Anfang wichtig. Hier seien ein paar Beispiele für den ersten Einstieg angeführt:

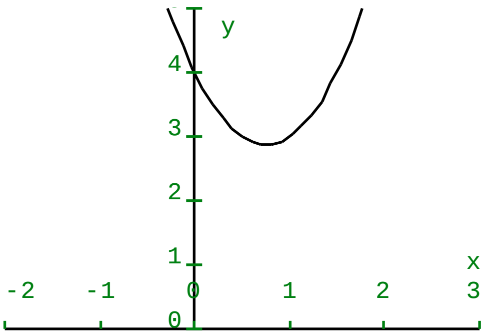
Auf dem Worksheet erscheint ein Prompt (> oder •). Hinter dem Prompt können die Eingaben gemacht werden. Dabei gilt für die Wertzuweisung das Zeichen :=, verschiedene Statements werden mit ; oder : getrennt, wobei ein mit Strichpunkt beendetes statement das Ergebnis auf dem Bildschirm erscheinen lässt. Nach dem Doppelpunkt wird das Ergebnis unterdrückt. Wichtig ist zu wissen, wie eine Variable nach der Belegung mit einem Wert wieder gelöscht werden kann. Das folgende Beispiel zeigt es.

Beispiel:
Es soll eine Funktion f definiert werden, dann werden Werte berechnet, einer Variablen y zugeordnet. Schliesslich wird der Graph der Funktion gezeichnet. Zuletzt wird die Variable y gelöscht.

```
• f:= x -> 2*x^2 - 3*x + 4;
                                        2
                        f := x -> 2 x  - 3 x + 4

• f(-2);f(0);f(2);
                                  18

                                  4

                                  6

• y := f(3);
```

```
y := 13
```

```
• y;
                    13
• plot(f(x),x=-2..3,0..5);
```




```
• y := 'y';
                  y := y

• y;
                    y
```

Literatur

Die folgenden Werke sind in der Bibliothek der Ingenieurschule HTL Chur verfügbar. Für weitere Literatur wird auf die Bilbliotheken des ETHICS verwiesen.

Gloggengiesser, H.: Maple V, Software für Mathematiker, das unentbehrliche Handbuch, Markt&Technik, Haar bei München, 1993

Holmes, M.H.: Exploring calculus with Maple, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1993

Gander, W; Hrebicek, J.: Solving problems in scientific computing using MAPLE and MATLAB, Springer-Verlag, Berlin, 1993

Werner W.: Mathematik lernen mit Maple V, ein Lehr und Arbeitsbuch für das Grundstudium, ELBI-Verlag, Schöntal, 1993

Kofler, M: Maple V release 3, Einführung und Leitfaden für den Praktiker, Addison-Wesley, Bonn, 1994

Statistik

Will man einen Überblick über die Merkmale einer Menge erhalten, zieht man eine Stichprobe (sammelnde Statistik), bereitet sie auf (beschreibende oder deskriptive Statistik) und kann dann auf die Grundmenge zurückschliessen (beurteilende oder induktive Statistik).

Das Ziehen der Stichprobe muss als Zufallsauswahl geschehen. Wir werden hier speziell auf das Bearbeiten des Zahlenmaterials eingehen. Um dann Rückschlüsse auf die Grundgesamtheit vornehmen zu können, benötigen wir die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Aufbereitung einer Stichprobe - Bearbeiten des Zahlenmaterials

Die Elemente der Stichprobe werden meist in Klassen eingeteilt. Dabei wird die Anzahl der Elemente in einer Klasse absolute Häufigkeit (n_i) und ihr prozentualer Anteil relative Häufigkeit (h_i) genannt.

$h_i = \frac{n_i}{n}$ (n = Gesamtzahl der untersuchten Elemente)

Die Häufigkeit wird meist als Funktion der Klassenkenngrösse (z.B. Klassenmitte) aufgezeichnet (Histogramm, Staffelbild). In vielen Fällen ergibt sich ein glockenförmiger Verlauf für das Diagramm.

Zur Bewertung der statistischen Verteilung dienen Lageparameter und Streuungsparameter. Meistens wird (bei einer ungefähr symmetrischen Verteilung der Werte) der empirische Mittelwert $\bar{x}$ als Lageparameter benützt. Es gibt aber auch noch den Median oder Zentralwert $\tilde{x}$. Es ist jener Wert, der bei einer nach Grösse geordneten Liste in der Mittel liegt. Für die Streuung berechnet man bei etwa glockenförmigen Verteilungen die empierische Standardabweichung s (oder Δx in der Fehlerrechnung). Ein anderer Streuungsparameter ist der Variationskoeffizient $v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$. In der Fehlerrechnung bezeichnet man diese Grösse als relativen Fehler $\frac{\Delta x}{\bar{x}}$ oder prozentualen Fehler $\frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%$. Für einfache Streuungsabschätzungen kann aber bereits die Spannweite, d.h. der Abstand zwischen minimalem und maximalem Wert gute Dienste leisten.

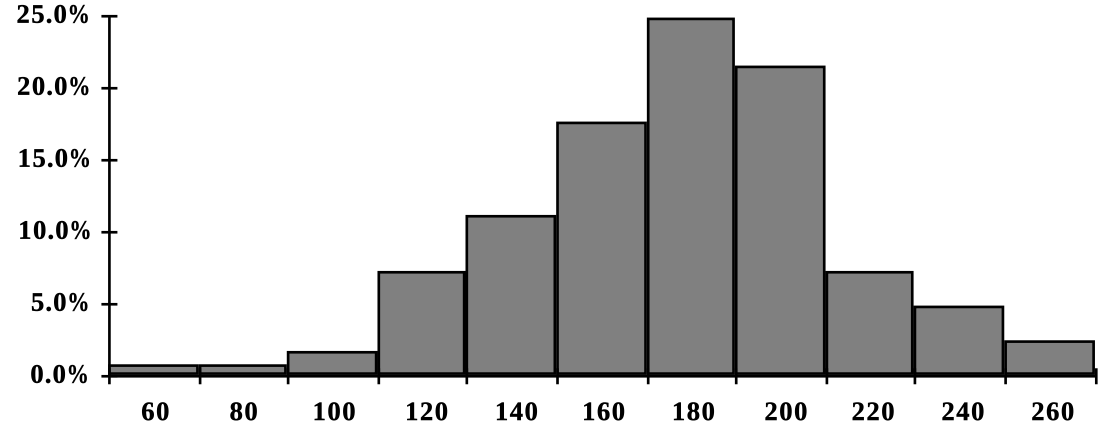
Beispiel: Wachstum von 9-jährigen Nadelbäumen (125 Stück):

Es wird die Höhe z gemessen und auf cm gerundet.

x =	234	149	237	166	183	153	167	221	209	178
	146	195	192	269	170	126	181	164	173	192
	236	166	247	172	162	172	175	262	216	188
	129	159	181	223	193	159	184	209	194	107
	169	148	169	222	188	186	198	176	137	233
	159	190	187	177	139	206	176	166	195	177
	194	173	216	201	150	153	197	169	175	147
	139	254	201	126	142	120	176	180	194	169
	195	70	180	227	117	119	185	206	182	246
	171	139	159	204	184	181	170	214	149	158
	143	201	129	61	146	202	162	179	113	132
	200	209	203	198	196	202	150	172	156	147
	219	219	157	102	114					

Klasseneinteilung:

<table>
<tr><th></th><th></th><th>n_i</th><th>h_i</th><th>x_i</th><th>$n_i \bullet x_i$</th><th>$(x_i - \bar{x})^2$</th><th>$n_i \bullet (xi - \bar{x})^2$</th></tr>
<tr><td>$50 \le x < 70$</td><td>|</td><td>1</td><td>0.8%</td><td>60</td><td>60</td><td>13604.9</td><td>13604.9</td></tr>
<tr><td>$70 \le x < 90$</td><td>|</td><td>1</td><td>0.8%</td><td>80</td><td>80</td><td>9339.3</td><td>9339.3</td></tr>
<tr><td>$90 \le x < 110$</td><td>||</td><td>2</td><td>1.6%</td><td>100</td><td>200</td><td>5873.7</td><td>11747.4</td></tr>
<tr><td>$110 \le x < 130$</td><td>||||| ||||</td><td>9</td><td>7.2%</td><td>120</td><td>1080</td><td>3208.1</td><td>28872.8</td></tr>
<tr><td>$130 \le x < 150$</td><td>||||| ||||| ||||</td><td>14</td><td>11.2%</td><td>140</td><td>1960</td><td>1342.5</td><td>18794.9</td></tr>
<tr><td>$150 \le x < 170$</td><td>||||| ||||| ||||| ||||| ||</td><td>22</td><td>17.6%</td><td>160</td><td>3520</td><td>276.9</td><td>6091.6</td></tr>
<tr><td>$170 \le x < 190$</td><td>||||| ||||| ||||| ||||| ||||| ||||| |</td><td>31</td><td>24.8%</td><td>180</td><td>5580</td><td>11.3</td><td>350.0</td></tr>
<tr><td>$190 \le x < 210$</td><td>||||| ||||| ||||| ||||| ||||| ||</td><td>27</td><td>21.6%</td><td>200</td><td>5400</td><td>545.7</td><td>14733.6</td></tr>
<tr><td>$210 \le x < 230$</td><td>||||| ||||</td><td>9</td><td>7.2%</td><td>220</td><td>1980</td><td>1880.1</td><td>16920.8</td></tr>
<tr><td>$230 \le x < 250$</td><td>||||| |</td><td>6</td><td>4.8%</td><td>240</td><td>1440</td><td>4014.5</td><td>24086.9</td></tr>
<tr><td>$250 \le x < 270$</td><td>|||</td><td>3</td><td>2.4%</td><td>260</td><td>780</td><td>6948.9</td><td>20846.7</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>125</td><td>100.0%</td><td></td><td>$\bar{x}$ =176.64</td><td></td><td>165388.8</td></tr>
</table>



x_i = Klassenmitte $\quad$ n_i = absolute Häufigkeit $\quad$ $h_i = \frac{n_i}{n}$ = relative Häufigkeit

empirischer Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i \qquad \text{(mit Klasseneinteilung)}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{(ohne Klasseneinteilung)}$$

empirische Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

$\bar{x} = \frac{22080}{125} = 176{,}64 \quad s = \sqrt{\frac{165389}{124}} = 36{,}5$

s^2 … empirische Varianz

Regression und Korrelation

Bisher haben wir die Verteilung eines Messwertes untersucht. Häufig geht es aber um das Zusammenspiel mehrerer verschiedener Grössen. So kommt es z.B. in der Physik vor, dass Spannung und Stromstärke gemessen werden. Wir erhalten eine Reihe von Wertepaaren.

Lineare Regression

Gegeben ist eine Stichprobe von n Wertepaaren (x_i/y_i) mit i = 1, …, n. Gesucht ist eine möglichst einfache Gleichung $y = f(x)$ oder $x = f^{-1}(y)$, welche die Beziehung zwischen den Grössen x und y wenigstens angenähert darstellt. Wir werden uns hier auf eine lineare Beziehung beschränken.

Um die Güte des Zusammenhangs zwischen den Grössen auszudrücken, berechnen wir dann einen sogenannten Korrelationskoeffizienten.

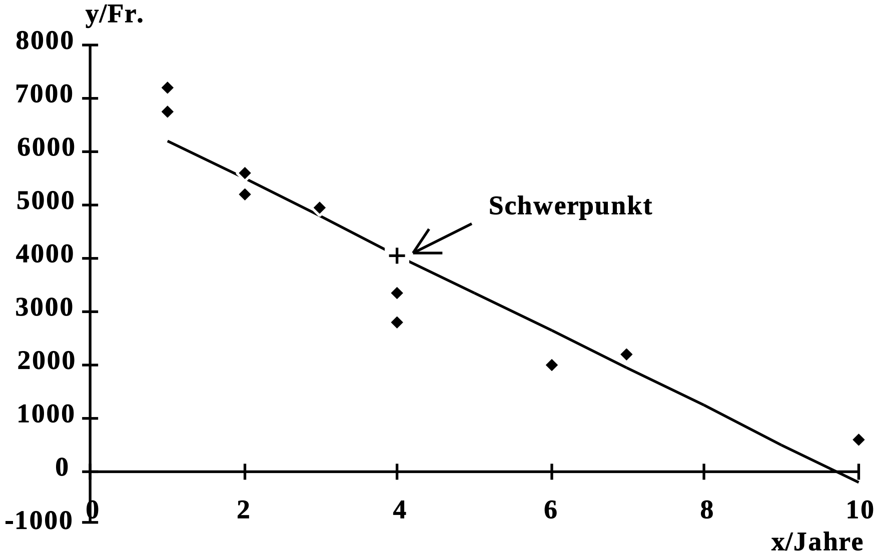
Beispiel: Das momentane Angebot eines Autotyps (Marke, Klasse, Ausstattung jeweils gleich) in den Garagen von Chur zeigt das in der Tabelle wiedergegebene Bild (Alter des Fahrzeugs/Preis). Einen Ersten Eindruck des Zusammenhangs von Alter und Preis gibt das Diagramm (Punktwolke). Werden von den x_i- und den y_i-Werten jeweils die Mittelwerte berechnet, erhält man den Schwerpunkt $(\bar{x}/\bar{y})$ der Punktwolke. Die Regressionsgerade (Ausgleichsgerade) soll durch diesen Schwerpunkt gehen.

	Alter in Jahren x_i	Preis in Fr. y_i	$x_i \cdot y_i$
	2	5580	11160
	1	7180	7180
	3	4950	14850
	1	6740	6740
	4	2760	11040
	7	2200	15400
	10	600	6000
	2	5200	10400
	4	3340	13360
	6	2000	12000
Anzahl n	10	10	10
Summe	40	40550	108130
Mittelwert $\bar{x}$, $\bar{y}$	4.0	4055	
Standardabweichung s_x, s_y	2.9	2190.9	
Kovarianz c_{xy}	-6007.8		
$a = \frac{c_{xy}}{s_x^2}$	-715.2		
Korrelationskoeffizient r_{xy}	-0.94		

Ansatz für die Regressionsgerade: $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$

Es bleibt noch, das a zu bestimmen. Wenn a bekannt wäre, könnte man durch Einsetzen der x_i-Werte die jeweiligen Ordinaten $a(x_i - \bar{x}) + \bar{y}$ der Regressionsgerade berechnen. Diese Ordinaten weichen von den tatsächlich gemessenen y_i-Werten in der Regel ab. Der Koeffizient a (Steigung) wird nun so bestimmt, dass die *Summe der Quadrate der genannten Abweichungen minimal* wird.

Summe der Abweichungsquadrate = $S(a) = \sum_{i=1}^{n} [a(x_i - \bar{x}) + \bar{y} - y_i]^2$



Regressionsgerade	
x	y
1	6189.3
2	5477.9
3	4766.4
4	4055.0
5	3343.6
6	2632.1
7	1920.7
8	1209.2
9	497.8
10	-213.7

Die Minimalisierung der Funktion S(a) kann mit den Mitteln der Differentialrechnung bewirkt werden. Wir werden später darauf zurückkommen. Hier sei das Ergebnis dieser Rechnung angegeben:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right]}{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]} = \frac{c_{xy}}{s_x^2}$$

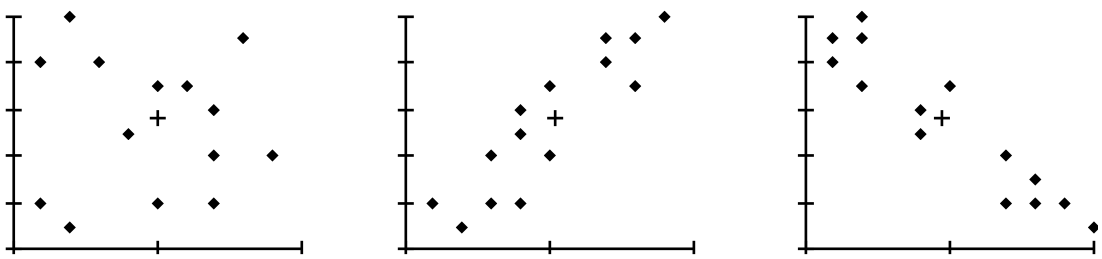
c_{xy} heisst Kovarianz der Stichprobe und s_x^2 ist die Varianz der x-Werte.

Hier wurde ein Ausgleich der y-Werte bezüglich der x-Werte durchgeführt (1. Regressionsgerade). Ebenso hätte man die x-Werte bezüglich der y-Werte ausgleichen können (2. Regressionsgerade). Die Rechnung wird dann mit vertauschten Bezeichnungen (x ↔ y) durchgeführt.

Um die Korrelation, d.h. den Grad der Übereinstimmung der gemessenen Punkte mit der Regressionsgeraden zu bewerten, wird ohne weiter auf die Grundlagen einzugehen, ein Korrelationskoeffizient r_{xy} definiert:

$$r_{xy} = \frac{c_{xy}}{s_x s_y} \qquad \text{(Korrelationskoeffizient von Bravais-Pearson)}$$

Der Wert von r_{xy} liegt zwischen -1 und 1. In der Nähe von 0 liegt eine schwache Korrelation vor, während bei Annäherung gegen -1 bzw. 1 die Korrelation ansteigt.



$r_{xy} = 0.06$ $\qquad$ $r_{xy} = 0.91$ $\qquad$ $r_{xy} = -0.95$

Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen sind im Alltag, im Beruf, in der Wirtschaft usw. immer wieder Grundlagen für Entscheidungen. Die Mathematik fasst die Wahrscheinlichkeiten in Zahlen, um bessere Voraussetzungen für Schlussfolgerungen zu schaffen.

Sichere und zufällige Ereignisse

In der Alltagssprache verstehen wir unter einem Ereignis das Eintreten einer bestimmten Erscheinung, nachdem gewisse Voraussetzungen geschaffen worden sind.

Beispiele:
Sicheres Ereignis: Wenn ein Stein losgelassen wird, fällt er zu Boden.
unmögliches Ereignis: Wenn ein normaler Spielwürfel geworfen wird, zeigt er 7 Augen an.
zufälliges Ereignis: Die Zahl 25 wird heute im Zahlenlotto gezogen.

In der Mathematik kann man mit einer solchen Beschreibung von Ereignissen nicht so viel anfangen. Wir versuchen, Ereignisse mit Mengen zu beschreiben. Dazu ist es zunächst einmal interessant, alle möglichen Ausgänge eines Zufallsversuches zu erfassen.

Stichprobenraum

Wir werfen einmal mit einem Becher drei Würfel, einen roten, einen blauen und einen grünen. Sind wir an der Summe der Augenzahlen interessiert, wäre die Menge S = {3, 4, 5, …, 17, 18} ein geeigneter Stichprobenraum. Wollen wir aber nur unterscheiden, ob die drei Würfel alle gleiche Augenzahl (Pasch) aufweisen, reicht S' = {Pasch, Nicht-Pasch} als Stichprobenraum. Der Stichprobenraum könnte aber auch als Tripel von Zahlen dargestellt werden: S" = {(1,1,1), (1,1,2), …, (5,6,6), (6,6,6)}.

Ein Ereignis, z.B. die Augensumme 4 zu werfen, kann dann als Teilmenge des Stichprobenraumes vertanden werden. E = {4} oder E" = {(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)}

Der Stichprobenraum S ist also die Zusammenfassung aller möglichen Einzelereignisse (Elementarereignisse). Die Potenzmenge $\mathcal{P}$(S) umfasst alle denkbaren Ereignisse.

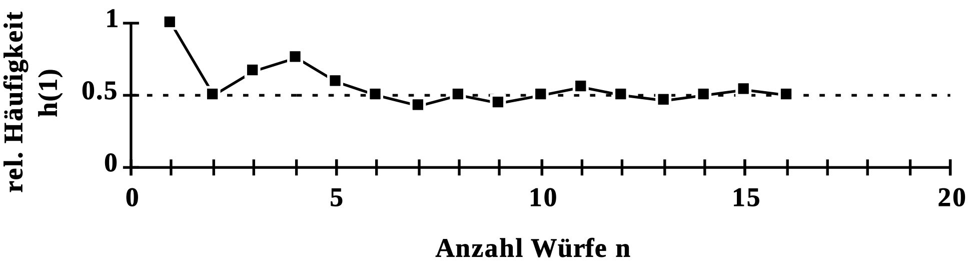
Das sichere Ereignis ist somit gleich dem Stichprobenraum S, während das unmögliche Ereignis mit der leeren Menge {} beschrieben wird. Jedes mögliche Ereignis E kann als Teilmenge von S beschrieben werden, es ist Element der Potenzmenge $\mathcal{P}$(S).

Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Eine Münze wird immer wieder geworfen. Die Ereignisse Kopf bzw. Zahl werden notiert. Wir werden diese Ereignisse auch mit {0} und {1} oder ganz einfach mit 0 und 1 bezeichnen.

Nachdem eine Serie von Würfen ausgeführt wurde, wird in einem Diagramm die relative Häufigkeitfür das Auftreten von Ereignis 1 nach n Würfen aufgetragen.

z.B.: 1011000101100110



Für sehr grosses n wird der Wert für die relative Häufigkeit ganz nahe an 0,5 herankommen. Diesen Wert setzen wir als Wahrscheinlichkeit p(1) für das Auftreten der Seite 1 bei einem Münzwurf fest.

Allgemein: Gegeben ist ein Stichpribenraum S mit den Elementarereignissen a_i. Jedem Elementarereignis wird eine Wahrscheinlichkeit p_i zugeordnet.

Stichprobenraum $S = \{\ \underset{\displaystyle p_1}{\overset{\downarrow}{a_1}},\ \underset{\displaystyle p_2}{\overset{\downarrow}{a_2}},\ \underset{\displaystyle p_3}{\overset{\downarrow}{a_3}},\ \ldots,\ \underset{\displaystyle p_n}{\overset{\downarrow}{a_n}}\}$

Axiome der Wahrscheinlichkeit

P ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E. Die Zuordnung ist eindeutig, es besteht somit eine Funktion, welche die Potenzmenge von S auf die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 abbildet.

P: $\mathcal{P}$(S) → {P R | 0 ≤ P ≤ 1}
P: E → P(E)

Für die Wahrscheinlichkeit P gelten folgende Axiome:

I.	**P ist nicht negativ: P(E) ≥ 0**	**(für E S)**
II.	**P ist normiert: P(S) = 1**	**(S = sicheres Ereignis = Stichprobenraum)**
III.	**P ist additiv: A S B S A ∩ B = {} → P(A B) = P(A) + P(B)**	

Für ein Ereignis E, welches Teilmenge von S ist, kann die Wahrscheinlichkeit folgendermassen berechnet werden:
z.B.: E = {a_3, a_{10}, a_{21}, a_{33}} P(E) = $p_3 + p_{10} + p_{21} + p_{33}$

Für Ereignisse A und B, welche keine leere Schnittmenge haben gilt:
P(A B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

Gilt A ∩ B = {}, heissen die Ereignisse unvereinbar.

Sind in S alle Elementarereignisse (Ausfälle) gleichwahrscheinlich ($p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$), dann kann man die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E berechnen mit (Laplace):

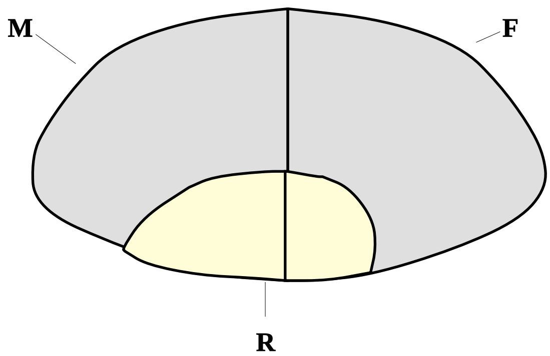
$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der Elemente in E}}{\text{Anzahl der Elemente in S}} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{g}{m}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel:
Aus der Bevölkerung wird eine sehr grosse Stichprobe von Männern und Frauen zufällig gezogen. Anschliessend werden alle Mitglieder der Stichprobe auf Rotgrün-Blindheit untersucht. In der Praxis kommt man zu folgenden Resultaten: Die Anzahl der Männer (M) und der Frauen (F) in der Stichprobe ist etwa gleich gross. Insgesamt werden ca. 4,2% Personen Rotgrünblind sein (R). Interessant ist, dass unter den Männern die Rotgrün-Blindheit mit 8% wesentlich stärker ausgeprägt ist, als unter den Frauen (0,4%).

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt nun: P(M) = P(F) = 0,5
P(R|M) ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person rotgrünblind ist, wenn sie ein Mann ist. Entsprechend ist P(R|F) die bedingte Wahrscheinlichkeit für eine rotgrünblinde Frau.
P(R|M) = 0,08
P(R|F) = 0,004

Wenn wir die Wahrscheinlichkeit für die Auswahl eines rotgrünblinden Mannes aus der gesamten Stichprobe berechnen wollen, müssen wir P(M) und P(R|M) multiplizieren:
P(M ∩ R) = P(M)•P(R|M) = 0,5•0,08 = 0,040
Analog bei den Frauen:
P(F ∩ R) = P(F)•P(R|F) = 0,5•0,004 = 0,002
Die Summe P(M ∩ R) + P(F ∩ R) = 0,042 trifft genau die Wahrscheinlichkeit für eine rotgrünblinde Person P(R).



Allgemein: Die bedingte Wahrscheinlichkeit P(B|A) ist die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, unter der Bedingung, dass zuvor A eingetreten ist.

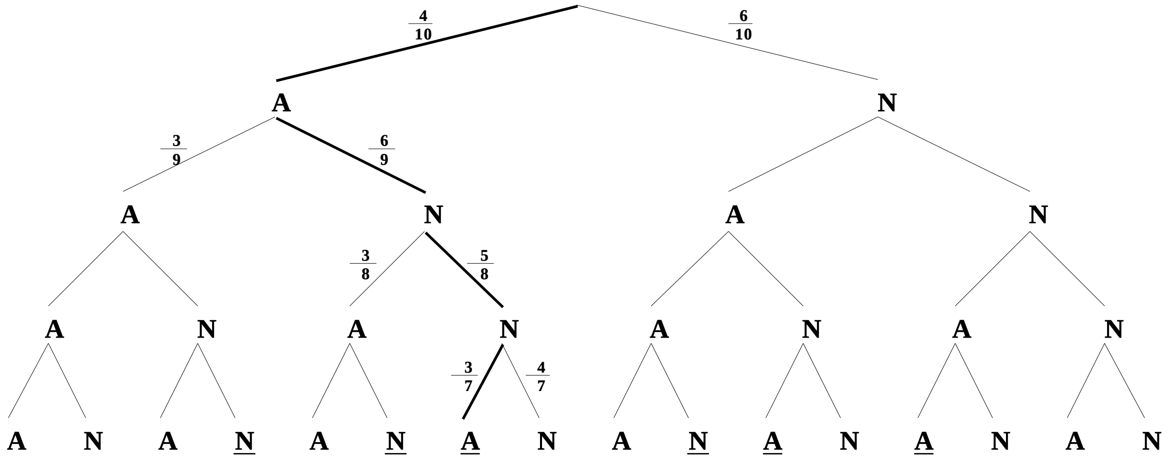
Es ist: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ **Daraus folgt: P(A ∩ B) = P(A)•P(B|A)**

P(A ∩ B) bedeutet die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl A als auch B eintritt. Ist A ein unmögliches Ereignis (P(A) = 0), so ist P(B|A) = 0 (Definition).

Beispiele:

1) **Aus der aufgezeichneten Urne $\boxed{\text{AAAANNNNNN}}$ werden 4 Buchstaben nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit das Wort ANNA zu erhalten?**

Lösung mit Baumdiagramm:



Beim Ziehen ohne Zurücklegen wird die Anzahl der Buchstaben in der Urne bei jedem Zug verändert.

Dicker Pfad: P("ANNA") = $\frac{4}{10} \bullet \frac{6}{9} \bullet \frac{5}{8} \bullet \frac{3}{7} = 0.0714$

Entlang eines Pfades können die Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden.

2) **Aus der Urne aus Aufgabe 1) sollen zwei A und zwei N gezogen werden (Die Reihenfolge ist unbedeutend). Es wird wiederum ohne Zurücklegen gezogen.**

In der Zeichnung oben sind die zielführenden Pfade mit einem Strich markiert (6 Pfade). Die Wahrscheinlichkeit, zwei A und zwei N zu ziehen, erhält man als Summe der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten.

P(2A und 2 N) = P(AANN) + P(ANAN) + P(ANNA) + P(NAAN) + P(NANA) + P(NNAA) =

$$= \frac{4}{10} \bullet \frac{3}{9} \bullet \frac{6}{8} \bullet \frac{5}{7} + \frac{4}{10} \bullet \frac{6}{9} \bullet \frac{3}{8} \bullet \frac{5}{7} + \frac{4}{10} \bullet \frac{6}{9} \bullet \frac{5}{8} \bullet \frac{3}{7} + \frac{6}{10} \bullet \frac{4}{9} \bullet \frac{3}{8} \bullet \frac{5}{7} + \frac{6}{10} \bullet \frac{4}{9} \bullet \frac{5}{8} \bullet \frac{3}{7} + \frac{6}{10} \bullet \frac{5}{9} \bullet \frac{4}{8} \bullet \frac{3}{7} =$$

$$= 6 \bullet \frac{6}{10} \bullet \frac{5}{9} \bullet \frac{4}{8} \bullet \frac{3}{7} = 0.429$$

3) **Jedesmal, wenn Professor X sieben Personen besammen sieht, wettet er 100 : 1, dass darunter mindestens zwei Personen vorkommen, die am gleichen Wochentag geboren sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Wette verliert?**

In diesem Fall berechnet man besser die Gegenwahrscheinlichkeit $\bar{p}$, nämlich, dass alle 7 Personen an verschiedenen Wochentagen geboren sind.

$$\bar{p} = \frac{7}{7} \bullet \frac{6}{7} \bullet \frac{5}{7} \bullet \frac{4}{7} \bullet \frac{3}{7} \bullet \frac{2}{7} \bullet \frac{1}{7} = \frac{7!}{7^7} = 0{,}00612 < 1/100$$

4) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Wurf mit fünf Würfeln genau drei gleiche Augenzahlen zu werfen?**

Es wird mit kombinatorischen Mitteln die Anzahl der günstigen und der möglichen Fälle ermittelt. Beim Abzählen der günstigen Fälle ist zu beachten, dass die 3 gleichen Augenzahlen auf 5 Würfel verteilt sind (Kombination von 5 Elementen zur Klasse 3).

$$m = 6^5$$

$$g = \binom{5}{3} \bullet 6 \bullet 5 \bullet 4 = 1200$$

$$P = \frac{g}{m} = \frac{1200}{6^5} = 0{,}154$$

Die Formel von Bayes

Von den beiden Ereignissen A und B sind ihre Wahrscheinlichkeiten gegeben. Ferner ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von P(B | A) bekannt. Unter diesen Voraussetzungen kann man die bedingte Wahrscheinlichkeit P(A | B) berechnen.

geg.: P(A), P(B), P(B | A)

Bekanntlich gilt: $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ **Daraus folgt:** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$

Entsprechend muss gelten: $P(A \mid B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$ **und somit:** $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$

Vergleicht man die Ergebnisse rechts, so erhält man:

$$P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Aufgelöst auf P(A | B) ergibt sich:

$$P(A \mid B) = P(B \mid A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

Diese Beziehung kann man verallgemeinern. Wir setzen $A = E_i$**. Damit erhält man:**

$$P(E_i \mid B) = P(B \mid E_i) \cdot \frac{P(E_i)}{P(B)}$$

P(B) kann durch die totale Wahrscheinlichkeit $\sum_{j=1}^{n} P(E_j) \cdot P(B \mid E_j)$ **ersetzt werden.**

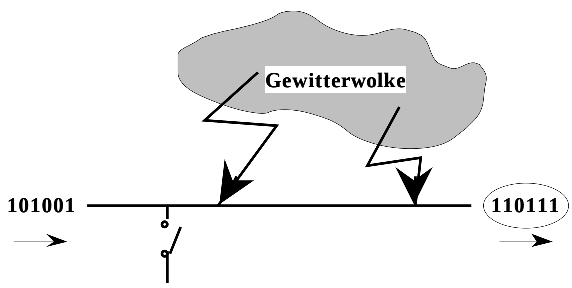
Die Bayes-Formel heisst dann allgemein:

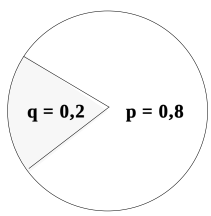
$$P(E_i \mid B) = \frac{P(B \mid E_i) \cdot P(Ei)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j) \cdot P(B \mid E_j)}$$

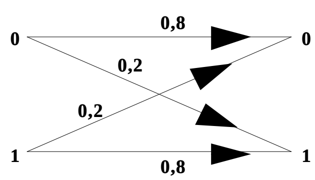
Beispiel: Der gestörte Nachrichtenkanal

Das nebenstehende Bild zeigt einen Nachrichtenkanal. Durch diesen Kanal werden die Zeichen 0 und 1 übertragen. Wegen Störungen (Gewitter, Öffnen und Schliessen von Schaltern usw.) wird manchmal eine gesendete 0 als 1 empfangen und umgekehrt.Wir nehmen an, dass das Schicksal eines jeden Zeichens durch das abgebildete Glücksrad gesteuert wird, d.h., dass jedes Zeichen mit der Wahrscheinlichkeit q = 0,2 geändert wird. Ein solcher Kanal heisst *binär symmetrisch*.

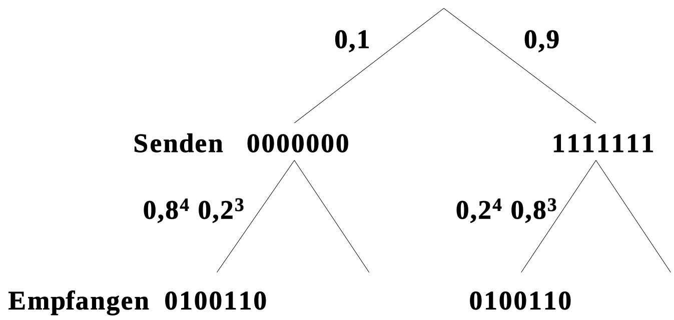
Es soll eine wichtige Nachricht übermittelt werden, die aus dem einen Zeichen 1 besteht. Um die Nachricht vor einer Verfälschung zu schützen, wird 11111 statt 1 gesendet. Der Empfänger kann 32 verschiedene Nachrichten Empfangen. Bei der Deutung der Nachricht trifft er eine Mehrheitsentscheidung. Enthält die Nachricht mehr Einsen als Nullen, so wird sie als 1 gedeutet, anderfalls als 0. Die Lösung kann mit der Binomialverteilung gefunden werden.







Wenn aber z.B. eine Nullfolge seltener als eine Folge von Einsen gesendet wird, ist die Dekodirung durch Mehrheitsentscheidung nicht mehr das Richtige. Nehmen wir an, dass eine Nullfolge 0000000 gesendet worden sei. Die Wahrscheinlichkeit für eine Nullfolge sei 0,1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nullfolge gesendet wurde, wenn 0100110 empfangen wurde?



Als Ereignis A wird *0000000 senden* und als Ereignis B *0100110 empfangen* bezeichnet. Dann gilt:

$P(A) = p(0000000 \text{ senden}) = 0{,}1$

$P(B) = p(0100110 \text{ empfangen}) = 0{,}1 \bullet 0{,}8^4 \bullet 0{,}2^3 + 0{,}9 \bullet 0{,}2^4 \bullet 0{,}8^3$

$P(A \cap B) = p(A) \bullet p(B \mid A) = 0{,}1 \bullet 0{,}8^4 \bullet 0{,}2^3$

Nach der Formel von Bayes gilt:

$$P(A \mid B) = P(B \mid A) \bullet \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A) \bullet P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \mid B)$ = Wahrscheinlichkeit, dass 0000000 gesendet wurde, wenn 0100110 empfangen wird.

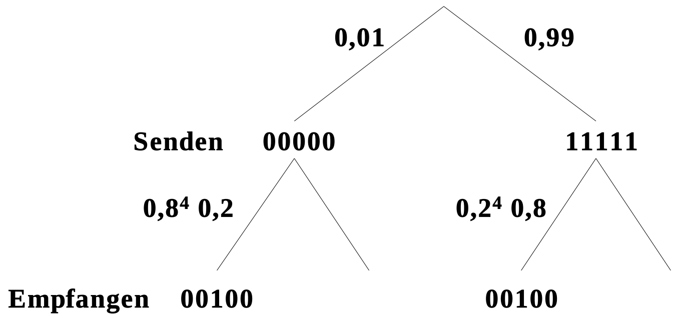
$P(A \cap B)$ = Wahrscheinlichkeit, dass 0000000 gesendet wurde und 0100110 empfangen wird

Somit ergibt sich:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1 \bullet 0.8^4 \bullet 0.2^3}{0.1 \bullet 0.8^4 \bullet 0.2^3 + 0.9 \bullet 0.2^4 \bullet 0.8^3} = \frac{4}{13} = 0.31$$

Hier folgt, dass der Block 0100110 als 1 zu lesen ist, obwohl die Nullen in der Mehrzahl vorhanden sind.

Für ein zweites Beispiel nehmen wir an, dass 00100 empfangen wurde, wobei die Wahrscheinlichkeit für eine Nullfolge beim Senden 0,01 betragen soll.



$P(A) = p(00000 \text{ senden}) = 0{,}01$

$P(B) = p(00100 \text{ als 0 lesen}) = 0{,}01 \bullet 0{,}8^4 \bullet 0{,}2 + 0{,}99 \bullet 0{,}2^4 \bullet 0{,}8$

$P(A \cap B) = p(A) \bullet p(B \mid A) = 0{,}01 \bullet 0{,}8^4 \bullet 0{,}2$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.01 \bullet 0.8^4 \bullet 0.2}{0.01 \bullet 0.8^4 \bullet 0.2 + 0.99 \bullet 0.2^4 \bullet 0.8} = \frac{64}{163} = 0{,}393$$

Die Nachricht wird man als 1 lesen müssen, obwohl die Nullen in der Überzahl sind!

Lineare Algebra

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Ein Vektor $\vec{a}$ ist von den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear abhängig, wenn er sich als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt, er ist linear unabhängig von diesen Vektoren, wenn er sich nicht als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lässt.

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist linear abhängig, wenn sich mindestens ein Vektor aus dieser Menge als Linearkombination der übrigen darstellen lässt.

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist linear unabhängig, wenn sich kein Vektor aus dieser Menge als Linearkombination der übrigen darstellen lässt.

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n = \vec{o}$ nur mit $k_1 = 0 \quad k_2 = 0 \quad \ldots \quad k_n = 0$ erfüllt ist.

Beweis (in zwei Teilen):

1. Voraussetzung: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ sei linear unabhängig
   Behauptung: Die Gleichung (1) $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n = \vec{o}$ ist nur mit $k_1 = 0 \quad k_2 = 0 \quad \ldots \quad k_n = 0$ erfüllt.
   Beweis: indirekt; Annahme: Es werde die Gleichung (1) mit mindestens einem $k_i \neq 0$ erfüllt.
   z.B. $k_1 \neq 0$
   $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n = \vec{o}$ umformen
   $k_1\vec{a}_1 = -k_2\vec{a}_2 - \ldots - k_n\vec{a}_n$ $|:k_1 \neq 0$
   $\vec{a}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{k_n}{k_1}\vec{a}_n$
   Das heisst aber, dass sich $\vec{a}_1$ als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen lässt, die Menge ist somit linear abhängig. Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Voraussetzung: Die Gleichung $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n = \vec{o}$ ist nur mit $k_1 = 0 \quad k_2 = 0 \quad \ldots \quad k_n = 0$ erfüllt.
   Behauptung: Die Menge $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist linear unabhängig.
   Beweis: indirekt, Annahme: Die Menge $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ sei linear abhängig.
   Damit kann aber mindestens ein Vektor als Linearkombination der übrigen dargestellt werden. z.B. $\vec{a}_1 = \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$ umformen
   $\vec{a}_1 - \lambda_2\vec{a}_2 - \ldots - \lambda_n\vec{a}_n = \vec{o}$
   Der Koeffizient von $\vec{a}_1$ ist aber jetzt 1, d.h. $\neq 0$ Widerspruch zur Voraussetzung.
   Damit ist die Behauptung bewiesen.

Folgerungen

Eine Menge, welche den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

Eine Menge, welche ein Vielfaches eines anderen Vektors enthält, ist linear abhängig.

Eine Menge, welche eine Teilmenge von linear abhängigen Vektoren enthält, ist linear abhängig.

Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge von Vektoren ist auch linear unabhängig.

Jede Menge von mehr als n n-dimensionaler Vektoren ist linear abhängig.

Vektoren in Ebene und Raum

kollinear: Vektoren sind kollinear, wenn sie parallel zur selben Geraden stehen.
(also: zwei oder mehrere kollineare Vektoren sind linear abhängig.)

komplanar: Vektoren sind komplanar, wenn sie zur selben Ebene parallel verlaufen.
(also: mehr als zwei komplanare Vektoren sind linear abhängig.)

Der lineare Vektorraum

Eine Menge V ist über dem Körper K ein Vektorraum, wenn folgendes gilt:

(1) **V ist eine kommutative Gruppe bezüglich der Addition.**

(2) **Die Multiplikation mit einem Skalar $k \in K$ ordnet jedem Element $\vec{a} \in V$ eingdeutig ein Element $k \bullet \vec{a} \in V$ zu.**

(3) $k \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = k \bullet \vec{a} + k \bullet \vec{b} \qquad k \in K;\ \vec{a}, \vec{b} \in V$

(4) $(k_1 + k_2) \bullet \vec{a} = k_1 \bullet \vec{a} + k_2 \bullet \vec{a} \qquad k_1, k_2 \in K;\ \vec{a} \in V$

(5) $k_1 \bullet (k_2 \bullet \vec{a}) = (k_1 \bullet k_2) \bullet \vec{a} \qquad k_1, k_2 \in K;\ \vec{a} \in V$

(6) $1 \bullet \vec{a} = \vec{a}$

Basis des Vektorraums

Eine Teilmenge B eines Vektorraums V heisst Basis von V, wenn B linear unabhängig ist und den ganzen Raum V aufspannt (d.h. alle Elemente von V lassen sich durch Linearkombination der Basisvektoren erzeugen).

Dimension von Vektorräumen

Ein Vektorraum hat die Dimension n, wenn er durch eine Basis von n Vektoren erzeugt wird.

Jeder Vektor kann als Linearkombination der n Basisvektoren dargestellt werden. Man erhält also die Summe von n Komponenten. Oft werden die skalaren Koeffizienten zu einem Zahlenschema zusammengestellt.

Basis $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$

$$\vec{x} = k_1 \bullet \vec{a}_1 + k_2 \bullet \vec{a}_2 + \ldots + k_n \bullet \vec{a}_n = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \ldots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Beispiele von Vektorräumen

1-dimensionaler reeller Vektorraum: Basis $B = \{\vec{a}\}$;

$V^1 = \{\vec{x} \mid \vec{x} = k \bullet \vec{a};\ k \in R\}$

2-dimensionaler reeller Vektorraum: Basis $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$;

$V^2 = \{\vec{x} \mid \vec{x} = k_1 \bullet \vec{a} + k_2 \bullet \vec{b};\ k_1, k_2 \in R\}$

3-dimensionaler reeller Vektorraum: Basis $B = \{a, b, c\}$;

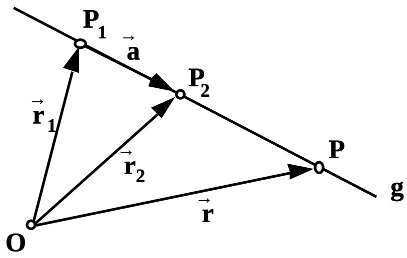
$V^3 = \{\vec{x} \mid \vec{x} = k_1 \bullet \vec{a} + k_2 \bullet \vec{b} + k_3 \bullet \vec{c};\ k_1, k_2, k_3 \in R\}$

n-dimensionaler reeller Vektorraum: Basis $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$;

$$V^n = \{\vec{x} \mid \vec{x} = k_1 \bullet \vec{a}_1 + k_2 \bullet \vec{a}_2 + \ldots + k_n \bullet \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} k_i \vec{a}_i;\ k_1, k_2, \ldots, k_n \in R\}$$

Die Gerade

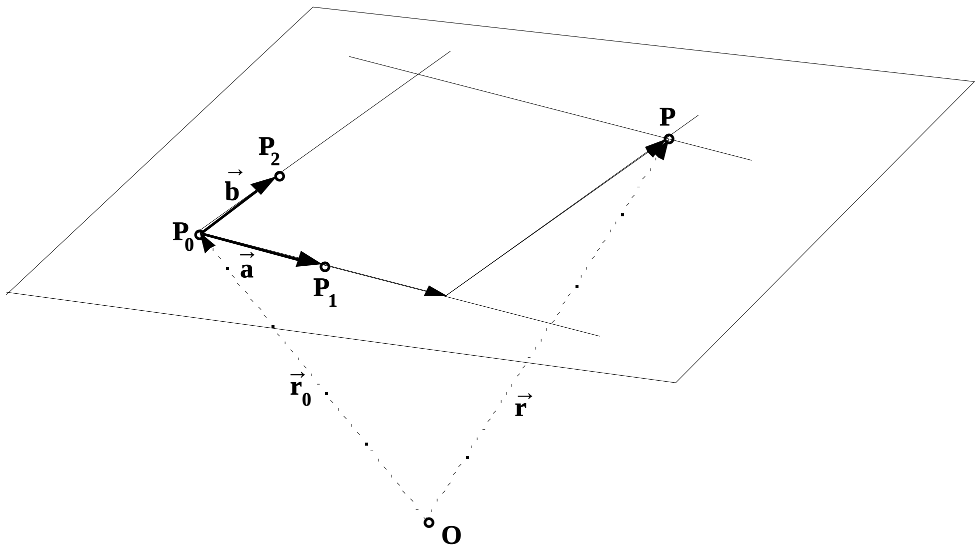
Eine Gerade g ist durch zwei Punkte P_1 und P_2 eindeutig festgelegt (und zwar gleichgültig, welche Dimension der Raum hat). Gesucht ist nun eine Gleichung , welche von allen Punkte der Gerade erfüllt werden kann. Da Punkte durch ihren Ortsvektor eindeutig festgelegt werden, kann man eine Darstellung des Ortsvektors zum beliebigen Punkt P auf der Geraden suchen. Es gilt:



$\vec{r} = \vec{r}_1 + k \bullet \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_1 + k \bullet \vec{a} \quad (k \quad R)$

Die Ebene

Eine Ebene im Raum ist durch drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen, eindeutig festgelegt.



Für jeden Punkt der Ebene gilt: $\vec{r} = \vec{r}_0 + k_1 \bullet \overrightarrow{P_0P_1} + k_2 \bullet \overrightarrow{P_0P_2} = \vec{r}_0 + k_1 \bullet \vec{a} + k_2 \bullet \vec{b} \quad (k_1, k_2 \quad R)$

Normalenform von Gerade und Ebene

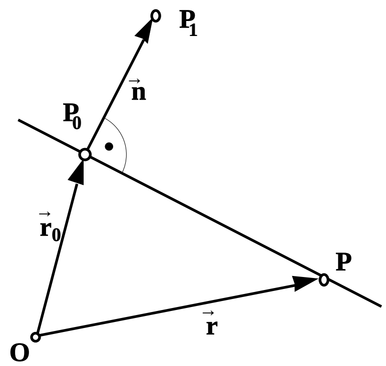
$\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$

$\vec{n} \bullet (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$

$\vec{n} \bullet \vec{r} - \vec{n} \bullet \vec{r}_0 = 0$

Bei festem Normalvektor $\vec{n}$ ist der Ausdruck $\vec{n} \bullet \vec{r}_0$ konstant. ($\vec{n} \bullet \vec{r}_0 = -k$)

$\vec{n} \bullet \vec{r} + k = 0$



2-dimensional

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$

Gerade in der Ebene:

$n_1x + n_2y + k = 0$

Allgemeine Geradengleichung:

$Ax + By + C = 0$

Der Vektor $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ ist Normalvektor zur Geraden.

3-dimensional

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Ebene im Raum:

$n_1x + n_2y + n_3z + k = 0$

Allgemeine Ebenengleichung:

$Ax + By + Cz + D = 0$

Der Vektor $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ ist Normalvektor zur Ebene.

Hessesche Normalenform (HNF)

In der Hesseschen Normalenform wird anstelle eines beliebigen Normalvektors $\vec{n}$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{n}$ eingesetzt. Dann erhält man:

$$\frac{\vec{n} \bullet \vec{r} + k}{|\vec{n}|} = 0$$

Gerade:

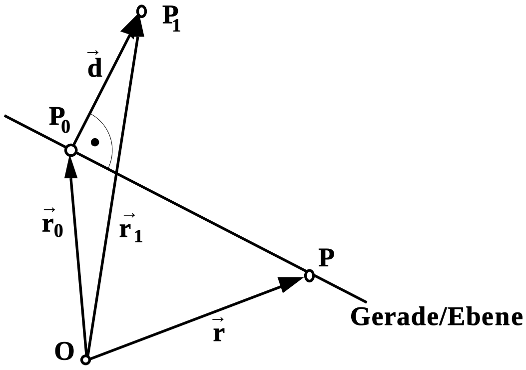
$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Ebene:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden bzw. Ebene

HNF der Geraden/Ebene: $\dfrac{\vec{n} \bullet \vec{r} + k}{|\vec{n}|} = 0$



$$\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$
$$\vec{r}_0 = \vec{r}_1 - \vec{d}$$

P_0 liegt auf der Geraden/Ebene $\quad$ **$\vec{r}_0$ für $\vec{r}$ einsetzen:**

$$\frac{\vec{n} \bullet (\vec{r}_1 - \vec{d}) + k}{|\vec{n}|} = 0$$

$$\frac{\vec{n} \bullet \vec{r}_1 - \vec{n} \bullet \vec{d} + k}{|\vec{n}|} = 0$$

$$\frac{\vec{n} \bullet \vec{d}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n} \bullet \vec{r}_1 + k}{|\vec{n}|} \qquad \frac{\vec{n} \bullet \vec{d}}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{n}|} \bullet |\vec{d}| \bullet \cos\ (\vec{n},\vec{d}) = \pm|\vec{d}| = \pm d$$

$$d = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{r}_1 + k|}{|\vec{n}|}$$

Gerade in der Ebene:

$Ax + By + C = 0,\ P_1(x_1, y_1)$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ebene im Raum:

$Ax + By + Cz + D = 0,\ P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

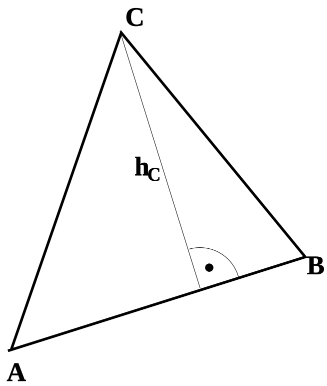
Beispiel: Höhe eines Dreiecks (2-dim), Dreieck A(2/4), B(5/7), C(3/9)

Die Höhe ist der Abstand eines Eckpunktes von der gegenüberliegenden Seite.

Seite c: $y - 7 = \frac{7 - 4}{5 - 2}(x - 5)$

$y - 7 = x - 5, \qquad x - y + 2 = 0$

$$h_c = \frac{|1 \bullet 3 - 1 \bullet 9 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2.83$$



Matrizen

Unter einer Matrix versteht man ein rechteckiges Schema von Elementen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{Spalte} & \end{array}$$

Format: (m,n) = (Anzahl Zeilen, Anzahl Spalten)

Häufig wird als Kurzschreibweise für die (m,n)-Matrix die Form $(A)_{ij}$ geschrieben.

Rang einer Matrix

Unter dem Rang r einer Matrix versteht man die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen- oder Spaltenvektoren.

Transponierte Matrix A'

Werden die Zeilen mit den Spalten einer (m,n)-Matrix vertauscht, so erhält man die sogenannte transponierte Matrix. Sie hat das Format (n,m). Die transponierte Matrix wird mit A' bezeichnet. Oft aber sind auch die Bezeichnungen A^T oder $\overline{A}$ zu finden.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (A')' = A$$

Quadratische Matrix

Ist bei einer (m,n)-Matrix m = n, so hat sie gleichviele Spalten wie Zeilen. Eine solche Matrix heisst quadratisch.

Nebendiagonale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale

Symmetrische Matrix

Gilt für eine quadratische Matrix A = A', so ist die Matrix symmetrisch. Durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen geht eine symmetrische Matrix in sich selbst über.

Gilt für die Transponierte einer Matrix die Beziehung A = - A', so nennt man die Matrix A schiefsymmetrisch.

Nullmatrix

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Format (m,n)

Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix ist quadratisch

Dreiecksmatrix

obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & & a_{2n-2} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mn-1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Gleichheit von Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

A und B sind gleich, wenn sie in allen Elementen übereinstimmen.

$A = B \Leftrightarrow a_{ik} = b_{ik}$ mit $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$

Addition von Matrizen

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$A + B = B + A$ (kommutativ)

$A + (B + C) = (A + B) + C$ (assoziativ)

Man kann nur Matrizen vom gleichen Format addieren!

Man addiert zwei Matrizen, indem man alle ihre Elemente addiert.

Addition der Nullmatrix: $A + O = O + A = A$

Subtraktion von Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \qquad -B = \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1n} \\ -b_{21} & -b_{22} & \dots & -b_{2n} \\ \dots & & & \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \dots & -b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix -B ist die negative Matrix zur Matrix B. Damit kann die Subtraktion von Matrizen definiert werden.

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Man multipliziert eine Matrix mit einem Skalar, indem man alle Elemente der Matrix mit dem Skalar multipliziert.

$\lambda \bullet A = A \bullet \lambda$

Multiplikation von Matrizen

Es seinen die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_s \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_s \end{pmatrix}$. **Ihr skalares Produkt ist** $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_sb_s = \sum_{i=1}^{s} a_ib_i$

Ebenso kann man das skalare Produkt der Vektoren $\vec{a}_r$ **und** $\vec{b}_t$ **mit** $\vec{a}_r \bullet \vec{b}_t = a_{r1}b_{1t} + a_{r2}b_{2t} + \dots + a_{rs}b_{st}$ $= \sum_{i=1}^{s} a_{ri}b_{it}$ **berechnen. Die Vektoren** $\vec{a}_i$ **(i = 1, … r) können als Zeilenvektoren einer Matrix A und die Vektoren** $\vec{b}_j$ **(j = 1, …, s) als Spaltenvektoren einer Matrix B verstanden werden.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1{}' \\ \vec{a}_2{}' \\ \dots \\ \vec{a}_r{}' \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2t} \\ \dots & & & \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{st} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_1 \;\dots\dots\dots\dots\; \vec{b}_t$$

Nun wird das Produkt von zwei Matrizen A•B folgendermassen definiert:

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \dots & & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2t} \\ \dots & & & \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{s} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{s} a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{s} a_{1i}b_{it} \\ \sum_{i=1}^{s} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{s} a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{s} a_{2i}b_{it} \\ \dots & & & \\ \sum_{i=1}^{s} a_{ri}b_{i1} & \sum_{i=1}^{s} a_{ri}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{s} a_{ri}b_{it} \end{pmatrix}$$

Format: **(r,s)** **(s,t)** **(r,t)**

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = A \bullet B = \begin{pmatrix} 6 & 26 \\ 12 & 6 \\ -9 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Format: (4,3) **(3,2)** **(4,2)**

Für das Multiplizieren von Matrizen kann man sich an das folgende Bild halten:

$$\begin{pmatrix} \longrightarrow \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \downarrow & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Die erste Matrix muss also gleichviele Spalten haben wie die zweite Matrix Zeilen hat. Als Resultat erhält man eine Matrix, welche soviele Zeilen wie die erste und soviele Spalten wie die zweite Matrix hat. Wie man sieht, ist die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ. Im obigen Beispiel kann man nicht B•A bilden, weil B zwei Spalten, aber A vier Zeilen hat. Das Produkt von zwei Matrizen ist ja nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist.

Für die Multiplikation von Matrizen gelten aber das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz.

A•(B•C) = (A•B)•C **assoziativ**
A•(B + C) = A•B + A•C **distributiv**

Bei der Multiplikation einer Matrix A mit der Einheitsmatrix E beleibt die Matrix A unverändert.

$$A \bullet E = \underset{(m,n)}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} \bullet \underset{(n,n)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}} = A$$

$$E \bullet A = \underset{(m,m)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}} \bullet \underset{(m,n)}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}} = A$$

Auch Vektoren können als Matrizen aufgefassst werden.

Der n-dimensionale Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_s \end{pmatrix}$ **ergibt die einspaltige (n,1)-Matrix** $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Mit Matrizen kann man Gleichungssysteme sehr einfach aufschreiben:

$b_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$
$b_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n$
$\dots$

$b_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\vec{b} = A \bullet \vec{x}$

Weitere Regeln:
Für die Multiplikation von transponierten Matrizen gilt: $(A \bullet B)' = B' \bullet A'$

Inverse Matrix A^{-1}

Es sei A eine n-zeilige quadratische Matrix vom Rang n. Ferner sei das Gleichungssystem $\vec{b} = A \bullet \vec{x}$ gegeben.

Dieses Gleichungssystem lösen, heisst, alle Werte für x_1, x_2, ... zu suchen, welche das Gleichungssystem erfüllen. Wenn man die Gleichung $A \bullet \vec{x} = \vec{b}$ linksseitig mit einer Matrix X multipliziert, welche so gewählt sein soll, dass $X \bullet A = E$ (Einheitsmatrix) ergibt, dann wäre das Problem gelöst. Man erhält dann:

$$(X \bullet A) \bullet \vec{x} = X \bullet \vec{b}$$

$$E \bullet \vec{x} = X \bullet \vec{b}$$

$$\vec{x} = X \bullet \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \bullet \vec{b}$$

Die Matrix X heisst Inverse Matrix zu A und wird auch mit A^{-1} bezeichnet.

Achtung: Bei der Multiplikation muss auf die Seite (hier: links) geachtet werden!

Für die zu A inverse Matrix A^{-1} gilt also: $A^{-1} \bullet A = A \bullet A^{-1} = E$

Um die Elemente der inversen Matrix zu bestimmen, kann man natürlich das Gleichungssystem nach einem bekannten Verfahren lösen (z.B. Additionsverfahren). Es gibt aber auch Möglichkeiten, die Matrix A formell zu bearbeiten, um A^{-1} zu erhalten. Das Invertieren von Matrizen ist und bleibt aber eine aufwendigen und langwierige Prozedur. Mit Computerprogrammen für Mathematik kann man heute sehr schnell auch grossse Matrizen invertieren. An einem einfachen Beispiel sei hier das manuelle Invertieren gezeigt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl|l|l} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & y_1 & \bullet 2 & \bullet 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = & y_2 & \bullet(-1) & \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & y_3 & & \bullet(-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|l} -5x_2 + 3x_3 & = & 2y_1 - y_2 & \bullet(-4) \\ -4x_2 + x_3 & = & 3y_1 - y_3 & \bullet 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -7x_3 &= 7y_1 + 4y_2 - 5y_3 \\ x_3 &= -y_1 - \tfrac{4}{7} y_2 + \tfrac{5}{7} y_3 \\ x_2 &= \tfrac{3}{5} x_3 - \tfrac{2}{5} y_1 + \tfrac{1}{5} y_2 = -y_1 - \tfrac{1}{7} y_2 + \tfrac{3}{7} y_3 \\ x_1 &= y_1 + 2x_2 - x_3 = -\tfrac{2}{7} y_2 + \tfrac{1}{7} y_3 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ -1 & -\frac{4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -7 & -1 & 3 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrixoperationen mit MatLab

MatLab starten, es erscheint das Command-Fenster mit dem »-Zeichen als Prompt. Hierauf kann eine Eingabe gemacht werden. Zeilen ohne das »-Zeichen sind Ausgabezeilen. Eine Matrix wird in [ ] -Klammern gesetzt. MatLab ist matrizenorientiert. Das Grundelement ist die komplexe (m,n)-Matrix. Deshalb ist das Rechnen mit Matrizen in MatLab auch sehr einfach.

Eingabe einer Matrix:

Elemente einer Zeile durch Blanks oder Komma trennen, Zeilen durch Strichpunkt trennen.
Eingabe einer (4,3)-Matrix A, einer (3,2)-Matrix B und einer (4,3)-Matrix C:

```
»A = [2,2,4;1,3,-1;2,-3,4;0,1,0]
A =
     2     2     4
     1     3    -1
     2    -3     4
     0     1     0
»B = [2,-1;3,4;-1,5]
B =
     2    -1
     3     4
    -1     5
»C = [2,3,7;-1,4,5;5,0,-2;5,2,1]
C =
     2     3     7
    -1     4     5
     5     0    -2
     5     2     1
```

Summe

```
»A + C
ans =
     4     5    11
     0     7     4
     7    -3     2
     5     3     1
```

Differenz

```
»A - C
ans =
     0    -1    -3
     2    -1    -6
    -3    -3     6
    -5    -1    -1
```

Transponierte Matrix A'

```
»A'
ans =
     2     1     2     0
     2     3    -3     1
     4    -1     4     0
```

Multiplikation mit einem Skalar

```
»5*A
ans =
    10    10    20
     5    15    -5
    10   -15    20
     0     5     0
```

Multiplikation von Matrizen

```
»D = A*B
D =
     6    26
    12     6
    -9     6
     3     4
```

```
»C*B
ans =
     6    45
     5    42
    12   -15
    15     8
```

Nullmatrix

```
»zeros(3)
ans =
     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

```
»zeros(5)
ans =
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0
```

Einheitsmatrix

```
»eye(3)
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

```
»eye(5)
ans =
     1     0     0     0     0
     0     1     0     0     0
     0     0     1     0     0
     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     1
```

Dreiecksmatrizen

```
»C
C =
     2     3     7
    -1     4     5
     5     0    -2
     5     2     1
```

Obere Dreiecksmatrix

```
»triu(C)
ans =
     2     3     7
     0     4     5
     0     0    -2
     0     0     0
```

Untere Dreiecksmatrix

```
»tril(C)
ans =
     2     0     0
    -1     4     0
     5     0    -2
     5     2     1
```

Vektoren

Spaltenvektor:

```
»a = [2;-5;6]
a =
     2
    -5
     6
```

Zeilenvektor:

```
»b = [2,-5,6]
b =
     2    -5     6
```

```
»a'
ans =
     2    -5     6
```

Rang einer Matrix

```
»A
A =
     2     2     4
     1     3    -1
     2    -3     4
     0     1     0
```

```
»rank(A)
ans =
     3
```

Anzeige einzelner Elemente

Um ein einzelnes Element der Matrix A anzuzeigen, gibt es den Befehl A(Zeile,Spalte).

»A(4,2) (a_{42})

```
ans =
     1
```

»A(3,3) (a_{33})

```
ans =
     4
```

Inverse Matrix A^{-1} (nur für quadratische Matrizen)

```
»A = [2,4,9;4,-3,2;-2,0,5]
A =
     2     4     9
     4    -3     2
    -2     0     5
```

```
»inv(A)
ans =
    0.0833    0.1111   -0.1944
    0.1333   -0.1556   -0.1778
    0.0333    0.0444    0.1222
```

Lösung eines Gleichungssystems

$A \bullet \vec{x} = \vec{b}$

```
»A = [2,3,-1;1,5,0;4,-2,0]
A =
     2     3    -1
     1     5     0
     4    -2     0
```

```
»b = [-3;-3;10]
b =
    -3
    -3
    10
```

```
»x = inv(A)*b
x =
     2
    -1
     4
```

oder:

```
»x = A\b
x =
     2
    -1
     4
```

Determinanten

Eine Determinante ist ein Zahlenschema mit einem bestimmten Wert. Schon bei den Matrizen wurden Zahlen in einem Schema notiert. Eine Determinante kann man von einer quadratischen Matrix bilden. Wir brauchen dann noch eine Regel, um ihren Wert ausrechnen zu können. Für zweizeilige und dreizeilige Determinanten wurden Berechnungsregeln angegeben (siehe S. 27). Hier nochmals die zweizeilige Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Nebendiagonale

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Hauptdiagonale

Im allgemeinen Fall haben wir eine n-zeilige Determinante. Sie soll auf jeden Fall quadratisch sein und hat somit auch n Spalten. Die Anzahl der Elemente in dieser Determinante ist n^2.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Der Wert dieser Determinante wird durch Entwickeln nach Unterdeterminanten berechnet.

Die Unterdeterminante A_{ij} des Elements a_{ij} (sie heisst auch Adjunkte von a_{ij}) ist eine mit $(-1)^{i+j}$ multiplizierte Determinante, die dadurch entsteht, dass in der ursprünglichen Determinante die i-te Zeile und die j-te Spalte gestrichen werden. A_{ij} ist eine (n-1)-zeilige Determinante.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \dots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}\,a_{32} - a_{31}a_{12})$$

Der Wert einer n-zeiligen Determinante ist die Summe der Produkte aus den Elementen einer beliebigen Reihe und der dazugehörigen Adjunkten:

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$ **(Entwicklungssatz von Laplace)**

Beispiel: Die Determinante D wird nach der 1. Spalte entwickelt:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

Vorzeichenschema:

3-zeilige Determinante: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ **allgemein:** $\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

Entstehen beim Entwickeln einer Determinante zunächst Unterdeterminanten mit mehr als 2 Zeilen, müssen diese wiederum nach Unterdeterminanten entwickelt werden. Dies ergibt aber oft eine Unzahl von zu berechnenden zweizeiligen Determinanten. Es gibt allerdings Regeln zum Umformen einer Determinante. Mit diesen Regeln kann die Arbeit vereinfacht werden.

Rechnen mit Determinanten

1. **Der Wert einer Determinante bleibt erhalten, wenn alle Zeilen mit allen Spalten unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge vertauscht werden. (det A = det A')**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. **Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn zwei beliebige Reihen vertauscht werden.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

3. **Eine Determinante wird mit einem Faktor k multipliziert, indem man alle Elemente einer beliebigen Reihe mit diesem Faktor multipliziert.**

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4. **Der Wert einer Determinante bleibt erhalten, wenn zu einer Reihe ein Vielfaches einer anderen Reihe addiert wird.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + ka_{21}a_{22} - a_{21}a_{12} - a_{21}ka_{22} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

5. **Der Wert einer Determinante ist Null, wenn zwei Reihen linear abhängig sind.**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = k(ab - ab) = 0$$

Beispiel für die Entwicklung einer Determinante nach Zeilen und Spalten

Zum Berechnen mehrzeiliger Determinanten wird oft die Regel 4 benützt. Durch geeignetes Addieren von Vielfachen können in einer Reihe alle Glieder bis auf eines zu Null reduziert werden. Dann ist das Entwickeln nach dieser Reihe kein Problem mehr. An einem Beispiel soll diese Methode gezeigt werden:

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & -4 & 8 & -5 \\ -24 & -2 & 3 & 4 & 20 \\ -5 & -3 & 19 & -60 & -2 \\ -16 & -1 & -2 & 35 & 26 \\ 23 & 2 & -12 & -4 & -17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -4 & 8 & -5 \\ -10 & 0 & -5 & 20 & 10 \\ 16 & 0 & 7 & -36 & -17 \\ -9 & 0 & -6 & 43 & 21 \\ 9 & 0 & -4 & -20 & -7 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \\ +2\cdot\text{Zeile 1} \\ +3\cdot\text{Zeile 1} \\ +\text{Zeile 1} \\ -2\cdot\text{Zeile 1} \end{array}$$

$$= (-1)\bullet\begin{vmatrix} -10 & -5 & 20 & 10 \\ 16 & 7 & -36 & -17 \\ -9 & -6 & 43 & 21 \\ 9 & -4 & -20 & -7 \end{vmatrix} = (-1)\bullet\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -2\bullet Sp.2 & & +4\bullet Sp.2 & +2\bullet Sp.2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -8 & -3 \\ 3 & -6 & 19 & 9 \\ 17 & -4 & -36 & -15 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= (-1)\bullet(+5)\bullet\begin{vmatrix} 2 & -8 & -3 \\ 3 & 19 & 9 \\ 17 & -36 & -15 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ +3\bullet \text{Zeile 1} \\ -5\bullet \text{Zeile 1} \end{array}$$

$$= (-5)\bullet\begin{vmatrix} 2 & -8 & -3 \\ 9 & -5 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-5)\bullet(-3)\bullet\begin{vmatrix} 9 & -5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 15\bullet(36 + 35) = 1065$$

Berechnung von Determinanten mit MatLab

```
»A=[7,1,-4,8,-5;-24,-2,3,4,20;-5,-3,19,-60,-2;-16,-1,-
2,35,26;23,2,-12,-4,-17]
A =
     7     1    -4     8    -5
   -24    -2     3     4    20
    -5    -3    19   -60    -2
   -16    -1    -2    35    26
    23     2   -12    -4   -17

»det(A)
ans =
        1065
```

Eine Entwicklung nach Spalten kann mit den Funktionen rrefmovi(A) oder rrefdemo(A) demonstriert werden. rrefmovi(A) zeigt den Eliminationsvorgang schrittweise auf dem Bildschirm, rrefdemo(A) hat dieselbe Wirkung, zusätzlich wird der Wert der Determinante D = det(A) angezeigt.

Matrizen mit Maple V

Beispiel:

```
> with(linalg);
> matrix(2,2,[5,4,6,3]);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Für weitere Beispiele wird auf die Maple-Hilfe verwiesen.

Lineare Gleichungssysteme

Ein Gleichungssystem, in dem die Variablen x_i nur in der ersten Potenz vorkommen, heisst *lineares Gleichungssystem*. Es hat die Form:

(1) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$
(2) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$
$\ldots$
(m) $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$

Es sind also m lineare Gleichungen in n Variablen.In der Matrizenschreibweise kann man dieses Gleichungssystem folgendermassen schreiben:

$A \bullet \vec{x} = \vec{b}$

wobei A eine (m,n)-Matrix, $\vec{x}$ und $\vec{b}$ Vektoren sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m} \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Homogene Gleichungssysteme

Das Gleichungssystem ist homogen, wenn alle $b_i = 0$ sind, also $\vec{b} = \vec{o}$ ist: $A \bullet \vec{x} = \vec{o}$

Ein solches Gleichungssystem hat immer die trivialen Lösungen $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Ob weitere Lösungen vorhanden sind, hängt vom Rang r, d.h. der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen- und Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix ab. Ist r = n, gibt es nur die trivialen Lösungen. Für r < n hat das Gleichungssystem nichttriviale Lösungen, also Lösungen, welche von 0 verschieden sind. Es gibt eine (n - r)-parametrige Lösungsschar.

Ist die Anzahl Gleichungen gleich der Anzahl Variablen (m = n), hat das homogene Gleichungssystem genau dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinate der Koeffizientenmatrix 0 ist. In diesem Fall ist der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als n.

Inhomogene Gleichungssysteme

Beim inhomogenen Gleichungssystem betrachten wir neben der Koeffizientenmatrix A noch die erweiterte Koeffizientenmatrix A^*.

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Haben A und A^* denselben Rang r, ist das Gleichungssystem $A \bullet \vec{x} = \vec{b}$ lösbar. Falls der Rang der beiden Matrizen zudem noch gleich der Anzahl Variablen n ist (r = n), gibt es genau einen Lösungsvektor $\vec{x}$ des Gleichungssystems.

Für r < n erhält man eine ganze Lösungsschar. Es gilt in diesem Fall: Die Gesamtheit der Lösungen ist die Summe aus einer speziellen Lösung $\vec{x}^*$ des inhomogenen Gleichungssystems und einer Linearkombination der (n-r) Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems:

$\vec{x} = \vec{x}^* + k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \ldots + k_{n-r}\vec{x}_{n-r}$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

Gegeben ist eine (n,n)-Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wir bilden $A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_n - \lambda \end{pmatrix}$

Diese Matrix heisst charakteristische Matrix, ihre Determinante ist die charakteristische Determinante:

$$\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_n - \lambda \end{vmatrix}$$

Charakteristische Gleichung: $\det(A - \lambda E) = 0$

Wird die Determinante ausgerechnet, erhält man ein Polynom n-ten Grades in der Variablen λ. Die Lösungen (Wurzeln) der Polynomgleichung heissen charakteristische Wurzeln, es sind die Eigenwerte der Matrix A: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Eigenvektoren

Das Gleichungssystem $(A - \lambda E)\bullet\vec{x} = 0$ hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn λ ein Eigenwert der Matrix A ist. Zu jedem Eigenwert $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gehört deshalb eine Lösung des Gleichungssystems.

λ_i $\quad (A - \lambda_i E)\bullet\vec{x} = \vec{o}$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems seien: $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$. In Vektorform geschrieben:

$\vec{x}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \dots \\ x_{in} \end{pmatrix}$ **Der Vektor $\vec{x}_i$ ist der zum Eigenwert λ_i gehörige Eigenvektor.**

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ **Charakteristische Gleichung:** $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45 = 0$

Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 5$

Eigenvektoren für $\lambda_3 = 5$:
Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rll} -7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 & & | \bullet(-1) \\ 2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0 & | \bullet 1 & \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 & | \bullet 2 & | \bullet 7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -8x_2 - 16x_3 &= 0 \\ -16x_2 - 32x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = k$
$x_2 = 2k$ **Zum Eigenwert $\lambda_3 = 5$ gehört der Eigenvektor** $\begin{pmatrix} k \\ 2k \\ -k \end{pmatrix}$
$x_3 = -k$

Zahlenfolgen

Gegeben sei die Menge der natürlichen Zahlen N. Auf dieser Menge wird eine Funktion f definiert, welche jeder natürlichen Zahl n ein Element $f(n) = a_n$ zuordnet. Sind die Bilder der Abbildung Zahlen, so erhalten wir eine Zahlenfolge, sind die Bilder Punkte, so haben wir eine Punktfolge. Die zugeordneten Elemente müssen nicht unbedingt voneinander verschieden sein.

$f: N \rightarrow R$
$f: n \rightarrow f(n) = a_n$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$ Kurzform $\langle a_n \rangle$

Die so entstandene Folge ist eine unendliche Folge. Wird nur den ersten n Elementen der Menge N je ein a_i zugeordnet, so erhält man eine endliche Folge. In der Mathematik sind allerdings die unendlichen Folgen von grösserem Interesse. Im folgenden werden wir uns ausschliesslich mit Zahlenfolgen beschäftigen. Ferner soll unter Zahlenfolge immer eine unendliche Zahlenfolge verstanden werden.

Beispiele:

(1) $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ $\langle a_n = 1 \rangle$

(2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\langle a_n = \frac{1}{n} \rangle$

(3) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{5}, \ldots$

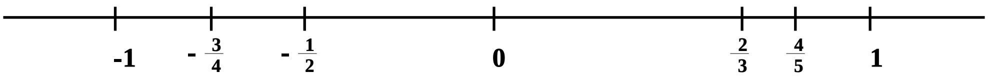
(4) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ $\langle a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} \rangle$

(5) $1, \frac{1}{1}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \ldots$

(6) $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, 1, \ldots$

Ein anschauliches Bild von einer Zahlenfolge gewinnt man, wenn man die Glieder der Zahlenfolge auf der Zahlengerade einzeichnet.

(4) $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ $\langle a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1} \rangle$



Intervall, Umgebung

offenes Intervall $(a, b) =]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$
abgeschlossenes Intervall $[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$
Daneben gibt es noch halboffene Intervalle:
$(a, b] =]a, b] = \{x \mid a < x \le b\}$
$[a, b) = [a, b[= \{x \mid a \le x < b\}$

Eine Umgebung von x_0 $U(x_0)$ ist ein offenes Intervall, in dem x_0 liegt.
ε-Umgebung von x_0: $U_\varepsilon(x_0) = \{x \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}$

Wachsen und Abnehmen

Eine Zahlenfolge $<a_n>$ ist monoton wachsend, wenn für alle n N gilt: $a_{n+1} \geq a_n$

Eine Zahlenfolge $<a_n>$ ist streng monoton wachsend, wenn für alle n N gilt: $a_{n+1} > a_n$

Eine Zahlenfolge $<a_n>$ ist monoton abnehmend, wenn für alle n N gilt: $a_{n+1} \leq a_n$

Eine Zahlenfolge $<a_n>$ ist streng monoton abnehmend, wenn für alle n N gilt: $a_{n+1} < a_n$

Beispiel: $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ $\quad <\frac{n-1}{n}>$

Die gegebene Folge ist, wie leicht zu vermuten ist, streng monoton wachsend. Wir prüfen diese Vermutung für alle n N.

$a_n = \frac{n-1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &> a_n \\
\frac{n}{n+1} &> \frac{n-1}{n} \\
n^2 &> (n-1)(n+1) \\
n^2 &> n^2 - 1 \\
0 &> -1 \quad \text{wahre Aussage für n N}
\end{aligned}
$$

Beschränkte Zahlenfolgen

Eine Zahlenfolge $<a_n>$ ist nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl K R gibt, sodass für alle n N gilt: $a_n \leq K$. K heisst obere Schranke der Zahlenfolge.

Eine Zahlenfolge $<a_n>$ ist nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl k R gibt, sodass für alle n N gilt: $a_n \geq k$. k heisst untere Schranke der Zahlenfolge.

Eine nach oben und unten beschränkte Zahlenfolge nennt man 'beschränkt'.

Beispiel: $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ $\quad <\frac{n-1}{n}>$

Vermutung: obere Schranke K = 2

Überprüfung:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{n-1}{n} \leq 2 \\
n - 1 &\leq 2n \\
-n &\leq 1 \\
n &\geq -1 \quad \text{wahre Aussage für n N}
\end{aligned}
$$

Rekursive Definition von Zahlenfolgen

In den Beispielen am Anfang wurden Zahlenfolgen gliedweise angegeben. Aus den Gliedern konnte leicht auf eine Form für ein allgemeines Glied a_n geschlossen werden. Zahlenfolgen können auch nur durch das allgemeine Glied a_n angegeben werden.

Eine andere Art Zahlenfolgen anzugeben ist die rekursive Definition. Es wird z.B. das erste Gleid a_1 angegeben. Mit einer Rekursionsformel $a_{n+1} = f(a_n)$ kann aus dem 1. Glied das 2., aus dem 2. das 3. usw. berechnet werden. Mit dieser Methode ist die Zahlenfolge auch eindeutig definiert.

Beispiel:

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1$

Die ersten Glieder können leicht berechnet werden: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots$

Bei einer rekursiv definierten Zahlenfolge muss man die Glieder der Reihe nach vom Anfang der Folge weg berechnen. Es ist eine mühsame Arbeit, wenn man z.B. das 100. Glied haben möchte. Aber ebenso schwierig ist es, Untersuchungen über das Wachsen und Abnehmen oder über die Schranken der Zahlenfolge durchzuführen. Vielfach kann man eine Vermutung für das allgemeine Glied a_n aufstellen. Zum Nachweis dieser Vermutung wird im allgemeinen ein vollständiger Induktionsbeweis (siehe nächstes Kapitel) geführt.

Bei der oben angegeben Folge könnte man folgende Vermutung für a_n haben: $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

Vollständige Induktion

Unter den Axiomen von Peano wurde unter Punkt 5 das "Prinzip der vollständigen Induktion" aufgeschrieben. Jede Menge von natürlichen Zahlen, welche die Zahl 1 enthält und welche zu jeder Zahl a, die sie enthält, auch deren Nachfolger a^+ enthält, enthält alle natürlichen Zahlen.

Dieses Axiom zeigt auch schon die Vorgangsweise bei der Beweismethode der 'vollständigen Induktion' auf. Der Beweis muss allerdings nicht unbedingt bei der Zahl n = 1 gestartet werden, sondern kann auch mit einer grösseren natürlichen Zahl n_0 beginnen, sofern die Gültigkeit der Aussage erst ab n_0 bewiesen werden soll. Es ergeben sich damit folgende drei Schritte:

1. ***Induktionsanfang:* Die Gültigkeit der Aussage wird für eine kleinste natürliche Zahl n_0 nachgewiesen (häufig ist $n_0 = 1$).**
2. ***Induktionsannahme:* Es wird angenommen, dass die Aussage für eine beliebige natürliche Zahl n gültig sei.**
3. ***Induktionsbeweis:* Man beweist, dass aus der Annahme, welche sagt, dass die Aussage für eine Zahl n gültig sei, die Gültigkeit der Aussage auch für die Zahl n + 1 folgt (Schluss von n nach n + 1).**

Wenn aber die Aussage für das n_0 gültig ist, folgt nach Schritt 3 die Gültigkeit auch für $n_0 + 1$, und bei nochmaliger Anwendung der Regeln die Gültigkeit der Aussage für $(n_0 + 1) + 1 = n_0 + 2$, usw., das heisst, die Aussage ist schliesslich für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gültig.

Beispiel 1:

Eine Zahlenfolge ist rekursiv gegeben: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1$

Die ersten Glieder werden berechnet: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots$

Für das allgemeine Glied a_n besteht die Vermutung: $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

Diese Vermutung soll nun für alle n N bewiesen werden.

1. Induktionsanfang: n = 1

Laut Angabe gilt: $a_1 = 1$

Wird n = 1 in der Formel eingesetzt, erhält man: $a_1 = \frac{2^1 - 1}{2^{1-1}} = \frac{1}{1} = 1$

Für n = 1 ist die Vermutung richtig.

2. Induktionsannahme:

Für eine natürliche Zahl n sei die Aussage $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$ gültig.

3. Induktionsbeweis: $(n \rightarrow n+1)$

Gemäss Rekursionsformel gilt: $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1$

Gemäss Induktionsannahme gilt: $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$

Die erste Gleichung wird jetzt zu:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1 = \frac{1}{2} \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} + 1 = \frac{2^n - 1}{2^n} + 1 = \frac{2^n - 1 + 2^n}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$$

Dies aber ist genau jenes Ergebnis, welches man in der vermuteten Formel für (n + 1) erhält.

Beispiel 2:

Für eine n-gliedrige Summe wird eine Summeformel vermutet:

$s_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ für alle n N

1. Induktionsanfang: n = 1

links: 1

rechts: $1^2 = 1$, somit ist die Formel für n = 1 richtig.

2. Induktionsannahme:

Für ein bestimmtes n gelte die Summenformel $s_n = n^2$

3. Induktionsbeweis: $(n \rightarrow n+1)$

Jetzt wir die (n+1)-gliedrige Summe $s_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1)$ angesetzt. Es ist $s_{n+1} = s_n + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. Dieses Ergebnis wird aber genau für die (n+1)-gliedrige Summe s_{n+1} erwartet.

Beispiel 3:

Für alle natürlichen $n \geq 5$ gelte die Ungleichung $2^n > n^2$.

1. Induktionsanfang: $n = 5$

Zwar wäre die Ungleichung auch für $n = 1$ erfüllt. Jedoch für $n = 2, 3, 4$ gibt es keine wahre Aussage. Erst wieder für $n = 5$ wird die Ungleichung erfüllt, sodass wir den Beweis dort aufbauen können.

$2^5 = 32 > 5^2 = 25$

2. Induktionsannahme:

Für eine natürliche Zahl n sei $2^n > n^2$.

3. Induktionsbeweis: ($n \rightarrow n+1$)

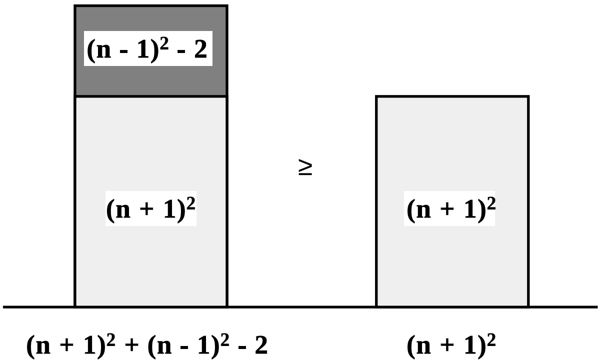
$2^{n+1} = 2^n \bullet 2$

Aus der Annahme folgt: $2^n > n^2 \quad | \bullet 2$

$2^n \bullet 2 > 2n^2$

Also: $2^{n+1} = 2^n \bullet 2 > 2n^2 = n^2 + n^2 = (n^2 + 2n + 1) + (n^2 - 2n + 1 - 2) = (n + 1)^2 + (n - 1)^2 - 2$

Der erste Teil ist genau jener, der als Lösung zu erwarten ist. Wenn der Rest positiv ist, könnte er weggelassen werden, wobei der Gesamtwert kleiner würde. Der Rest $(n - 1)^2 - 2$ ist für $n \geq 3$ tatsächlich immer positiv. Somit gilt: $(n + 1)^2 + (n - 1)^2 - 2 > (n + 1)^2$



Die letzte Ungleichung wäre zwar für $n \geq 3$ gültig. Jedoch ist in Punkt 1. Induktionsanfang die Aussage erst für $n = 5$ erfüllt, sodass die Induktion erst von $n = 5$ an aufgebaut werden kann.

Beispiel 4:

Bernoullische Ungleichung: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ **für $x > -1$ und n N**

1. Induktionsanfang: $n = 1$

links: $(1 + x)^1 = 1 + x$

rechts: $1 + 1x = 1 + x$

2. Induktionsannahme:

Für eine natürliche Zahl n sei die Ungleichung $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ mit $x > -1$ gültig.

3. Induktionsbeweis: ($n \rightarrow n+1$)

$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x)$

Für $x > -1$ ist $(1 + x) > 0$. Somit folgt aus der Annahme: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

$(1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x)$

$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 >$
$> 1 + (n + 1)x$, **weil $nx^2 > 0$ für n N x > -1.**

Grenzwert

Beispiele:

(1) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$

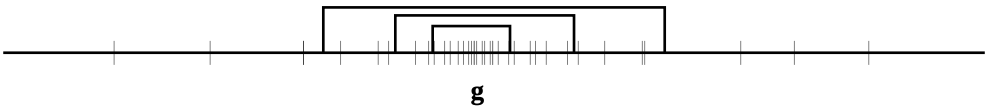
(2) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$

(3) $0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n}, \dots$

(4) $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots, 2n-1, \dots$

Wenn wir die vier Beispiele betrachten, fällt auf, dass in (1) und (2) die Glieder der Zahlenfolge einem bestimmten Wert zustreben, wenn die Glieder der Zahlenfolge weiter verfolgt werden.. In (1) ist dieser Wert 0, in (2) ist es 1. In (3) werden sich die Zahlen an den Stellen -1 und 1 anhäufen, ohne dass man ein Hinstreben zu einem einzigen Wert beobachten könnte. In (4) werden die Zahlen immer grösser. Auch hier kann man nicht sagen, dass die Zahlen einem bestimmten Wert zustreben, vielmehr gehen die Glieder dieser Zahlenfolge ins Unendliche.

Wir brauchen für einen Grenzwert, eben einem Wert, zu dem die Glieder einer Zahlenfolge streben, aber mehr als nur so ein Gefühl von diesem Streben. Wir müssen greifbare Bedingungen formulieren, damit wir von einer Zahl sagen können, dass sie Grenzwert einer Zahlenfolge sei. Wir versuchen es mit einer Umgebung um den vermuteten Grenzwert und fragen, ob alle oder wenigstens fast alle Glieder der Zahlenfolge in so einer Umgebung liegen. Dabei soll "fast alle" alle Glieder bis auf höchstens endlich viele bedeuten.



Wann aber soll die Zahlenfolge einen Grenzwert g haben? Wir definieren folgendermassen:

Eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ hat einen Grenzwert g, wenn in jeder beliebigen Umgebung von g fast alle Glieder der Folge liegen.
In diesem Fall nennt man die Zahlenfolge konvergent.

Für konvergente Zahlenfolgen schreibt man den Grenzwert folgendermassen auf:

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$ **(Lies: "Limes von a_n mit n nach Unendlich")**

Zahlenfolgen, welche keinen Grenzwert haben, heissen divergent.

Die oben aufgeschriebene Definition kommt der Anschauung sehr entgegen, hat aber den Nachteil, dass man mit ihr nicht gut rechnen kann. Deshalb wollen wir einen Satz über Grenzwerte aus dieser Definition entwickeln, der diese Bedürfnisse besser befriedigt.

Gegeben sei eine konvergente Zahlenfolge $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ mit dem Grenzwert g. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g$

Wir definieren jetzt eine ε-Umgebung um g: $U_\varepsilon(g) = (g - \varepsilon, g + \varepsilon) = \{x \mid g - \varepsilon < x < g + \varepsilon\}$

Wenn a_n in $U_\varepsilon(g)$ liegt, gilt $|a_n - g| < \varepsilon$

Nach der obigen Definition müssen fast alle Glieder der Zahlenfolge in dieser Umgebung $U_\varepsilon(g)$ liegen, d.h. ausserhalb dürfen nur endlich viele Glieder sein. Wir können daher die Glieder der Zahlenfolge vom Anfang weg verfolgen und werden irgendwann zum letzten Glied gelangen, welches nicht in $U_\varepsilon(g)$ liegt. Ab dem nächsten Glied liegen alle folgenden Glieder der Zahlenfolge in $U_\varepsilon(g)$. Bezeichnen wir die Nummer des letzten, ausserhalb von $U_\varepsilon(g)$ liegenden Gliedes mit N, so liegen alle Glieder mit n > N in der Umgebung. Natürlich ist die Grösse von N von der Wahl von ε abhängig. Je kleiner ε ist, umso grösser wird N werden. Jedoch findet man zu jedem noch so kleinen ε eine natürliche Zahl N mit der gewünschten Eigenschaft. Wir können daher folgenden Satz für den Grenzwert einer Zahlenfolge formulieren:

Eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ist konvergent, wenn es eine Zahl g mit folgender Eigenschaft gibt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N (Index), sodass $|a_n - g| < \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt.

Beispiel:

Zeigen Sie, dass die Zahlenfolge $\left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle$ den Grenzwert g = 1 hat.

Wir wählen ein $\varepsilon > 0$. Dazu gibt es ein z.B. ein $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Es sei $n = N + 1 = \frac{1}{\varepsilon} + 1 = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$.

Jetzt ist $|a_n - g| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n-1-n}{n} \right| = \left| \frac{-1}{n} \right| = \frac{1}{n} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < \varepsilon$.

Die Gültigkeit des letzten Schrittes zeigt eine kleine Nebenrechnung:

Aus $\varepsilon > 0$ folgt:

$$\begin{array}{rll} \varepsilon & > 0 & \mid +1 \\ \varepsilon + 1 & > 1 & \mid \text{Kehrwert} \\ \frac{1}{\varepsilon+1} & < 1 & \mid \cdot\, \varepsilon \\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} & < \varepsilon & \end{array}$$

Häufungspunkte

Beispiele:

(1) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$

(2) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$

(3) $0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n}, \dots$

(4) $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots, 2n - 1, \dots$

Bei den Zahlenfolgen (1), (2), und (3) finden wir Zahlen, um die sich die Glieder der Folge anhäufen. Bei (1) ist es die Zahl 0, bei (2) ist es die 1 und bei (3) sind es die Zahlen -1 und 1. Die ersten beiden Folgen sind wie schon vorher beobachtet konvergent. Die Zahlenfolge (3) ist divergent. bei der Folge (4) finden wir keinen solchen Häufungspunkt, die Glieder steigen gleichmässig ins Unendliche an.

Wir definieren:

Eine Zahl h heisst Häufungspunkt einer Zahlenmenge, wenn in jeder beliebigen Umgebung von h unendlich viele Zahlen der Menge liegen.

Folgerung: Jeder Grenzwert ist Häufungspunkt. (Die Umkehrung gilt natürlich nicht!)

Häufungsstellenprinzip von Bolzano-Weierstrass

Wenn in einem endlichen Intervall unendlich viele Zahlen einer Menge liegen, so hat diese Zahlenmenge mindestens einen Häufungspunkt.

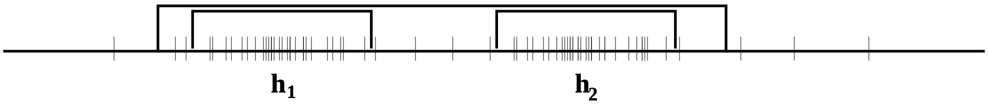
Begründung:

Wir unterteilen das Intervall durch den Mittelpunkt in zwei Hälften. In mindestens einer dieser Teilintervalle müssen unendlich viele Zahlen der gegebenen Zahlenmenge liegen. Nun nehmen wir ein Teilintervall mit unendlich vielen Zahlen und halbieren dieses Intervall. Auch jetzt liegen in mindestens einem dieser beiden Teilintervalle wiederum unendlich viele Zahlen. Dieses Verfahren wird ad infinitum fortgesetzt. Wir erhalten somit eine Folge von ineinandergeschachtelten Intervallen, deren Länge nach 0 konvergiert. Die Intervallschachtelung läuft auf einen Punkt zu, den nachzuweisenden Häufungspunkt. (Auf einen vollständigen Beweis wird hier verzichtet.)

Sätze über Zahlenfolgen

Eine Zahlenfolge mit mehr als einem Häufungspunkt ist divergent.

Begründung: Hätte die Zahlenfolge einen Grenzwert g, so müssten in jeder Umgebung von g fast alle Zahlen der Folge liegen. Nun kann man um jeden Häufungspunkt Umgebungen so wählen, dass nur jeweils der eine Häufungspunkt innerhalb einer solchen Umgebung liegt. Die anderen Häufungspunkte sollen jeweils ausserhalb dieser Umgebung liegen. Somit gibt es aber keinen Punkt für den in jeder Umgebung fast alle Zahlen liegen können.

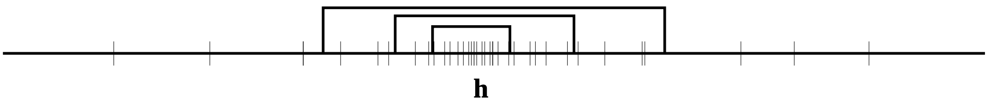


Eine konvergente Zahlenfolge hat genau einen Häufungspunkt.

Begründung: Hätte sie mehr als einen Häufungspunkt, könnte man jeweils um jeden Häufungspunkt eine Umgebung finden, in der kein weiterer Häufungspunkt liegt. Somit gäbe es aber bei jedem Häufungspunkt Umgebungen, ausserhalb derer unendlich viele Glieder der Zahlenfolge liegen. Damit wäre aber keiner von den Häufungspunkten Grenzwert und die Folge wäre divergent.

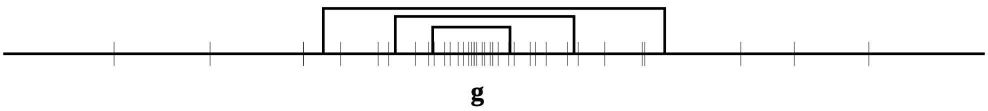
Eine beschränkte Zahlenfolge mit nur einem Häufungspunkt ist konvergent.

Begründung: Wenn nur ein Häufungspunkt h vorhanden ist, können wir eine beliebige Umgebung U(h) betrachten. Innerhalb dieser Umgebung liegen unendlich viele Zahlen der Folge. Lägen ausserhalb von U(h) auch unendlich viele Glieder, müsste nach dem Häufungsstellenprinzip von Bolzano-Weierstrass mindestens ein weiterer Häufungspunkt existieren. Dies widerspricht aber den Angaben. Somit liegen ausserhalb von U(h) jeweils nur endlich viele Glieder der Folge und h ist Grenzwert.



Eine konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.

Begründung: Wir betrachten eine beliebige Umgebung um den Grenzwert g U(g). Gemäss Grenzwertdefinition liegen ausserhalb von U(g) endlich viele Glieder der Folge. Unter diesen endlich vielen Zahlen gibt es eine kleinste und eine grösste Zahl. Diese beiden Zahlen können bereits als untere bzw. obere Schranke dienen.



Eine monoton wachsende Zahlenfolge, die nach oben beschränkt ist, ist konvergent.

Begründung: Eine monoton wachsende Zahlenfolge ist sicher nach unten beschränkt. Nach dem Häufungsstellenprinzip von Bolzano-Weierstrass gibt es mindestens einen Häufungspunkt im Intervall zwischen unterer und oberer Schranke. Gleichzeitig gilt für jedes Glied der Zahlenfolge: $a_n \le h$, wobei h ein Häufungspunkt sein soll. Dieser Häufungspunkt muss aber der einzige sein, weil oberhalb von h keine Glieder der Zahlenfolge anzutreffen sind. Somit ist die Zahlenfolge konvergent.

Konvergenzkriterium von Cauchy

Gegeben sei eine konvergente Zahlenfolge $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ mit dem Grenzwert g. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$

In den bisherigen Sätzen zum Grenzwert einer Zahlenfolge kommt der Grenzwert g vor. Jedoch ist es oft schwierig, eine Zahl g zu finden, welche Grenzwert sein soll. Wenn nur die Konvergenz der Folge von Interesse ist, sollte man diese Konvergenz auch ohne Kenntnis des Grenzwertes g nachweisen können. Dies ermöglicht das Konvergenzkriterium von Cauchy:

Eine Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N (Index) gibt, sodass $\lvert a_m - a_n \rvert < \varepsilon$ für alle $m > N$ und für alle $n > N$ gilt.

(ohne Beweis).

Rechnen mit konvergenten Zahlenfolgen

Gegeben seien zwei konvergente Zahlenfolgen $< a_n >$ und $< b_n >$. Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
Dann gelten folgende Regeln (ohne Beweis):

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \bullet b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \bullet \lim_{n\to\infty} b_n = a \bullet b$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \qquad \text{für } b_n \neq 0 \ (n \quad N) \text{ und } b \neq 0$$

Unbestimmte Formen

Beim Rechnen mit Grenzwerten stösst man immer wieder auf sogenannte unbestimmte Formen. Zwar dürfte eine solche Form gar nicht vorkommen, weil mit Ausdrücken wie ∞ gar nicht gerechnet werden dürfte. Jedoch ist es praktisch, mit ∞ formal genau so umzugehen wie beim Rechnen mit Zahlen. Dann aber sind unbestimmte Formen nicht vermeidbar.

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n}{2n^2 - 1} = \text{"}\ \dfrac{\infty - \infty}{2\bullet\infty - 1}\ \text{"}$

Folgende Ausdrüche sind unbestimmte Formen:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, 0\bullet\infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, \infty^0$$

Um dennoch den Grenzwert berechnen zu können, muss der Ausdruck für das allgemeine Glied vor dem Grenzübergang ($n \to \infty$) passend umgeformt werden. So kann man z.B. Brüche geeignet kürzen. Später wird die Regel von l'Hospital eine Hilfe für solche Situationen anbieten.

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n}{2n^2 - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \dfrac{1 - \frac{1}{\infty}}{2 - \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2}$

Arithmetische Folgen und Reihen

Eine Zahlenfolge ist eine arithmetische Folge 1. Ordnung, wenn die Differenz d zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist ($d \neq 0$).

Daraus folgt, dass jedes Glied gleich dem arithmetischen Mittel der Nachbarglieder ist:
$an = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_{n+1} - a_n = d$

Es gilt:
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Die Summe der Glieder einer Zahlenfolge heisst Reihe. Die Summe der Glieder einer arithmetischen Folge ist die arithmetische Reihe. Wir wollen die n-te Zwischensumme s_n berechnen:
$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$s_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Es gilt: $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$
$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_n - 2d = a_1 + a_n$
usw.

$$2s_n = n(a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Mit $a_n = a_1 + (n - 1)d$ **wird die Summenformel zu:** $s_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$

Geometrische Folgen und Reihen

Ist der Quotient q zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant, so heisst die Zahlenfolge geometrisch ($q \neq 1$, $q \neq 0$).

Daraus folgt, dass jedes Glied gleich dem geometrischen Mittel der Nachbarglieder ist: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Es gilt:
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Bilden wir die Summe der Glieder der geometrischen Folge, erhalten wir die geometrische Reihe. Für die n-te Zwischensumme s_n gilt:

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$$
$$q \cdot s_n = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$s_n(1 - q) = a_1 - a_1q^n$$

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Unendlich geometrische Reihe

Besteht bei der arithmetischen Reihe keine Aussicht, für die Summe von unendlich vielen Gliedern einen endlichen Wert zu erhalten, ist dies bei der geometrischen Reihe durchaus möglich. Es kommt darauf an, dass die Folge der Zwischensummen konvergent ist. Um dies zu prüfen, müssen wir speziell den Grenzwert von q^n mit n nach ∞ untersuchen. Für welchen Wert von q erhalten wir einen Grenzwert?

Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ **für** $|q| < 1$

Beweis: Wir setzen $\frac{1}{|q|} = 1 + h$; **aus** $|q| < 1$ **folgt** $\frac{1}{|q|} > 1$. **Also ist** $h > 0$.

Nach der Bernoullischen Ungleichung erhalten wir:

$$\frac{1}{|q|^n} = (1 + h)^n \geq 1 + nh$$

$$|q|^n \leq \frac{1}{1 + nh} < \frac{1}{nh}$$

$\frac{1}{nh} < \varepsilon$ **gilt dann, wenn** $n > \frac{1}{\varepsilon h}$ **ist. Daher wählen wir** $N \geq \frac{1}{\varepsilon h}$

Konvergenzbeweis:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ **wählen wir die Zahl** $N \geq \frac{1}{\varepsilon h}$ **mit** $h = \frac{1}{|q|} - 1$.
Daraus folgt: $|q^n| = \frac{1}{(1 + h)^n} \leq \frac{1}{1 + nh} < \frac{1}{Nh} \leq \varepsilon$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ **für** $0 < |q| < 1$. **Auch für** $q = 0$ **ist** $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Für die Summe der unendlichen geometrischen Reihe ergibt sich also:
$s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}$ **für** $|q| < 1$.

Eine Reihe heisst konvergent, wenn die zugehörige Folge der Zwischensummen (Partialsummen) konvergiert. Die Summe ist dann $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Sätze über konvergente Reihen

Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergiert genau dann, wenn es zu jedem** $\varepsilon > 0$ **eine Zahl N gibt, sodass für alle** $n > N$ **gilt:** $\left| \sum\limits_{k=N+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$

Das bedeutet also, dass der Rest der Reihe keinen Einfluss mehr auf eine vorgegebene Rechengenauigkeit hat.

Quotientenkriterium: Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **habe nur positive Summanden. Sie ist konvergent, wenn es eine von k unabhängige Zahl q mit** $0 < q < 1$ **derart gibt, dass für fast alle k die Ungleichung** $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$ **gilt.**
Wird jedoch für fast alle k der Quotient $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, **so divergiert die Reihe.**

Die Glieder werden also mindestens so schnell klein wie die Glieder der konvergenten geometrischen Reihe.

Wurzelkriterium: Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **mit nur positiven Summanden ist konvergent, wenn es eine von k unabhängige Zahl q mit** $0 < q < 1$ **gibt, sodass für fast alle k** $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$ **ist.**
Die Reihe divergiert, wenn für fast alle k $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ **ist.**

Einige spezielle Beispiele von Folgen und Reihen

Fibonacci-Folge

$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Jedes folgende Glied ist die Summe der beiden vorhergehenden Glieder.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Harmonische Reihe

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Die harmonische Reihe ist divergent.
Beweis:

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$s_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$s_{2^3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$

...

$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

$$n \to \infty \qquad \downarrow \qquad \infty$$

Die Folge der Partialsummen ist divergent. Für die Konvergenz einer Reihe genügt es nicht, wenn die einzelnen Glieder nach 0 gehen.

Reihen mit variablen Gliedern

Es gibt auch Reihen, deren Glieder Funktionen einer Variablen sind.

Beispiel: $g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$

Speziell zu erwähnen sind hier die Potenzreihen. Es handelt sich bei den Funktionen $g_k(x)$ um Potenzfunktionen:

Beispiel: $c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots + c_nx^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$

$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$

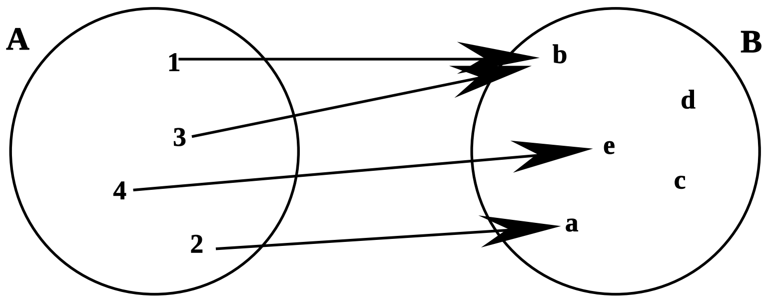
Die Konvergenz einer Reihe mit variablen Gliedern hängt vom Wert der Variablen x ab.

Abbildung und Funktion

Eine Abbildung (oder Funktion) einer Menge A in eine Menge B ist eine Vorschrift, die jedem Element a A genau ein Element b B zuordnet.

f: A $\rightarrow$ B
f: a $\rightarrow$ f(a) = b, a A, b B

A heisst Definitionsbereich der Funktion, B ist der Cobereich. Der Wertebereich der Funktion f ist die Menge der Funktionswerte (Bildelemente), er ist eine Teilmenge von B.

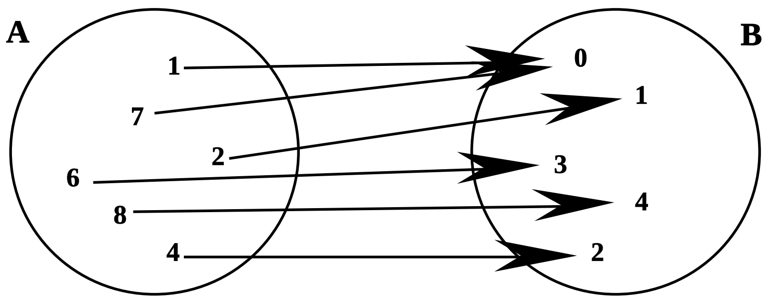


surjektiv:

Eine Abbildung f: A $\rightarrow$ B heisst surjektiv, wenn f(A) = B, d.h., wenn es zu jedem y B (mindestens) ein x A gibt, sodass f(x) = y ist.

A = {1, 2, 4, 6, 7, 8}, B = {0, 1, 2, 3, 4}

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{für x ist gerade} \\ 0 & \text{für x ist ungerade} \end{cases}$$

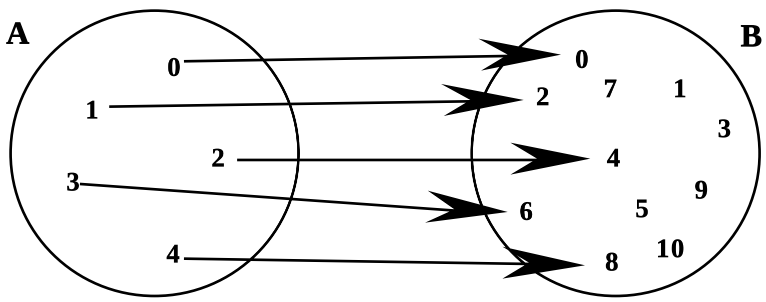


Wir stellen fest, dass jedes Element von B Bild von mindestens einem Element von A ist.

injektiv:

Eine Abbildung f: A $\rightarrow$ B heisst injektiv, wenn für alle x_1, x_2 A gilt: $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$.

A = {x N_0 : x ≤ 4}, B = {y N_0 : y ≤ 10}
f: A $\rightarrow$ B
f: x $\rightarrow$ y = 2x



Wir stellen fest, dass jetzt jedes zugeordnete Element (in B) genau einmal zugeordnet wird.

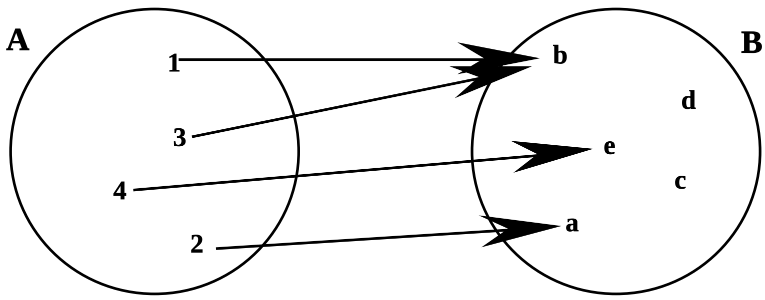
bijektiv:

Eine Abbildung f: A → B heisst bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

f: $Z^- \to Z^+$
f: $x \to y = -x$

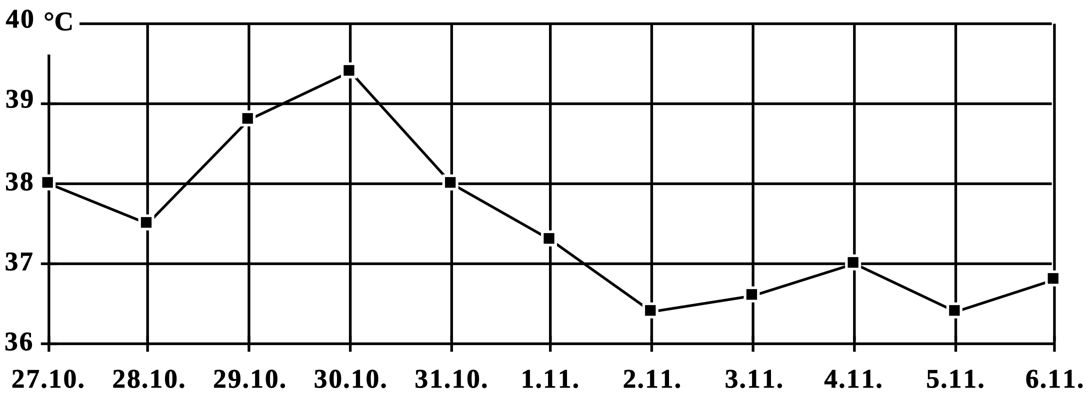
Darstellung von Abbildungen

Pfeildiagramm



Koordinatendiagramm

Das Beispiel zeigt eine Fieberkurve. Jedem Tag ist eine bestimmte Temperatur zugeordnet.



Tabelle

Tabellen sind bekannte Elemente zur Funktionsdarstellung. Hier seien als Beispiele die Preistabelle oder der Stundenplan genannt.

Funktionsgleichung

In Bezug auf ein Koordinatensystem mit x- und y-Achse wird die Funktion durch eine Gleichung der Form y = f(x) angegeben. Dabei ist x die *unabhängige* und y die *abhängige* Variable.

Beispiele:

f: $R \to R^+$ **g: $V^2 \to V^2$**

f: $x \to y = f(x) = x^2$ **g: $\vec{x} \to \vec{y} = A \bullet \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$**

Operatoren

Ein Operator ist die allgemeine Form einer Handlung, die Operation ist deren konkrete Realisierung. Bei der Darstellung von Funktionen ist z.B. das f der Funktionsoperator, der auf Elemente aus dem Definitionsbereich angewendet einen Wert aus dem Cobereich erzeugt.

Umkehrabbildung

Gegeben sei eine bijektive Abbildung f:

f: A → B
f: x → y = f(x)

Jedem Element x A ist genau ein Element y = f(x) zugeordnet. Weil die Funktion bijektiv ist, ist jedes Element in B auch Bild eines Elementes von A (surjektiv), und zwar wird jedes Element von B genau einmal zugeordnet (injektiv). Unter diesen Umständen existiert eine Abbildung f^{-1}, welche jedem Element von B genau ein Element von A zuordnet. f^{-1} ist also die Umkehrabbildung von f.

$$\left\{\begin{array}{l} f: A \to B \\ f: x \to y = f(x) \\ f \text{ bijektiv} \end{array}\right. \quad \text{genau ein } f^{-1}, \quad \left\{\begin{array}{l} f^{-1}: B \to A \\ f^{-1}: y \to x = f^{-1}(y) \\ f^{-1} \text{ bijektiv} \end{array}\right.$$

Beispiele:

$f: Z^- \to Z^+$	$f^{-1}: Z^+ \to Z^-$
$f: x \to y = -x$	$f^{-1}: y \to x = -y$

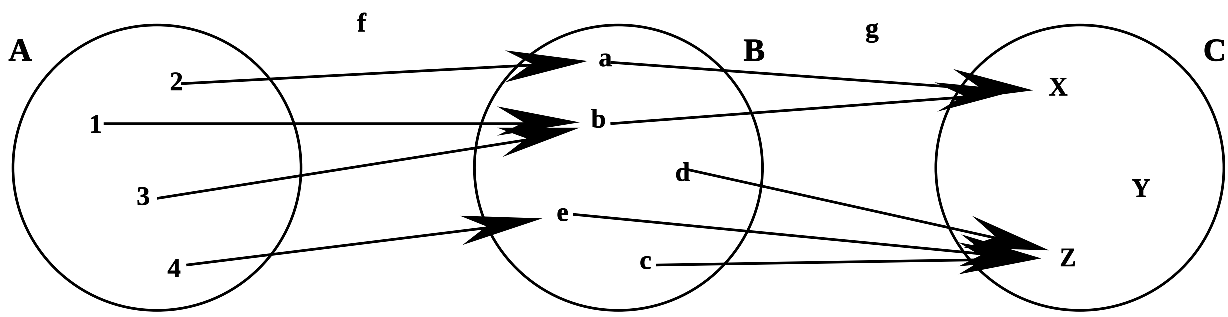
$A = \{0, 3, 6, \ldots\}$, $B = \{\ldots, -2, -1, 0, 1\}$

$g: A \to B$	$g^{-1}: B \to A$
$g: x \to y = \frac{-x}{3} + 1$	$g^{-1}: y \to x = -3y + 3$

Zusammensetzung von Abbildungen

Gegeben seien die drei Mengen A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d, e}, C = {X, Y, Z}

Die Abbildungen f und g sind durch folgendes Diagramm gegeben:



f(1) = f(3) = b, f(2) = a, f(4) = e
g(a) = g(b) = X, g(c) = g(d) = g(e) = Z

Nun kann man die direkte Abbildung h finden. Es gilt:
h(1) = X, h(2) = X, h(3) = X, h(4) = Z

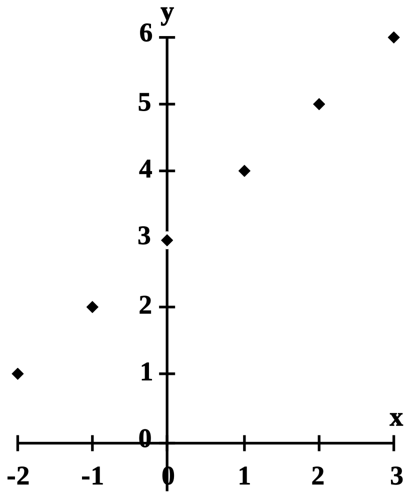
$f: A \to B$	$g: B \to C$	$h = g \circ f: A \to C$
$f: x \to y = f(x)$	$g: y \to z = g(y)$	$h: x \to z = g(f(x))$

Beispiel:

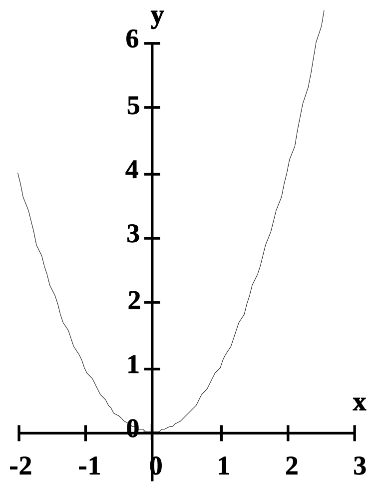
$f: N \to Z$	$g: Z \to Q$	$h: N \to Q$
$f: x \to y = -2x$	$g: y \to z = \frac{y}{4} - 3$	$h: x \to z = \frac{-x}{2} - 3$

Ergänzungen:

Abbildung einer Menge auf sich selbst:
B = A
f: Z → Z
f: x → y = x + 3

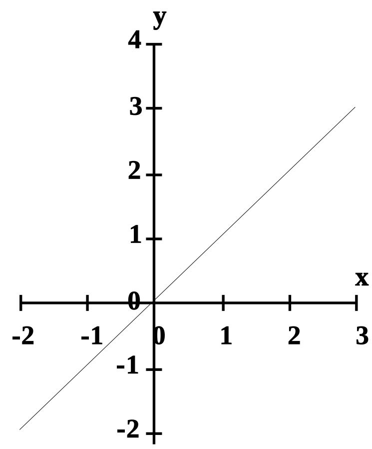


g: R → R
g: x → y = x^2



Die identische Abbildung:
i: A → A
i: x → y = x
Die identische Abbildung ist bijektiv.

Übrigens ergibt die Verknüpfung einer Abbildung mit ihrer inversen die identische Abbildung: $f \circ f^{-1} = i$, ebenso auch die Umkehrung: $f^{-1} \circ f = i$.



Innere Verknüpfung

Nehmen wir zwei Elemente x und y aus der Menge der natürlichen Zahlen N, welche zusammen das Paar (x, y) bilden sollen. Diesem Paar (x, y), es ist Element des kartesischen Produkts N × N, wird ein beliebiges Element z N zugeordnet.

Beispiel:
f: $N \times N \rightarrow N$
f : $(x, y) \rightarrow z = x + y$
In diesem Beispiel wird also eine Addition von zwei natürlichen Zahlen x und y ausgeführt. Das Ergebnis (z) ist wiederum eine natürliche Zahl. Die Addition von zwei natürlichen Zahlen kann als Abbildung von N × N auf N aufgefasst werden. Es handelt sich in diesem Fall um eine innere Abbildung, weil ja die Menge N dabei nicht verlassen wird.

allgemein:
Es sei M eine Menge. Ferner sei A × B eine Teilmenge von M × M und f eine Abbildung von A × B auf M.
f: $A \times B \rightarrow M$
f: $(x, y) \rightarrow f(x, y) = x \circ y$

Eine solche Abbildung f ist eine *innere Verknüpfung*.

Beispiele für innere Verknüpfungen:

Addition in N:	$x \circ y = x + y$
Subtraktion in Z:	$x \circ y = x - y$
Multiplikation in Z:	$x \circ y = x \bullet y$
Arithmetisches Mittel in Q:	$x \circ y = \frac{x + y}{2}$

Natürlich kann man auch andere Verknüpfungen als die Grundoperationen mit Zahlen definieren. Es sei M = {a, b, c, d} eine Menge mit den vier beliebigen Elementen a, b, c und d. Die Verknüpfung f ist durch eine Tabelle gegeben:

f	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	c	b	a	d
c	d	a	c	b
d	b	d	b	d

f: $M \times M \rightarrow M$
f: $(x, y) \rightarrow f(x, y) = x \circ y$

Assoziativgesetz:
Eine Menge M kann bezüglich der Verknüpfung ∘ assoziativ sein. Es gilt dann:
$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
Ebenso kann die Menge M bezüglich der Verknüpfung ∘ kommutativ sein:
$a \circ b = b \circ a$

Mengen mit zwei inneren Verknüpfungen

Bei Mengen mit zwei inneren Verknüpfungen (M, ∘, *) gibt es zwei Möglichkeiten für das Distributivgesetz:

(1) $x*(y \circ z) = (x*y) \circ (x*z)$

(2) $(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$

Gilt das Kommutativgesetz für die Verknüpfung *, dann sind (1) und (2) äquivalent.

Ring

Eine algebraische Struktur R mit mindestens 2 Elementen, in der zwei zweistellige innere Verknüpfungen (i.a. Addition + und Multiplikation •) definiert sind, heisst ein Ring, wenn für beliebige Elemente a, b, c R die folgenden Gesetze gelten:

(R_1)	$a + b = b + a$	**(kommutatives Gesetz der Addition)**
(R_2)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	**(assoziatives Gesetz der Addition)**
(R_3)	**Zu je zwei Elementen a, b R gibt es genau ein Element x R mit**	
	$a + x = b$	**(Umkehrbarkeit der Addition)**
(R_4)	$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$	**(assoziatives Gesetz der Multiplikation)**
(R_5)	a) $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$	
	b) $(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$	**(distributive Gesetze)**

Aus (R_1) bis (R_5) folgt die Existenz genau eines Elements 0 R mit der Eigenschaft $a + 0 = a$ für alle a R. 0 heisst Nullelement des Ringes.

Körper

Ein kommutativer Ring K mit mindestens zwei Elementen heisst Körper, wenn zu je zwei Elementen a, b K ($a \neq 0$) genau ein Element x K existiert mit

$a \bullet x = b$

In jedem Körper existiert genau ein *Einselement* e und zu jedem Element a K genau ein *inverses Element* $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Gruppe

Eine algebraische Struktur G mit einer zweistelligen inneren Verknüpfung heisst Gruppe, wenn für beliebige Elemente a, b, c G folgende Gesetze gelten:

(G_1) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

(G_2) **Es existiert ein *neutrales Element* (auch *Einselement* oder *Einheit* genannt) e G mit $a \circ e = e \circ a = a$ für alle a G.**

(G_3) **Zu jedem a gibt es ein *inverses Element* (auch *Inverses* genannt) a^{-1} G mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.**

Aus (G_1) bis (G_3) folgt, dass es genau ein neutrales Element e G und zu jedem a G genau ein inverses Element a^{-1} G gibt.

Algebraische Funktionen

Allgemeine algebraische Funktionen

(1) $F(x,y) = P_0(x) + P_1(x)y + P_2(x)y^2 + \ldots + P_n(x)y^n = 0$ (n N_0)

Die angegebene Gleichung ist eine algebraische Gleichung, wenn die Ausdrücke $P_i(x)$ Polynome sind. In vielen Fällen kann man die Gleichung (1) auf y lösen, sodass man eine Gleichung der Art

(2) $y = f(x)$ **erhält.**

Beispiele:

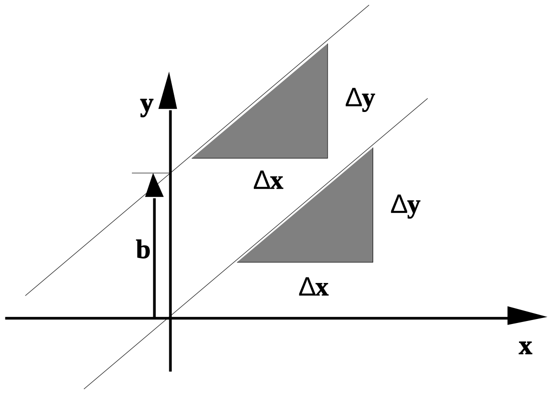
$(5 + 3x) + 2y = 0$	$\rightarrow$	$y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$	lineare Funktion
$(5 + 2x - 3x^2) + y = 0$	$\rightarrow$	$y = 3x^2 - 2x - 5$	quadratische Funktion
$(25 - x^2) - y^2 = 0$	$\rightarrow$	$x^2 + y^2 = 25$	Kreisgleichung

Lineare Funktion

$f: R \rightarrow R$
$f: x \rightarrow y = m \bullet x + b$

Geradengleichungen:

$Ax + By + C = 0$	Allgemeine Form
$y = mx + b$	Hauptform
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Achsenabschnittsform
$y - y_1 = m(x - x_1)$	Punkt-Steigungs-Form
$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$	Zwei-Punkt-Form



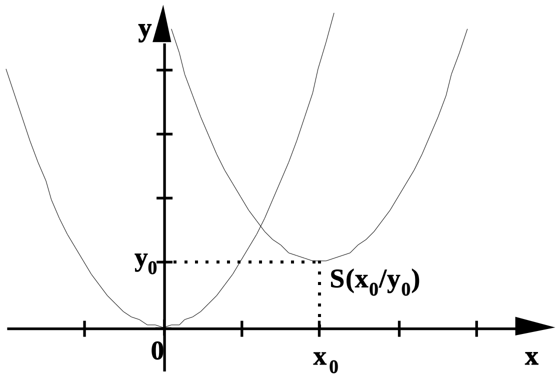
Die lineare Funktion ist bijektiv, es existiert zu jeder Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1}.

Quadratische Funktion

$f: R \rightarrow R$
$f: x \rightarrow y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$

Der Graph der quadratischen Funktion heisst Parabel 2. Ordnung. Der Scheitel ist $S(x_0/y_0)$.

Die quadratische Funktion ist so, wie sie gegeben ist, nicht injektiv. Man kann also nicht umkehren. Wenn der Definitionsbereich geeignet eingeschränkt wird, lässt sich dennoch eine Umkehrfunktion bilden.



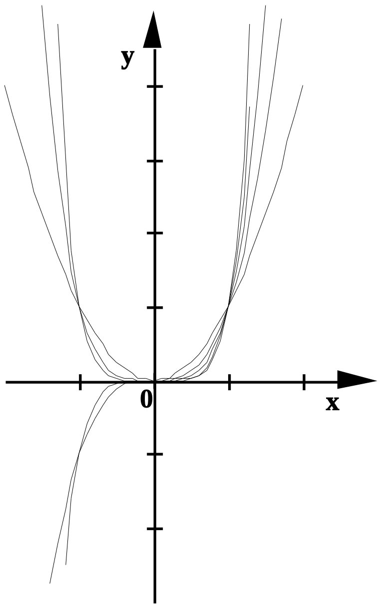
Potenzfunktion

f: R → R
f: x → y = x^n (n N)

Potenzfunktion n-ten Grades

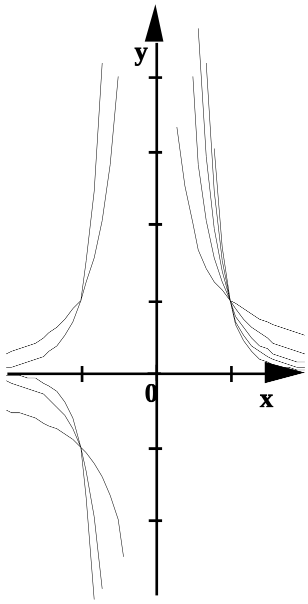
$y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, $y = x^6$, …

Der Graph der Potenzfunktion $y = x^n$ ist eine Parabel n-ter Ordnung.



$y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-4}$, …

Die Graphen der Potenzfunktion mit negativen Exponenten sind Hyperbeln.



f: R\{0} → R\{0}
f: x → y = x^n (n Z^-)

Ganz rationale Funktion

Eine Zusammensetzung aus Potenzfunktionen nennt man ganz rationale Funktion oder auch Polynomfunktion. Sie ist durch die Funktionsgleichung

$y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_2x^2 + a_1x + a_0$ (a_i R, n N_0)

gegeben.

Nach der Potenz mit dem grössten Exponenten hat die ganz rationale Funktion den Grad n. Der Graph ist eine Parabel n-ter Ordnung.

Summe, Differenz und Produkt von ganz rationalen Funktionen sind wiederum ganz rationale Funktionen.

Das Horner-Schema

Für Berechnungen von Polynomwerten ist oft eine andere Darstellung als $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_2x^2 + a_1x + a_0$ günstiger. Man kann durch Ausklammern das Polynom umformen und erhält:

$P(x) = (\dots((a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \dots a_2)x + a_1)x + a_0$

Beispiele:
$3x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = ((3x - 4)x + 5)x - 7$
$5x^5 - 6x^4 + 4x^3 + 2x^2 - x + 2 = ((((5x - 6)x + 4)x + 2)x - 1)x + 2$

Der Vorteil dieser Zerlegung ist, dass die Potenzen in einzelne Produkte aufgelöst sind. Besonders bei der Berechung von Polynomwerten mit dem Computer zeigt sich dieser Vorteil in einer geringeren Anzahl von Operationen und damit in kürzerer Rechenzeit.

Gebrochen rationale Funktion

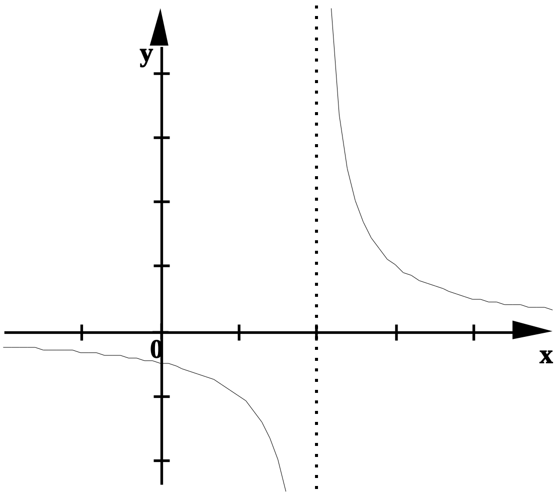
Der Quotient von zwei ganz rationalen Funktionen ergibt eine gebrochen rationale Funktion, sofern die Division der beiden Funktionen nicht restlos ausführbar ist.

$$y = R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

Beispiele:

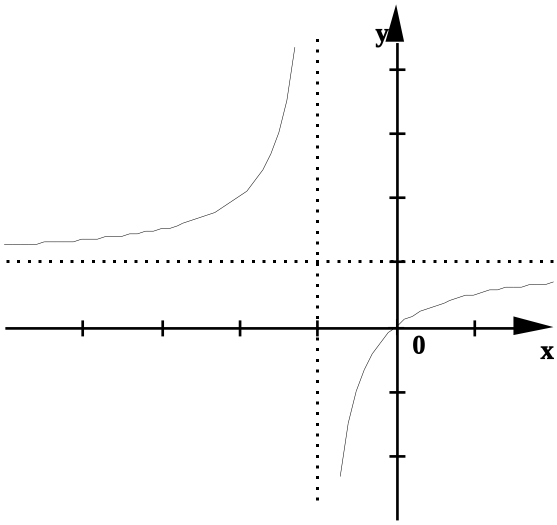
f: $\mathbb{R}\backslash\{2\} \rightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$

f: $x \rightarrow y = \frac{1}{x-2}$



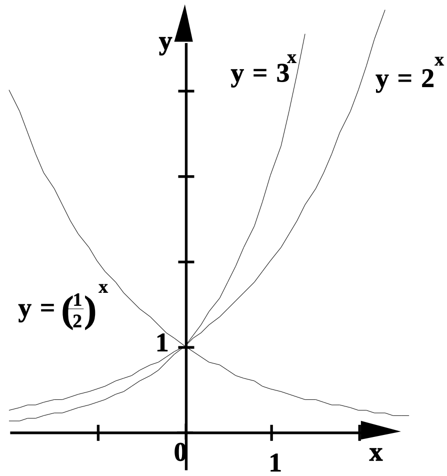
g: $\mathbb{R}\backslash\{-1\} \rightarrow \mathbb{R}\backslash\{1\}$

g: $x \rightarrow y = \frac{x}{x+1}$



Transzendente Funktionen

Exponentialfunktion



f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$
f: $x \rightarrow y = a^x \quad (a \quad \mathbf{R}^+ \setminus \{1\})$

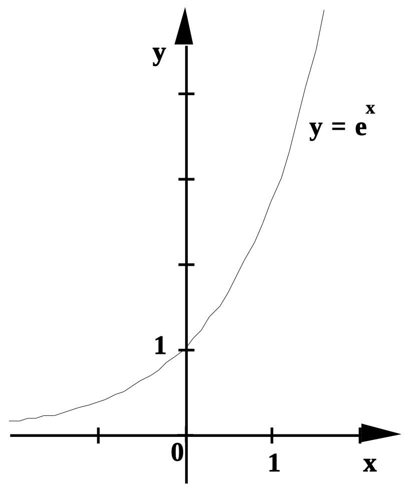
$y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, ...

Eine spezielle Expontialfunktion, welche in vielen Anwendungen vorkommt, ist jene mit der Basis e (Eulersche Zahl).
Die Eulersche Zahl e kann als Grenzwert einer Folge von Zahlen definiert werden, und zwar folgendermassen:

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \rightarrow e$$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \ldots$$

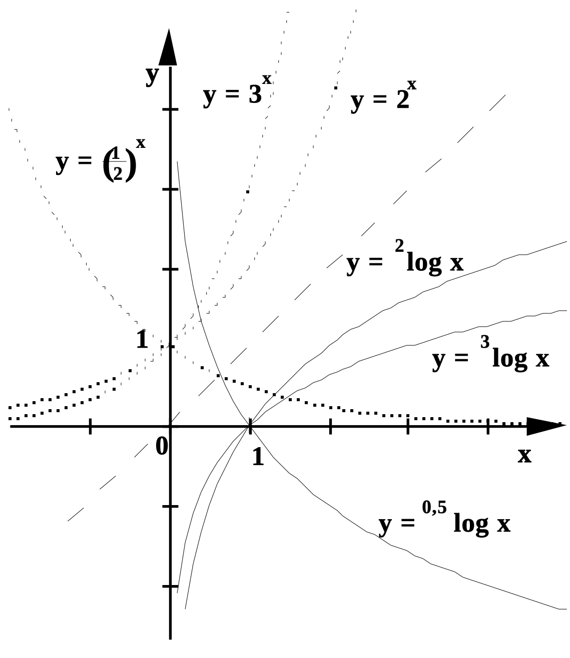
Die Werte dieser Zahlenfolge nähern sich mit $n \rightarrow \infty$ dem Wert e = 2,71828... (e ist eine irrationale Zahl)



Die entsprechende Funktion heisst:
f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$
f: $x \rightarrow y = e^x$

Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.



f^{-1}: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$
f^{-1}: $y \rightarrow x = {}^a\log y = \log_a y$
(sprich: "Logarithmus von y zur Basis a")

$x \leftrightarrow y$

f^{-1}: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$
f^{-1}: $x \rightarrow y = {}^a\log x$

Bezeichnungen:
${}^a\log x$ a: Basis, x = Numerus

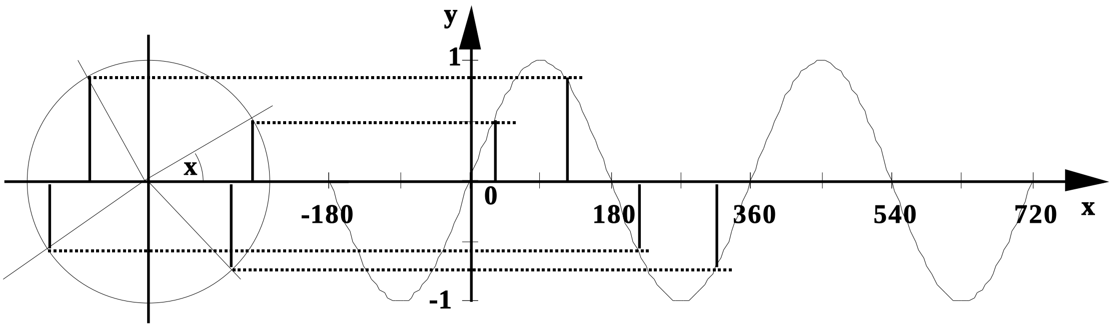
Spezielle Logarithmen:

Zehnerlograrithmus (Basis10): ${}^{10}\log x = \lg x$

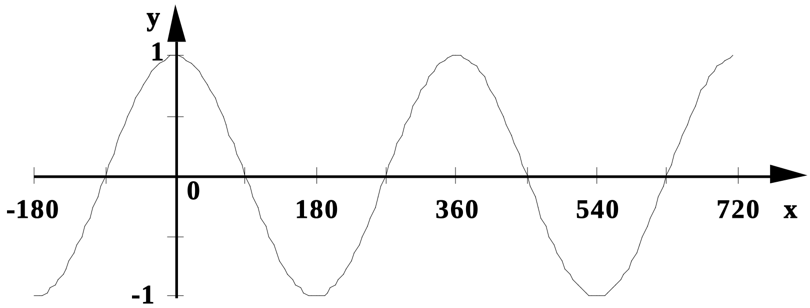
Natürlicher Logarithmus(Basis e): ${}^e\log x = \ln x$

Winkelfunktionen

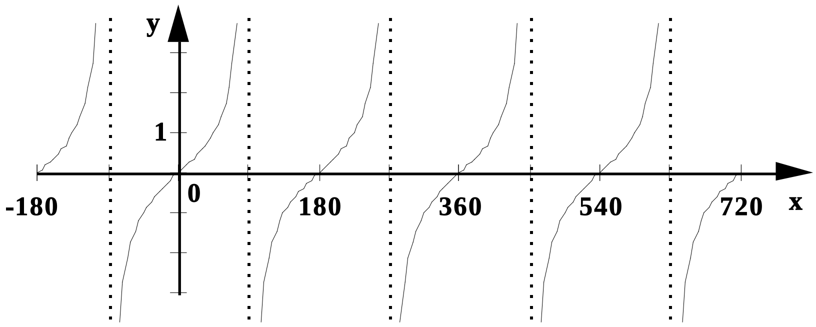
f: R → R
f: x → y = sin x



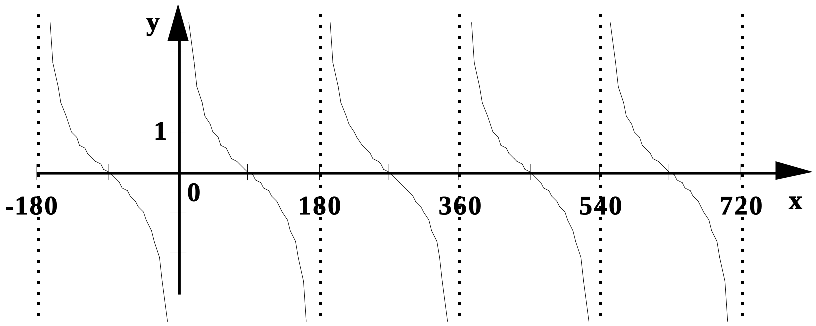
f: R → R
f: x → y = cos x



f: R \ $\left\{ x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \quad Z \right\}$ → R
f: x → y = tan x



f: R \ $\{ x \mid x = k\pi \quad k \quad Z\}$ → R
f: x → y = cot x



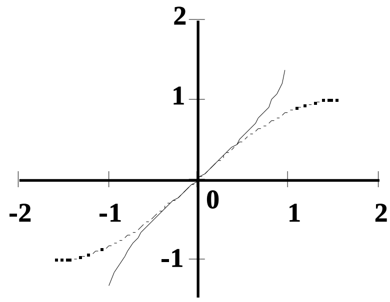
Die Winkelfunktionen sind periodische Funktionen. Bei der Sinus- und der Cosinusfunktion ist die Periodenlänge 360° oder 2π [rad] (d.h.: y(x+2π) = y(x)), bei der Tangens- und der Cotangensfunktion ist die Periodenlänge jeweils 180° = π [rad] (also: y(x+π) = y(x)).

Zyklometrische Funktionen

Häufig tritt die Aufgabe auf, bei gegebenem Winkelfunktionswert den dazugehörenden Winkel zu bestimmen. So ist dies gerade bei Dreiecksberechnungen der Fall, wenn z.B. die Seiten gegeben und die Winkel gesucht sind. Es stellt sich also die Frage nach den Umkehrfunktionen. Wie sich gezeigt hat, sind die Winkelfunktionen auf grund ihrer Periodizität nicht bijektiv. Wenn man allerdings den Definitionsbereich beschränkt, kann man umkehrbare Funktionen erhalten.

$f: \{x \quad R : -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\} \rightarrow \{y \quad R : -1 \le y \le 1\}$
$f: x \rightarrow y = \sin x$ **(Hauptwert)**

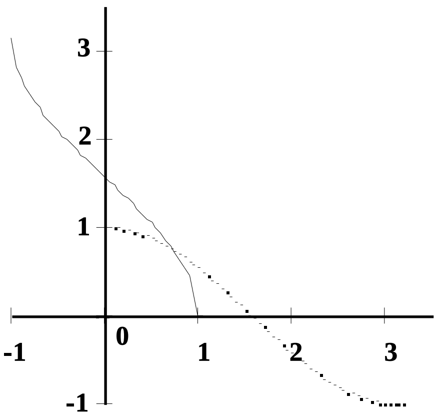
$f^{-1}: \{x \quad R : -1 \le x \le 1\} \rightarrow \{y \quad R : -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\}$
$f^{-1}: x \rightarrow y = \arcsin x$ **(lies: "arcus sinus von x")**



$f: \{x \quad R : 0 \le x \le \pi\} \rightarrow \{y \quad R : -1 \le y \le 1\}$
$f: x \rightarrow y = \cos x$ **(Hauptwert)**

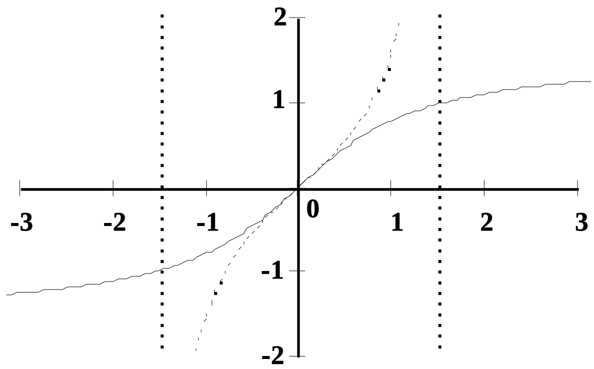
$f^{-1}: \{x \quad R : -1 \le x \le 1\} \rightarrow \{y \quad R : 0 \le y \le \pi\}$

$f^{-1}: x \rightarrow y = \arccos x$



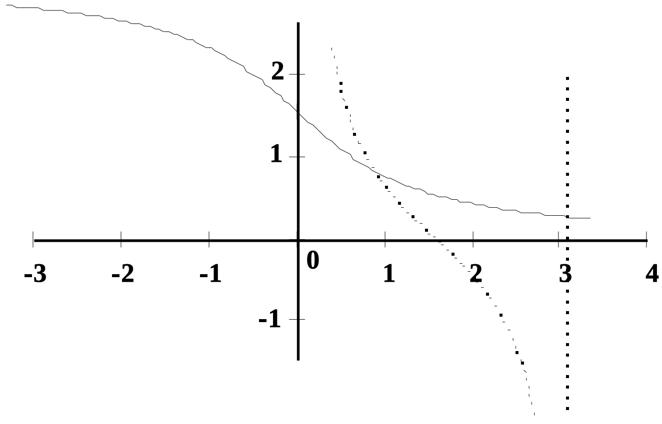
$f: \{x \quad R : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\} \rightarrow R$ **(Hauptwert)**
$f: x \rightarrow y = \tan x$

$f^{-1}: R \rightarrow \{y \quad R : -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$
$f^{-1}: x \rightarrow y = \arctan x$



$f: \{x \quad R : 0 < x < \pi\} \rightarrow R$ **(Hauptwert)**
$f: x \rightarrow y = \cot x$

$f^{-1}: R \rightarrow \{y \quad R : 0 < y < \pi\}$
$f^{-1}: x \rightarrow y = \text{arccot}\, x$



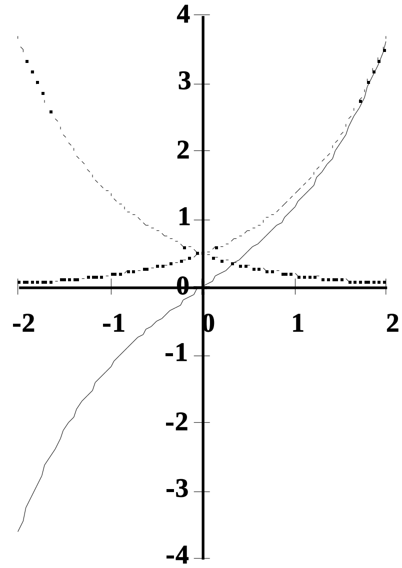
Hyperbelfunktionen

Die Hyperbelfunktionen sind von ihrer Definition her eine Kombination von Exponentialfunktionen. In ihren Eigenschaften allerdings sind sie sehr ähnlich den trigonometrischen Funktionen. Deshalb ist ihre Bezeichnung an die Bezeichnung der trigonometrischen Funktionen angelehnt.

f: R → R

f: x → y = sinh x = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(lies: "Sinus hyperbolicus von x")

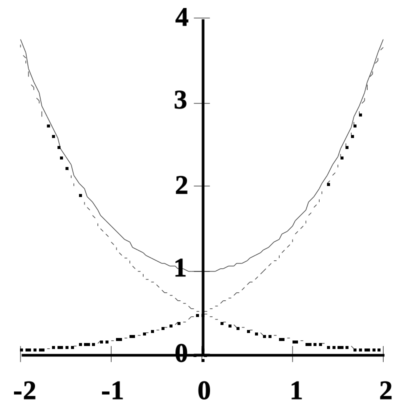


f: R → {y R | y ≥ 1}

f: x → y = cosh x = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(lies: "Cosinus hyperbolicus von x")

Der Graph des Cosinus hyperbolicus ist bekannt unter dem Namen "Kettenlinie", weil sich eine an zwei Punkten aufgehängte Kette entlang dieses Funktionsgraphen ausrichtet.

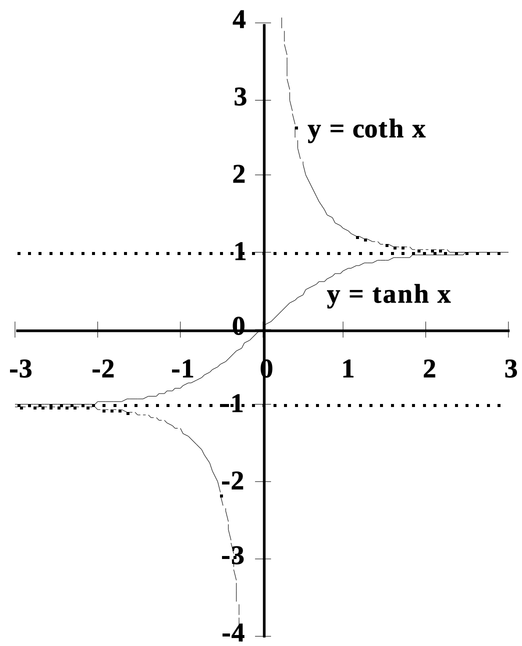


f: R → {y R : -1 < y < 1}

f: x → y = tanh x $= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

f: R\{0} → {y R : y < -1 y > 1}

f: x → y = coth x $= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$



Aufgrund der Definitionen von Sinus hyperbolicus und von Cosinus hyperbolicus ergibt sich, wie man leicht sieht, die Beziehung:

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Daraus ergibt sich die Deutung als "Hyperbelfunktionen", weil die obige Gleichung an die Hyperbelgleichung erinnert. Werden die Hyperbelfunktionen auch im Komplexen definiert, erhält man Additionstheoreme, welche den aus der Trigonometrie bekannten sehr ähnlich sind.

Areafunktionen

Die Areafunktionen sind die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen.

f: R → R
f: x → y = arsinh x

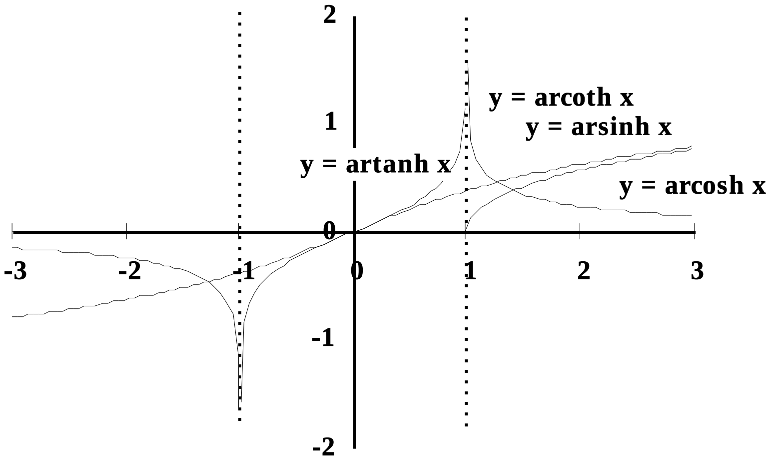
(lies: "Area sinus hyperbolicus von x")

f: {x R : -1 < x < 1} → R
f: x → y = artanh x

f: {x R | x ≥ 1} → $\mathbf{R}_0^+$
f: x → y = arcosh x

(lies: "Area cosinus hyperbolicus von x")

f: {x R : x < -1 oder x > 1} → R\{0}
f: x → y = arcoth x



Die Areafunktionen kann man auch mit Hilfe des natürlichen Logarithmus darstellen. Das sieht folgendermassen aus (o.B.):

$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\frac{1 + x}{1 - x}$

$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln\frac{x + 1}{x - 1}$

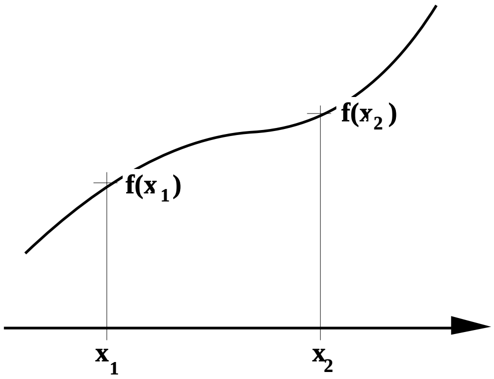
Steigen und Fallen von Funktionen

Eine Funktion f ist streng monoton steigend, wenn für alle x_1, x_2 aus dem Definitionsbereich mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$

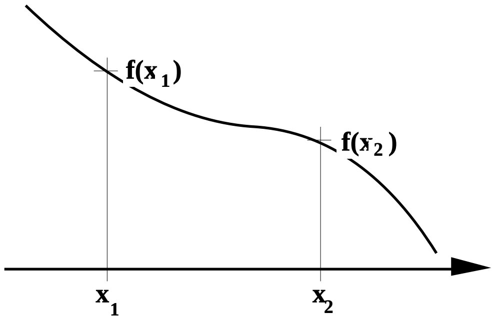
Eine Funktion f ist monoton steigend, wenn für alle x_1, x_2 aus dem Definitionsbereich mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \le f(x_2)$

Eine Funktion f ist streng monoton fallend, wenn für alle x_1, x_2 aus dem Definitionsbereich mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$

Eine Funktion f ist monoton fallend, wenn für alle x_1, x_2 aus dem Definitionsbereich mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \ge f(x_2)$



$x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$

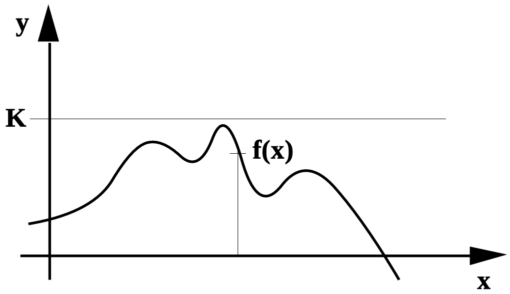


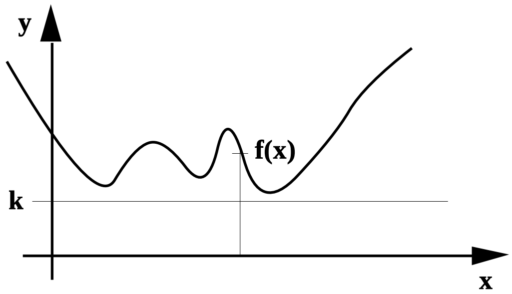
$x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$

Beschränkte Funktionen

Eine Funktion f ist nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl K gibt, sodass für alle x aus dem Definitionsbereich gilt: $f(x) \le K$

Eine Funktion f ist nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl k gibt, sodass für alle x aus dem Definitionsbereich gilt: $f(x) \ge k$





Grenzwert von Funktionen

Gegeben ist eine Funktion f. Sie soll in einem abgeschlossenen Intervall [a, b] definiert sein.

f: $\{x \mid a \le x \le b\} \to R$
f: $x \to y = f(x)$

Wir bilden verschiedene Folgen von x-Werten aus dem Definitionsbereich. All diese x-Folgen sollen nach einem bestimmten Wert x_0 konvergieren. Zu jeder x-Folge wird jeweils die Folge der Funktionswerte gebildet.

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\ x_n,\ \dots \quad \to x_0$$
$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \dots,\ f(x_n),\ \dots$$

$$\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\ \dots\ \bar{x}_n,\ \dots \quad \to x_0$$
$$f(\bar{x}_1),\ f(\bar{x}_2),\ f(\bar{x}_3),\ \dots,\ f(\bar{x}_n),\ \dots$$

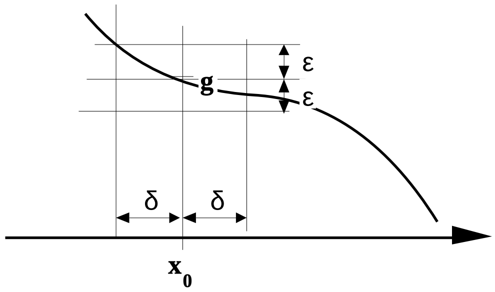
$$\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \dots\ \hat{x}_n,\ \dots \quad \to x_0$$
$$f(\hat{x}_1),\ f(\hat{x}_2),\ f(\hat{x}_3),\ \dots,\ f(\hat{x}_n),\ \dots$$

Es kann nun sein, dass diese Funktionswertefolgen konvergent sind und einen Grenzwert haben.

Definition: Eine Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ hat mit x nach x_0 einen Grenzwert g, wenn zu allen x-Folgen, die nach x_0 gehen, alle zugehörigen Funktionswertefolgen konvergent sind und denselben Grenzwert g haben. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$

Aus dieser Definition folgt der Satz:

Kriterium: Eine Funktion f mit der Gleichung $y = f(x)$ hat mit x nach x_0 genau dann einen Grenzwert g, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass gilt: $\lvert f(x) - g \rvert < \varepsilon$ für $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$.



Wenn x_0 nach $\pm\infty$ geht, erhält man den Grenzwert der Funktion f(x) mit x nach $\pm\infty$. Die entsprechenden Sätze heissen:

Definition: Eine Funktion $y = f(x)$ hat mit x nach ∞ einen Grenzwert g, wenn zu allen x-Folgen, die über alle Grenzen gehen, alle zugehörigen Funktionswertefolgen konvergent sind und denselben Grenzwert g haben.
Kriterium: Eine Funktion $y = f(x)$ hat mit x nach ∞ genau dann einen Grenzwert g, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl G gibt, sodass gilt: $\lvert f(x) - g \rvert < \varepsilon$ für alle $\lvert x \rvert > G$.

Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

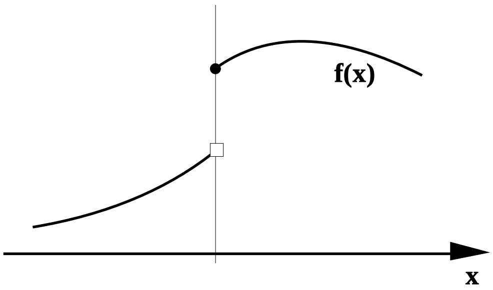
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \bullet g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \bullet \lim_{x \to x_0} g(x)$$

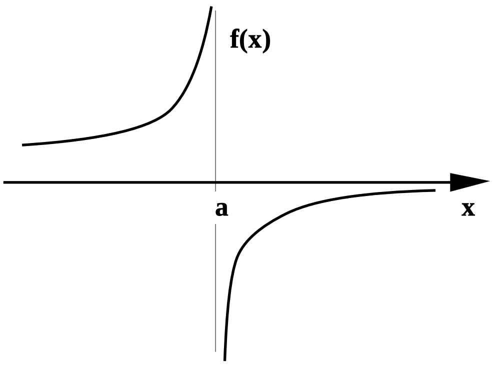
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \qquad \text{für } g(x) \neq 0 \text{ und } \lim_{x \to x_0} g(x)) \neq 0$$

Stetigkeit

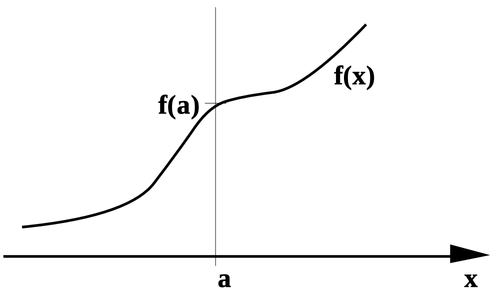
Beispiele:



unstetig in x = a, endlicher Sprung



in x = a nicht definiert, unendlicher Sprung



stetig in x = a, kein Sprung

Gegeben ist eine in einer Umgebung von a definierte Funktion y = f(x).

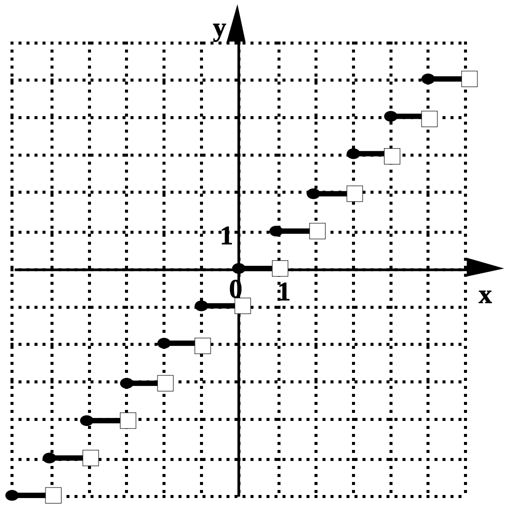
Definition: Eine in einer Umgebung von a definierte Funktion y = f(x) ist an der Stelle a stetig, wenn der Grenzwert der Funktion mit x nach a gleich dem Funktionswert an der Stelle a ist.
$\lim_{x \to a} f(x) = g = f(a)$

Satz: Eine Funktion f(x) ist an der Stelle a stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ist, wenn $|x - a| < \delta$ ist.

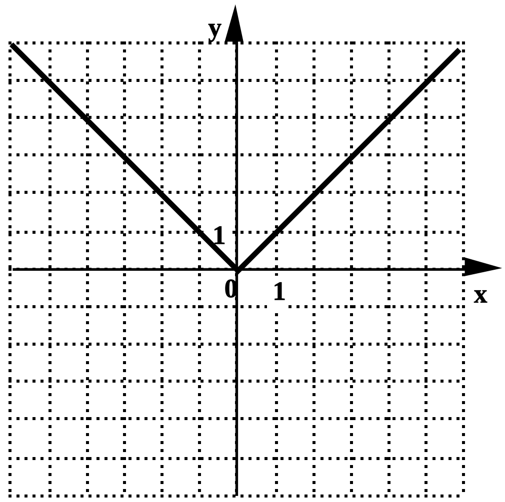
Definition: Eine Funktion f(x) ist in einem Intervall I stetig, wenn sie an jeder Stelle des Intervalls stetig ist.

Beispiele:

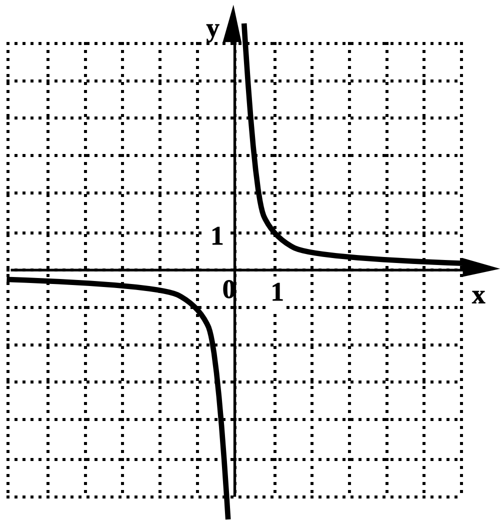
Gauss'sche Klammerfunktion: $y = [x]$
unstetig für jedes ganzzahlige x



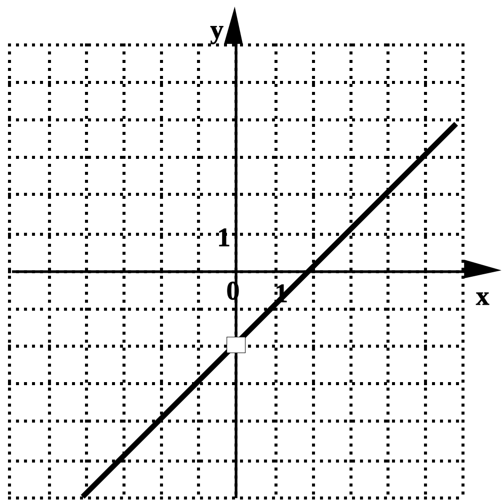
Betragsfunktion: $y = |x|$
stetig, auch für $x = 0$



$y = \frac{1}{x}$
Definitionslücke in $x = 0$



$y = \frac{x^2 - 2x}{x}$
Definitionslücke in $x = 0$



Sätze über stetige Funktionen

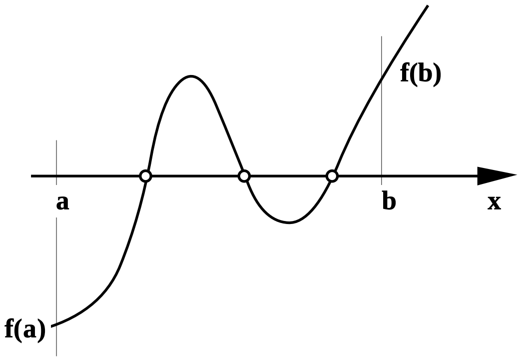
Die Summe, die Differenz und das Produkt von zwei stetigen Funktionen sind wieder stetige Funktionen. Der Quotient von stetigen Funktionen ist dort stetig, wo der Nenner nicht verschwindet.

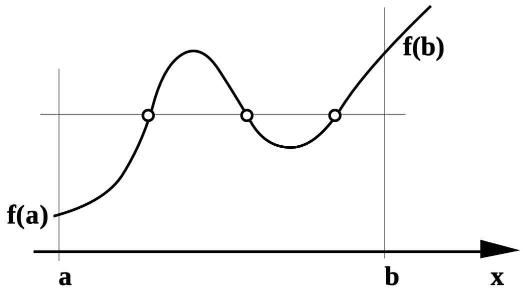
Folgerungen:
Jede ganz rationale Funktion ist für alle x R stetig.
Jede rationale Funktion ist an allen Stellen stetig, an denen der Nenner nicht Null wird.

Definition: Eine Nullstelle ist eine Stelle x, an welcher der Funktionswert 0 wird: f(x) = 0

Eine in einem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige Funktion, die für x = a einen negativen Funktionswert und für x = b einen positiven Funktionswert (oder umgekehrt) hat, hat im Intervall mindestens eine Nullstelle. (Satz von der Nullstelle)

Begründung: Wenn die Funktion stetig ist, gibt es keinen Unterbruch, sodass der Funktionswert 0 nicht ausgelassen werden kann.





Eine in einem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige Funktion f(x) mit unterschiedlichen Funktionswerten f(a) und f(b), nimmt jeden Wert zwischen f(a) unf f(b) mindestens einmal an. (Zwischenwertsatz)

Begründung: Der Zwischenwertsatz kann auf den Satz von der Nullstelle zurückgeführt werden.

Satz: Eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion f(x) ist nach oben und nach unten beschränkt und nimmt dort einen grössten und einen kleinsten Wert mindestens einmal an.

Umkehrfunktion von stetigen Funktionen

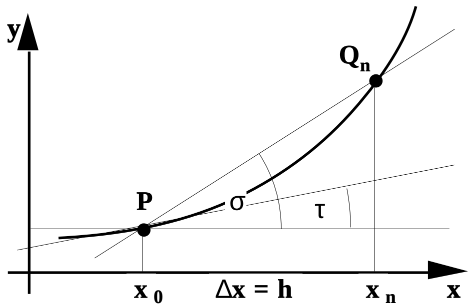
$f: A \rightarrow B$
$f: x \rightarrow y = f(x)$ bijektiv, stetig in A

Die Umkehrfunktion f^{-1} ist ebenfalls stetig. Wenn f streng monoton wachsend ist, ist auch die Umkehrfunktion streng monoton wachsend. Wenn f streng monoton fallend ist, ist f^{-1} auch streng monoton fallend.

Der Differentialquotient

Das Tangentenproblem

Gegeben ist eine Kurve mit der Gleichung y = f(x). Die Funktion f soll in einem Intervall (a, b) stetig sein. In einem Punkt P der Kurve soll die Tangente errichtet werden. Das kann man so ausführen, dass zunächst eine Sekante durch P und einen zweiten Punkt Q auf der Kurve gezeichnet wird. Wird der Punkt Q gegen P hin verschoben, so wird aus der Sekante schliesslich, wenn Q den Punkt P erreicht hat, die Tangente in P. Um diesen Vorgang mathematisch fassen zu können, bilden wir eine Folge von Punkten Q_1, Q_2, Q_3, … deren Grenzwert P ist, oder zur Punktfolge eine dazugehörige Folge von x-Werten, x_1, x_2, x_3, …, die nach dem x-Wert von P konvergiert. Zur Punktfolge, bzw. zur x-Folge berechnen wir jeweils die Steigung der Sekante, sodass wir eine Folge von Sekantensteigungen erhalten. Der Grenzwert der Folge der Sekantensteigungen ist, sofern er existiert, die Tangentensteigung.



$Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3, \quad \ldots, \; Q_n, \quad \ldots \rightarrow P$

$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \; x_n, \quad \ldots \rightarrow x_0$

$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}, \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}, \ldots, \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}, \ldots$

(Folge der Sekantensteigungen)

$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{Q \to P} m_s = \lim_{Q \to P} \tan \sigma = \tan \tau = m_t = \text{Tangentensteigung}$$

Exakte Definition

Gegeben sei eine beliebige Folge von x-Werten, welche nach x_0 konvergiert. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \rightarrow x_0$
Dazu werde die Folge der Differenzenquotienten gebildet:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}, \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}, \ldots, \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}, \ldots$$

Dies werde mit allen nur möglichen x-Folgen, die nach x_0 konvergieren gemacht. Wenn alle zugehörigen Folgen der Differenzenquotienten konvergent sind und denselben Grenzwert haben, bezeichnen wir diesen Grenzwert als Differentialquotient oder 1. Ableitung der Funktion f nach x.

$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

$\left(\frac{dy}{dx}\right.$ lies: "dy nach dx"$\left.\right)$

Verschiedene gebräuchliche Schreibweisen:

$$\lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

Physikalische Interpretation

Das Problem des Differentialquotienten tritt u.a. auch in der Physik auf. Die Kinematik hatte auch den Anlass zur Einführung des Differentialquotienten gegeben (Newton). Und zwar kann man das Problem der Momentangeschwindigkeit damit lösen. Zum Messen der Durchschnittsgeschwindigkeit wird eine Strecke Δs abgesteckt und die dazugehörige Fahrzeit Δt gemessen. Will man die Momentangeschwindigkeit in einem Punkt der Bahn bestimmen, muss Δs immer kleiner gewählt werden. Zur Folge von Δs-Werten, die nach 0 konvergiert, gehört die Folge der Δt-Werte, die ebenso nach 0 geht. Als Durchschnittsgeschwindigkeit wurde der Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ definiert. Wir erhalten also den Grenzwert von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ mit Δt nach 0. Dieser Grenzwert gibt die Momentangeschwindigkeit an. In der Physik werden die Ableitungen nach der Zeit t nicht mit ' sondern mit $^{\bullet}$ bezeichnet.

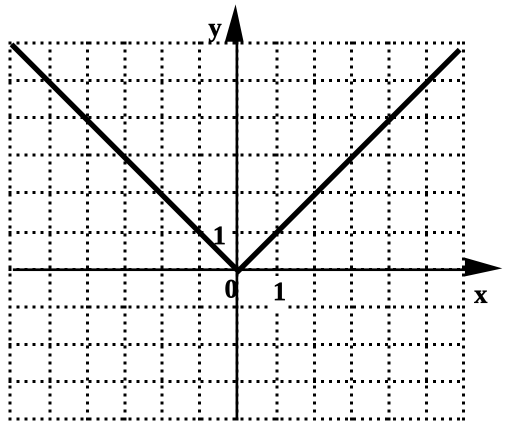
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \dot{s}$$

Gleichfalls kann man so die Momentanbeschleunigung und andere physikalische Grössen definieren.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Wir hatten vorhin bei der Definition des Differenatilaquotienten vorausgesetzt, dass die Funktion f(x) stetig sein soll. Dies genügt allerdings nicht für die Differenzierbarkeit einer Funktion. Es muss, wie gesagt der Grenzwert des Differenzenquotienten existieren. Allerdings kann eine Funktion, welche an einer Stelle x = a unstetig ist, dort nicht differenziert werden. Umgekehrt gilt aber, dass eine differenzierbare Funktion überall dort, wo sie differenzierbar ist, auch stetig ist.

Beispiel: $y = |x|$ ist an der Stelle x = 0 stetig aber nicht differenzierbar (linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert sind verschieden).



Voraussetzung: f(x) sei differenzierbar an der Stelle x = a
Behauptung: f(x) ist an der Stelle x = a stetig
Beweis:

Die Voraussetzung sagt: $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x)$

Wenn der Nenner $x_2 - x_1$ nach 0 geht, muss auch der Zähler $f(x_2) - f(x_1)$ nach 0 gehen. Also:

$\lim\limits_{x_2 \to x_1} (f(x_2) - f(x_1)) = 0$

$\lim\limits_{x_2 \to x_1} (f(x_2) - f(x_1)) = \lim\limits_{x_2 \to x_1} f(x_2) - \lim\limits_{x_2 \to x_1} f(x_1) = 0$

$\lim\limits_{x_2 \to x_1} f(x_2) = f(x_1)$

Ändern der Bezeichnung: $x_2 \to x$, $x_1 \to a$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Dies aber bedeutet, dass f(x) an der Stelle x = a stetig ist (siehe Definition der Stetigkeit).

Ableitungsregeln

Konstante Funktion y = c

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Lineare Funktion y = mx + b

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{m(x + h) + b - mx - b}{h} = \frac{mh}{h} = m$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} m = m$$

Summe und Differenz y = u(x) ± v(x)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(u(x + h) \pm v(x + h)) - (u(x) \pm v(x))}{h} = \frac{u(x + h) - u(x)}{h} \pm \frac{v(x + h) - v(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x + h) - u(x)}{h} \pm \frac{v(x + h) - v(x)}{h}\right) = u'(x) \pm v'(x)$$

Konstanter Faktor y = a•f(x)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \cdot f(x + h) - a \cdot f(x)}{h} = a \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} a \cdot \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = a \cdot f'(x)$$

Produkt y = u(x)•v(x)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{u(x + h)v(x + h) - u(x)v(x)}{h} = \frac{u(x + h)v(x + h) - u(x)v(x + h) + u(x)v(x + h) - u(x)v(x)}{h} =$$

$$= \frac{u(x + h) - u(x)}{h} v(x + h) + u(x) \frac{v(x + h) - v(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} v(x + h) + u(x) \frac{v(x + h) - v(x)}{h} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

y = uv	y' = u'v + uv'

Produktregel

Quotient $y = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{u(x + h)}{v(x + h)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{u(x + h)v(x) - u(x)v(x + h)}{v(x + h)v(x)}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{u(x + h)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x + h)}{v(x + h)v(x)}\right) =$$

$$= \frac{u(x + h) - u(x)}{h} \frac{v(x)}{v(x + h)v(x)} - \frac{u(x)}{v(x + h)v(x)} \frac{v(x + h) - v(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x + h) - u(x)}{h} \frac{v(x)}{v(x + h)v(x)} - \frac{u(x)}{v(x + h)v(x)} \frac{v(x + h) - v(x)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{v(x)}{v(x + h)v(x)} - \lim_{h \to 0} \frac{u(x)}{v(x + h)v(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{v(x + h) - v(x)}{h} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Quotientenregel

Potenzfunktion y = x^n (n N)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^n - x^n}{h} = \frac{(x + h - x)\left((x + h)^{n-1} + (x + h)^{n-2}x + (x + h)^{n-3}x^2 + \dots + (x + h)x^{n-2} + x^{n-1}\right)}{h} =$$

$$= (x + h)^{n-1} + (x + h)^{n-2}x + (x + h)^{n-3}x^2 + \dots + (x + h)x^{n-2} + x^{n-1}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left((x + h)^{n-1} + (x + h)^{n-2}x + (x + h)^{n-3}x^2 + \dots + (x + h)x^{n-2} + x^{n-1}\right) = n \cdot x^{n-1}$$

$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	für n N (nach der Quotientenregel auch für n Z)

Potenzregel

Ganz rationale Funktion

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$y' = na_nx^{n-1} + (n - 1)a_{n-1}x^{n-2} + (n - 2)a_{n-2}x^{n-3} + \dots + 2a_2x + a_1$$

Höhere Ableitungen

y = f(x)

$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

f'(x) ist selbst wieder eine Funktion von x. Deshalb kann man die Frage stellen, ob diese Funktion auch differenzierbar ist. Wir bilden, sofern er existiert, den Grenzwert des Differenzenquotienten und erhalten die 2. Ableitung der Funktion f nach x.

$y'' = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right.$ Lies: "d zwei y nach d x Quadrat"$\left.\right)$

Auf diese Art kann man auch höhere Ableitungen z.B. die n-te Ableitung der Funktion f nach x bilden.

$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$ (Lies: "d n y nach d x hoch n")

Beispiel: Potenzfunktion $y = x^n$
$y = x^n$
$y' = n \bullet x^{n-1}$
$y'' = n(n - 1)\, x^{n-2}$
$y''' = n(n - 1)(n - 2)\, x^{n-3}$
$y^{(4)} = n(n - 1)(n - 2)(n - 3)\, x^{n-4}$
…
$y^{(n)} = n(n - 1)(n - 2) \bullet \ldots \bullet 3 \bullet 2 \bullet 1 \bullet x^0 = n!$

Steigen und Fallen von Kurven

Die 1. Ableitung einer Funktion zeigt das Steigen oder Fallen der zugehörigen Kurve an. Weil der Differentialquotient ja jeweils die Tangentensteigung in einem Punkt der Kurve angibt, kann man aus dem Wert der 1. Ableitung ablesen, ob die Kurve steigt oder fällt.

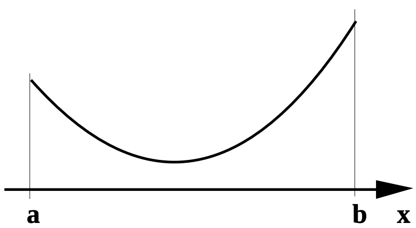
$f'(x_0) > 0$ Die Kurve ist an der Stelle x_0 streng monoton steigend.
$f'(x_0) < 0$ Die Kurve ist an der Stelle x_0 streng monoton fallend.

Konvexe und konkave Funktionen

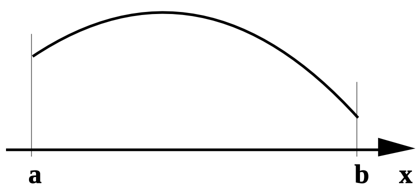
y = f(x)
y' = f '(x)
y'' = f ''(x)

Die 1. Ableitung gibt die Steigung der Funktion f(x) an. Die 2. Ableitung gibt die Steigung der Funktion f'(x) an.

konvexe Kurve (Linkskurve)



konkave Kurve (Rechtskurve)



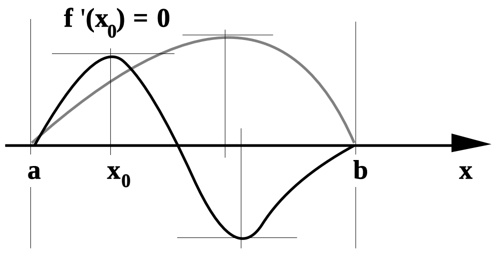
Bei der konvexen Funktion kann man sehen, dass die Tangentensteigung wächst, d.h. dass die 1. Ableitung steigend sein muss. Als Indiz für die Steigung der 1. Ableitung dient die 2. Ableitung. Sie muss in diesem Fall positiv sein. Bei der konkaven Funktion fällt die Tangentensteigung, also muss die 2. Ableitung negativ sein. Ebenso gilt die Umkehrung, d.h. aus der positiven 2. Ableitung folgt, dass die Kurve konvex ist.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow$ konvex, Linkskurve
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow$ konkav, Rechtskurve

Satz von Rolle

y = f(x) **sei stetig in [a, b] und differenzierbar in (a, b).**
Ferner sei f(a) = f(b) = 0

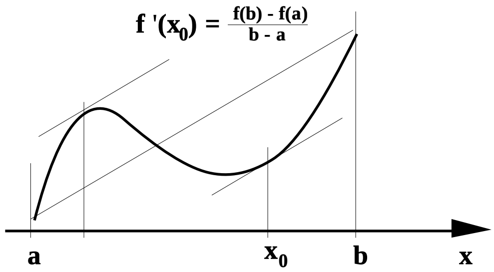
Eine in einem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige und im dazugehörigen offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion y = f(x) mit Nullstellen (f(x) = 0) an den Rändern des Intervalls hat im offenen Intervall (a, b) mindestens eine Stelle x_0, an welcher der Differentialquotient Null wird.



Mittelwertsatz der Differentialrechnung

y = f(x) **sei stetig in [a, b] und differenzierbar in (a, b).**

Eine in einem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige und im dazugehörigen offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion y = f(x) hat im offenen Intervall (a, b) mindestens eine Stelle x_0, an welcher der Differentialquotient $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ wird. (ohne Beweis)



Regel von l'Hospital

Bei der Berechnung von Grenzwerten von Funktionen stösst man oft auf unbestimmte Formen. Um diese unbestimmten Formen zu vermeiden kann man die Funktion z.B. umformen. Die Regel von l'Hospital ermöglicht die Grenzwertberechnung bei gebrochenen Funktionen auf recht einfache Art.

Es gilt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Beispiel: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x + 1}{2x} = \frac{4 + 1}{4} = \frac{5}{4}$

Anmerkung: Die Regel von l'Hospital kann für die unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ verwendet werden. Sie kann mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung bewiesen werden. Auf den Beweis wird hier verzichtet.

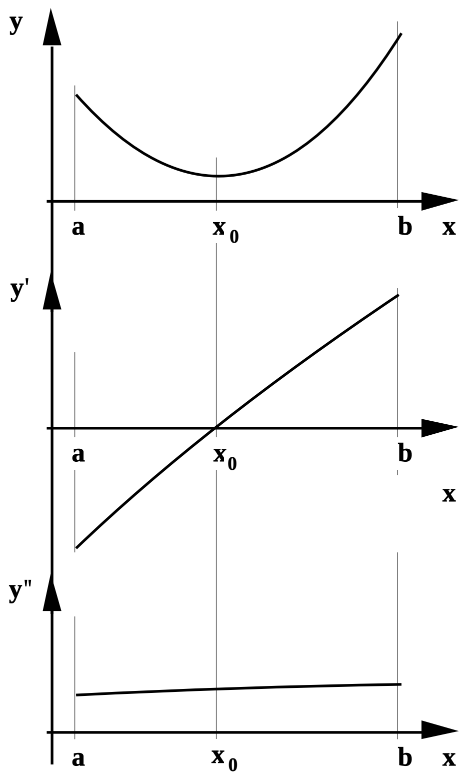
Relative Extremwerte

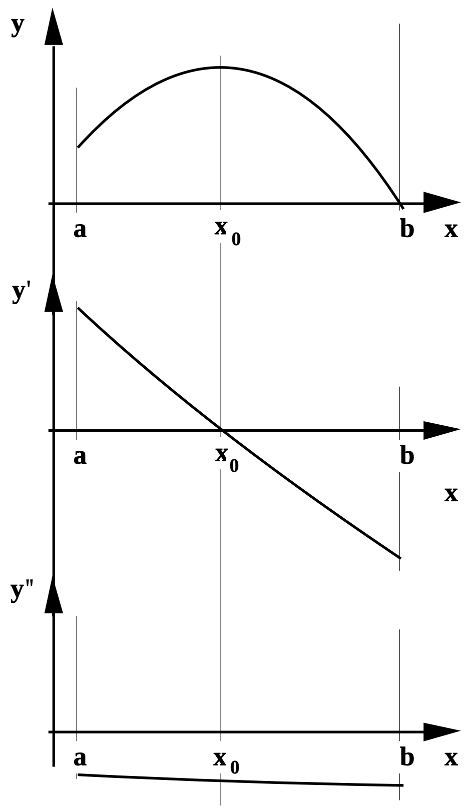
Die Betrachtung von konvexen und konkaven Kurven führt zur Feststellung, dass bei konvexen Kurven eine Minimumsstelle und bei konkaven Kurven eine Maximumsstelle auftreten kann. Wir definieren:

Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum, wenn für alle x aus einer Umgebung $U(x_0)$ gilt: $f(x) < f(x_0)$

Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 ein relatives Minimum, wenn für alle x aus einer Umgebung $U(x_0)$ gilt: $f(x) > f(x_0)$

Minimum **Maximum**





An der Extremalstelle x_0 ist die Tangente horizontal, also die Tangentensteigung Null. Als notwendige Bedingung für einen relativen Extremwert (Maximum oder Minimum) kann man also die Bedingung $f'(x_0) = 0$ nennen.

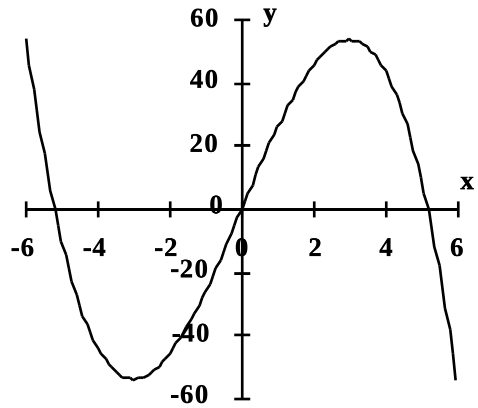
Um das Maximum vom Minimum zu unterscheiden, braucht man die 2. Ableitung. Für das relative Minimum wird die 2. Ableitung positiv sein, für das relative Maximum ist sie negativ.

relatives Minimum (Tiefpunkt) ⇔ $f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) > 0$
relatives Maximum (Hochpunkt) ⇔ $f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) < 0$

Wenn neben der 1. Ableitung auch die 2. Ableitung Null ist, kann ein sogenannter Terrassenpunkt vorliegen, es kann aber auch ein gewöhnliches Maximum oder Minimum sein. Die Entscheidung liefern die höheren Ableitungen an der jeweiligen Stelle.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} y &= -x^3 + 27x \\ y' &= -3x^2 + 27 \\ y'' &= -6x \\ y''' &= -6 \end{aligned}$$



$y' = 0$:

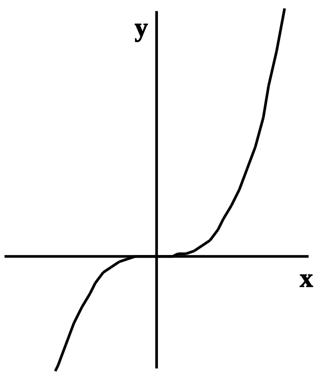
$$\begin{aligned} -3x^2 + 27 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ x_{1/2} &= \pm 3 \end{aligned}$$

$y''(3) = -6 \bullet 3 < 0$ H (Maximum)

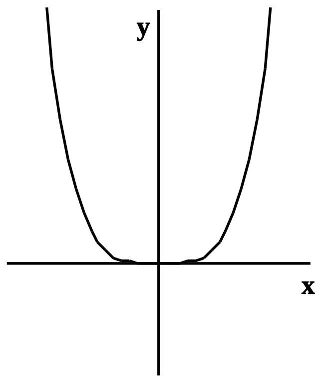
$y''(-3) = -6 \bullet (-3) > 0$ T (Minimum)

Beispiel 2:

$y = x^3$	$x_0 = 0$	$y = x^4$	$x_0 = 0$
$y' = 3x^2$	$f'(0) = 0$	$y' = 4x^3$	$f'(0) = 0$
$y'' = 6x$	$f''(0) = 0$	$y'' = 12x^2$	$f''(0) = 0$
$y''' = 6$	$f'''(0) = 6 > 0$	$y''' = 24x$	$f'''(0) = 0$
		$y^{(4)} = 24$	$f^{(4)} = 24 > 0$



Terassenpunkt

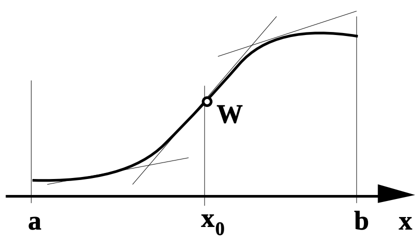


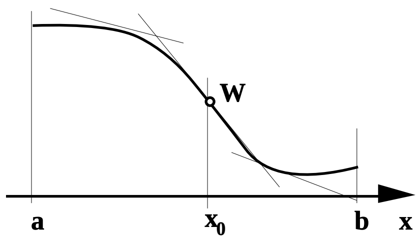
Tiefpunkt

Den Ausschlag für Extremwert oder Terassenpunkt gibt jene höhere Ableitung ungleich Null, nachdem die vorhergehenden Ableitungen Null gewesen sind. Ein relativer Extremwert liegt vor, wenn es eine gerade Ableitung ist, welche von Null verschieden ist, nachdem alle vorherigen Ableitungen Null gewesen sind.

Wendepunkte

Wendepunkte sind Punkte, in denen eine Kurve von der konvexen in die konkave oder von der konkaven in die konvexe Form übergeht.





Beim Übergang von der konvexen in die konkave Form oder umgekehrt wird die Tangentensteigung maximal, bzw. minimal sein. Somit kann man Wendepunkte finden, wenn man die relativen Extremwerte der 1. Ableitung einer Funktion bestimmt. Also ergibt sich:

Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ ist. Wenn die 3. Ableitung Null ist, sind höhere Ableitungen zu untersuchen. Ein Wendepunkt liegt vor, wenn die erste von Null verschiedene Ableitung eine ungerade Ableitung ist (ohne Beweis).

Kurvendiskussion

Kurvendiskussionen dienen dem systematischen Erfassen von wesentlichen Eigenschaften einer Kurve mit dem Ziel, die Kurve dann zeichnen zu können. Bei einer Kurvendiskussion werden folgende Punkte bearbeitet:

1. **Ableitungen (y', y", eventuell y''')**
2. **Nullstellen: y = 0**
3. **Pole, Asymtoten, Näherungskurve**
4. **Relative Extrema: y' = 0, y" = ?**
5. **Wendepunkte: y" = 0, y''' ≠ 0**
6. **Zeichnung**

Pole, Asymptoten und Näherungskurven gibt es vor allem bei gebrochenen Funktionen. Aber auch die Exponential- und Logarithmusfunktionen haben Asymptoten.

Computer und Taschenrechner ermöglichen in den meisten Fällen eine brauchbare Zeichnung von Graphen einer Funktion. Zu beachten ist, dass in der Regel die Kurven einfach punktweise berechnet werden. Es gibt Fälle, bei welchen diese Methode nicht genügt und Elemente der Kurvendiskussion unabdingbar sind. Zeichnen Sie z.B. den Graph von y = cos(1/x).

Beispiel:

1. Ableitungen

$$\begin{aligned} y &= 3x^3 - 9x \\ y' &= 9x^2 - 9 \\ y'' &= 18x \\ y''' &= 18 \end{aligned}$$

2. Nullstellen: y = 0

$$\begin{aligned} 3x^3 - 9x &= 0 \\ 3x(x^2 - 3) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_{2/3} &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

$N_1(0/0)$, $N_2(\sqrt{3}/0)$, $N_3(-\sqrt{3}/0)$

3. Pole, Asymptoten, Näherungskurve gibt es keine

4. Extrema: y' = 0

$9x^2 - 9 = 0$

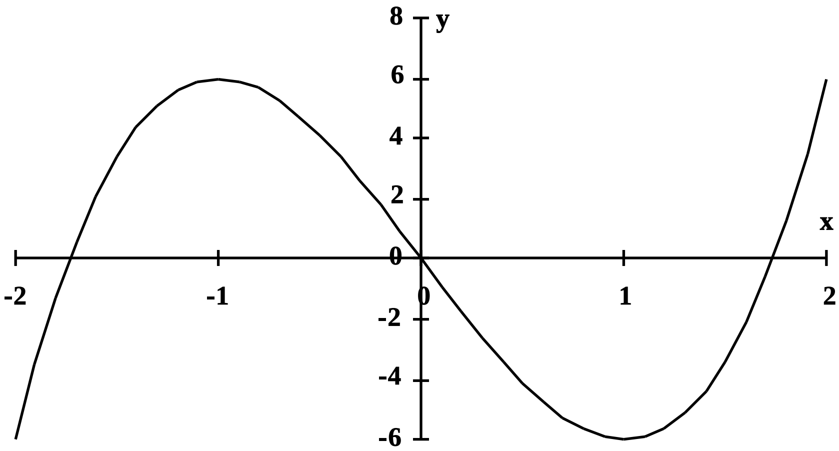
$x_1 = 1$	$y_1 = f(1) = 3 - 9 = -6$	$y''(1) = 18 \bullet 1 > 0$	T (Minimum) (1/-6)
$x_2 = -1$	$y_2 = -3 + 9 = 6$	$y''(-1) = 18 \bullet (-1) < 0$	H (Maximum) (-1/6)

5. Wendepunkte: y" = 0

$18x = 0$

$x = 0 \qquad y = f(0) = 0 \qquad W(0/0)$

6. Zeichnung:



Ganz rationale Funktion

Schon früher hatten wir die ganz rationalen Funktionen definiert:

$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
$n \quad N_0, a_i \quad R$

Die rechte Seite der Definitionsgleichung wird Polynom genannt. Ist die höchste Potenz von x das x^n so ist das Polynom vom Grad n. Der Graph der Polynomfunktion n-ten Grades ist eine Parabel n-ter Ordnung.

Nullstellen von Polynomen

Definition: Nullstellen einer Funktion f(x) sind jene Stellen (x-Werte), für die der Funktionswert Null ergibt. Also: x_0 ist Nullstelle von f(x), wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

Für Polynome vom Grad 1 und 2 können die Nullstellen recht einfach berechnet werden (Lineare und quadratische Gleichung). Bei höherem Grad des Polynoms erhält man eine Gleichung entsprechenden Grades. Solche Gleichungen können in den meisten Fällen nicht exakt gelöst werden. Unter bestimmten Umständen ist aber eine exakte Lösung auffindbar. Wenn aber gar keine exakte Lösung zu finden ist, müssen die Lösungen mit Näherungsverfahren (z.B. Newtonsches Verfahren) gesucht werden.

Satz: Ist x_0 eine Nullstelle des Polynoms f(x) mit dem Grad n, so kann man f(x) in das Produkt von einem Linearfaktor $(x - x_0)$ und ein Restpolynom g(x) vom Grad n-1 zerlegen.

Beweis:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
$f(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = 0$

$$f(x) - 0 = a_n\left(x^n - x_0^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - x_0^{n-1}\right) + \ldots + a_2\left(x^2 - x_0^2\right) + a_1(x - x_0) = (x - x_0)g(x)$$

Die Terme $\left(x^n - x_0^n\right)$ können zerlegt werden in $(x - x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)$. Somit ist leicht zu sehen, dass nach dem Ausklammern nur mehr x^{n-1} als höchste Potenz von x stehen bleibt und g(x) somit den Grad n-1 hat.

Satz: Ein Poynom n-ten Grades kann höchstens in n reellwertige Linearfaktoren der Form $(x - x_i)$ zerlegt werden.

Beweis: Bei jeder Zerlegung sinkt der Grad des Restpolynoms um 1. Falls die Zerlegung weitergeführt werden kann, wird einmal ein Restpolynom vom Grad Null, also eine Konstante, übrig bleiben. Dann kann aber nicht mehr weiter zerlegt werden.

Satz: Ein Polynom n-ten Grades hat höchstens n reelle Nullstellen.

Beweis: Da das Polynom in höchstens n Linearfaktoren zerlegbar ist, können auch nicht mehr als n Lösungen der Polynomgleichung auftreten, denn zum Lösen werden alle Linearfaktoren einzeln Null gesetzt.

Definition: Eine Zahl x_0 ist m-fache Nullstelle eines Polynoms n-ten Grades, wenn sich das Polynom f(x) in $(x - x_0)^m$ g(x) zerlegen lässt.

Satz: Hat ein Polynom n-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle, so ist diese Nullstelle Teiler des konstanten Gliedes.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $\quad a_i \quad Z$
x_0 sei eine ganzzahlige Nullstelle, also soll x_0 Teiler von a_0 sein.

Beweis:

$$a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_2x_0^2 + a_1x_0 + a_0 = 0$$
$$a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_2x_0^2 + a_1x_0 = -a_0$$
$$x_0\left(a_n x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \ldots + a_2x_0^2 + a_1x_0\right) = -a_0$$

Die beiden Faktoren links sind ganze Zahlen, ebenso ist a_0 eine ganze Zahl. Deshalb müssen die beiden Faktoren links Teiler von a_0 sein. Also ist x_0 Teiler von a_0

Dieser letzte Satz wird benützt, um durch gezieltes Probieren exakte Nullstellen zu finden.

Beispiel: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$, gesucht sind die Nullstellen des Polynoms f(x)
$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$
konstantes Glied: 6 Teiler: ±1, ±2, ±3, ±6
$x = 1$: $1 - 2 - 3 + 6 \neq 0$
$x = -1$: $-1 - 2 + 3 + 6 \neq 0$
$x = 2$: $8 - 8 - 6 + 6 = 0$

1. Lösung: $x_1 = 2$ Linearfaktor: $(x - 2)$

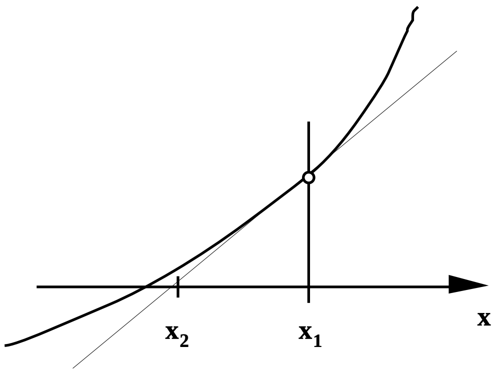
Polynomdivision: $g(x) = (x^3 - 2x^2 - 3x + 6):(x - 2) = x^2 - 3$
Weitere Lösungen: $g(x) = 0$

$$x^2 - 3 = 0$$
$$x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$

Newtonsches Verfahren zur Nullstellenberechnung

Das Lösen von Gleichungen ist eine der wichtigsten Aufgaben der Mathematik. Wie soeben die Polynomgleichungen gezeigt haben, ist es aber oft nicht einfach bzw. gar unmöglich, exakte Lösungen einer Gleichung zu finden. Ein von Newton angegebenes Verfahren liefert nach einer Folge von Iterationsschritten eine Näherungslösung, die für praktische Probleme meist brauchbar ist.

Gesucht ist also die Schnittstelle einer Kurve y = f(x) mit der x-Achse. Wir wählen einen Startpunkt $P_0(x_0/f(x_0))$ in der Näche der Schnittstelle aus. Dieser Startpunkt wird z.B. aus der Skizze des Graphen gewonnen. Im Startpunkt wird die Tangente an die Kurve errichtet. Die Tangente schneidet die x-Achse an der Stelle x_1. x_1 ist in den meisten Fällen eine bessere Näherungslösung als x_0. Jetzt wird neu der Punkt $P_1(x_1/f(x_1))$ berechnet. In P_1wird die Tangente errichtet, welche die x-Achse an der Stelle x_2 schneidet. $P_2(x_2/f(x_2))$ liegt auf der Kurve. Es ist der nächste Punkt, in dem die Tangente errichtet wird. So wird das Verfahren also fortgesetzt.



x_n $P(x_n/f(x_n))$

Tangentensteigung: $f'(x_n)$ **Es soll $f'(x_n) \neq 0$ sein**

Tangente: $y - f(x_n) = f'(x_n) \cdot (x - x_n)$

Schnitt Tangente - x-Achse: y = 0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Wir erhalten eine Folge von Näherungswerten x_0, x_1, x_2, ... (Newtonfolge), welche "normalerweise" gegen die wahre Nullstelle $\bar{x}$ konvergiert. In der Praxis wird das Verfahren abgebrochen, wenn $|x_{n+1} - x_n|$ "klein genug" ist. Die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerten ist in der Regel nahezu gleich der Abweichung von der wahren Lösung, sodass mit der angegebenen Abbruchregel hinreichend gut gearbeitet werden kann.

Beispiel: $f(x) = x^3 + 2x - 1$
$f'(x) = 3x^2 + 2$
$f(0) = -1;\ f(1) = 1 + 2 - 1 = 2$

Zwischen 0 und 1 liegt also eine Nullstelle. Wir wählen den Startwert $x_0 = 0$.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{-1}{2} = 0{,}500000$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}5 - \frac{0{,}125}{2{,}75} = 0{,}454545$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}453398$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0{,}453398$$

Mit einer Excel-Tabelle:

x(n)	f(x)	f'(x)
0.000000	-1.000000	2.000000
0.500000	0.125000	2.750000
0.454545	0.003005	2.619835
0.453398	0.000002	2.616710
0.453398	0.000000	2.616708

Das Newton-Verfahren zeichnet sich in der Regel durch eine sehr schnelle Konvergenz aus. Nach unglaublich wenigen Schritten ändert sich im obigen Beispiel die Lösung auf 6 Stellen nicht mehr.

Rationale Funktionen

Definition: $R(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$ (n, m N_0, a_i, b_i R, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$)

Wenn der Nenner konstant ($m = 0$, $b_0 \neq 0$) ist, ergibt sich die ganz rationale Funktion. Im anderen Fall nennt man die Funktion gebrochen rational. Sie ist definierbar für alle reele Zahlen mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners. Ebenso ist sie im Definitionsbereich stetig und differenzierbar. Die gebrochen rationale Funktion ist echt gebrochen, wenn der Grad des Zählers kleiner als der Grad des Nenners ist.

Pole

Als Besonderheiten gelten die Nullstellen des Nenners. Dort kann man die Funktion ja nicht definieren. Wenn nicht gleichzeitig der Zähler Null wird, geht der Funktionswert nach ∞, wenn man sich einer Nullstelle des Nenners nähert. Eine solche Stelle heisst Pol oder Unendlichkeitsstelle. In einem Pol kann man eine zur y-Achse parallel verlaufende Asymptote zeichnen. (Eine Asymptote ist eine Gerade, der sich eine Kurve nähert, die sie aber nie erreicht.)

Verhalten für $x \to \pm\infty$

Zum Zeichnen der Kurve ist das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ von Interesse. Dabei gibt es je nach Grad des Zählers (n) und des Nenners (m) drei Möglichkeiten:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } n < m \\ c \quad R \setminus \{0\} & \text{für } n = m \\ \infty & \text{für } n > m \end{cases}$$

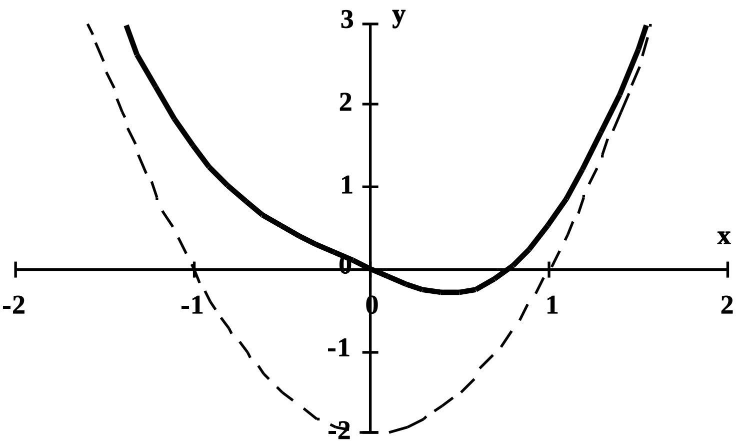
Näherungskurve

Wenn der Grad des Zählers grösser als der Grad des Nenners ist, kann man eine Polynomfunktion als Näherungskurve für $x \to \pm\infty$ bestimmen. Dazu muss man einmal den Zähler durch den Nenner dividieren (Polynomdivision), um einerseits einen ganz rationalen Teil und andererseits einen gebrochenen Rest zu erhalten. Dieser Rest verschwindet mit $x \to \pm\infty$, sodass sich die gegebene Funktion mit $x \to \pm\infty$ der Polynomfunktion annähert.

Beispiel: $y = \frac{2x^4 - x}{x^2 + 1}$

$(2x^4 - x) : (x^2 + 1) = 2x^2 - 2 + \frac{-x + 2}{x^2 + 1}$

Die Näherungskurve hat die Gleichung $y = 2x^2 - 2$



$y = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ n N

Quotientenregel: $y' = \frac{0 - n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{-n-1}$

Potenzregel für n Z: $y = x^n$
$y' = n \cdot x^{n-1}$

Mehrfache Nullstellen von Polynomfunktionen

Eine Polynomfunktion f(x), welche eine m-fache Nullstelle x_0 hat, kann zerlegt werden in:
$f(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x)$

Es sei jetzt x_0 eine 2-fache Nullstelle. Dann ist x_0 auch Nullstelle der 1. Ableitung.

Beweis:
Wenn x_0 eine Nullstelle von f(x) ist, gilt: $f(x) = (x - x_0)^2 \cdot g(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_0) \cdot g(x)$

Nach der Produktregel folgt:

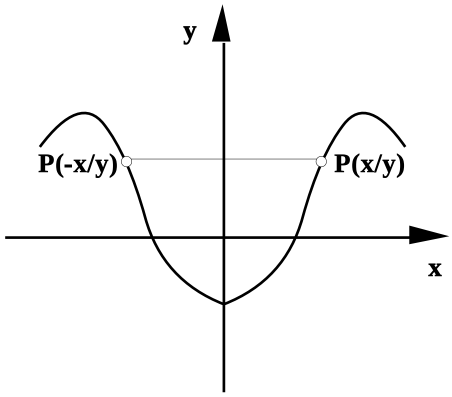
$f'(x) = 1 \cdot (x - x_0) \cdot g(x) + (x - x_0) \cdot 1 \cdot g(x) + (x - x_0) \cdot (x - x_0) \cdot g'(x) = (x - x_0) \cdot (2\, g(x) + g'(x))$

f '(x) kann also in einen Faktor $(x - x_0)$ und ein Restpolynom zerlegt werden.

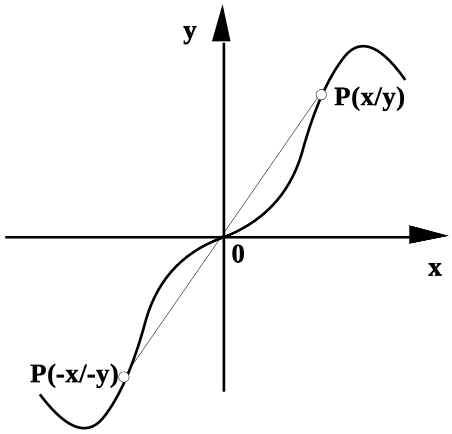
Wenn x_0 eine m-fache Nullstelle des Polynoms f(x) ist, dann ist sie auch Nullstelle aller Ableitung bis zur (m -1)-ten Ableitung. Erst in der m-ten Ableitung $f^{(m)}(x)$ ist x_0 keine Nullstelle mehr.

Symmetrien bei Funktionsgraphen

Der Graph der Funktion f(x) ist zur y-Achse symmetrisch, wenn gilt: f(-x) = f(x).
Für Polynomfunktionen ergibt sich damit: Eine Polynomfunktion ist zur y-Achse symmetrisch, wenn nur gerade Exponenten auftreten.



Der Graph der Funktion f(x) ist zum Ursprung punktsymmetrisch, wenn gilt: f(-x) = -f(x).
Für Polynomfunktionen ergibt sich damit: Eine Polynomfunktion ist zum Ursprung punktsymmetrisch, wenn nur ungerade Exponenten auftreten.



Fundamentalsatz der Algebra

Im Körper der komplexen Zahlen C besitzt jedes nicht konstante Polynom mindestens eine Nullstelle. (ohne Beweis)

Weitere Ableitungsregeln

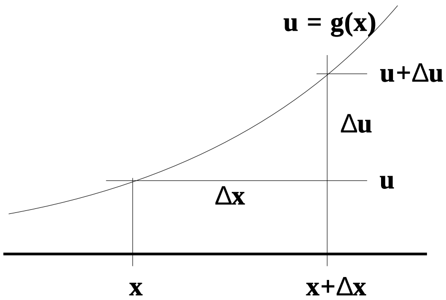
Kettenregel

Gegeben seien die Funktionen f und g. Ihre Zusammensetzung h ist definiert als $h = f \circ g$. Die beiden Funktionen f und g seien ferner differenzierbar im Definitionsbereich.

$g: A \rightarrow B$	$f: B \rightarrow C$	$h: A \rightarrow C$
$g: x \rightarrow u = g(x)$	$f: u \rightarrow y = f(u)$	$h: x \rightarrow y = f(g(x))$
$g'(x) = \frac{du}{dx}$	$f'(u) = \frac{dy}{du}$	

Gesucht ist die 1. Ableitung der Funktion f nach x, also $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Differenzenquotient: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$



$g(x) = u$

$g(x + \Delta x) = u + \Delta u$

$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$

$\Delta x \rightarrow 0 \qquad \Delta u \rightarrow 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \bullet \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \bullet \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Nach den Voraussetzungen existieren die Ableitungen f '(u) und g'(x), sodass sich für den Grenzwert des angesetzen Differenzenquotienten ergibt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \bullet \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(u) \bullet g'(x) = \frac{dy}{du} \bullet \frac{du}{dx}$$

Eine zusammengesetzte Funktion wird abgeleitet, indem man jeweils die äussere Funktion nach der nächstinneren ableitet und die erhaltenen Ableitungen multipliziert.

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = f(u) = f(g(x)) & u = g(x) \\ y' = \frac{dy}{du} \bullet \frac{du}{dx} & \end{array}}$$

Kettenregel

Beispiel: $y = (2x^3 - 5)^{17} \qquad y' = 17(2x^3 - 5)^{16} \bullet 6x^2$

Ableitung der Umkehrfunktion

Gegeben ist eine Funktion f.	**Umkehrfunktion:**
$f: A \rightarrow B$	$f^{-1}: B \rightarrow A$
$f: x \rightarrow y = f(x)$ **bijektiv, differenzierbar**	$f^{-1}: y \rightarrow x = f^{-1}(y)$

Unter den gegebenen Bedingungen ist die Umkehrfunktion differenzierbar.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Der Differenzenquotient der Umkehrfunktion heisst: $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$

$\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta y \rightarrow 0$

Im Nenner steht der Differenzenquotient der Funktion f. Der Grenzwert davon ist y' = f '(x). Somit erhält man für die 1. Ableitung der Umkehrfunktion:

$$x' = (f^{-1})' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)}$$

Nach Vertauschen von x und y:

$f^{-1}: B \rightarrow A$
$f^{-1}: x \rightarrow y = f^{-1}(x)$

$$(f^{-1})' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'} = \frac{1}{f'(y)}$$

Beispiel:

$f: R^+ \rightarrow R^+$	$f^{-1}: R^+ \rightarrow R^+$
$f: x \rightarrow y = x^2$	$f^{-1}: y \rightarrow x = \sqrt{y}$
$y' = f\,'(x) = 2x$	$x' = (f^{-1})' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{2x}$

$$x \leftrightarrow y$$

$y = \sqrt{x}$	$y' = (f^{-1})' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{2y}$

Wurzelfunktionen

Als Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponent erhält man Wurzelfunktionen der Art $y = x^{\frac{1}{n}}$. Nach der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:

$y = x^{\frac{1}{n}}$ $\qquad x = y^n$ $\qquad x' = n \bullet y^{n-1}$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{n \bullet y^{n-1}} = \frac{1}{n}\, y^{1-n} = \frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n} - 1}$$

Auch diese Ableitung hat den Charakter der Potenzregel!

Nun ist noch die allgemeine Wurzelfunktion abzuleiten: $y = x^{\frac{m}{n}}$

$$y = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Nach der Kettenregel gilt:

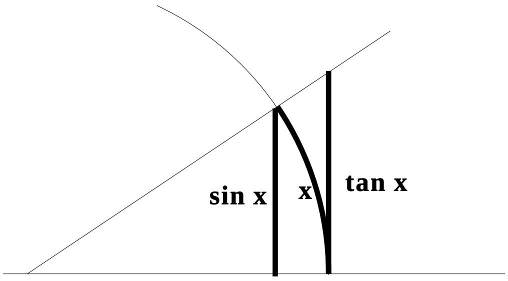
$$y' = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \bullet \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1}$$

Damit ist aber auch wieder die Potenzregel ersichtlich. Jetzt also gilt diese Regel auch für rationale Exponenten. Mittels Darstellung von reellen Zahlen durch Intervallschachtelungen mit rationalen Rändern kann man die Gültigkeit der Potenzregel auch für reelle Exponenten beweisen. Somit gilt also:

$y = x^n$	$n \quad R$
$y' = n \bullet x^{n-1}$	

Trigonometrische Funktionen

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$



$\sin x < x < \tan x \qquad$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x} \qquad | \cdot \sin x$

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$x \to 0$

$1 \geq \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$y = f(x) = \sin x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} =$

$= -2 \sin x \frac{\sin^2\frac{h}{2}}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} = -\sin x \sin \frac{h}{2} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \cos x \frac{\sin h}{h}$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x \cdot 0 \cdot 1 + \cos x \cdot 1 = \cos x$

$\boxed{\begin{array}{l} y = \sin x \\ y' = \cos x \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} y = \cos x \\ y' = -\sin x \end{array}}$ (Beweis wie bei der Sinusfunktion)

$\boxed{\begin{array}{l} y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \\ y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x \end{array}}$

Zyklometrische Funktionen

Die zyklometrischen Funktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Ihre Ableitungen kann man mit der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen gewinnen.

$y = \sin x$ $\qquad$ $x = \arcsin y$

$y' = \cos x$ $\qquad$ $x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$

$y = \cos x$ $\qquad$ $x = \arccos y$

$y' = -\sin x$ $\qquad$ $x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}$

$y = \tan x$ $\qquad$ $x = \arctan y$

$y' = 1 + \tan^2 x$ $\qquad$ $x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$

$y = \cot x$ $\qquad$ $x = \text{arccot}\, y$

$y' = -1 - \cot^2 x$ $\qquad$ $x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{-1 - \cot^2 x} = \frac{-1}{1 + y^2}$

Nach Vertauschen von x und y erhalten wir folgende Ableitungsregeln:

$\boxed{\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{array}}$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{l} y = \arccos x \\ y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{array}}$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{l} y = \arctan x \\ y' = \frac{1}{1 + x^2} \end{array}}$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{l} y = \text{arccot}\, x \\ y' = \frac{-1}{1 + x^2} \end{array}}$

Logarithmusfunktion

$y = \ln x = {}^{e}\log x$ (natürlicher Logarithmus)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x+\Delta x}{x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$\frac{x}{\Delta x} = n$ $\quad\quad \Delta x \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$

$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{\Delta x} = \frac{n}{x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$y' = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \ln x \\ y' = \frac{1}{x}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = {}^{a}\log x = \frac{\ln x}{\ln a} \\ y' = \frac{1}{x\ln a}\end{array}}$$

Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion.

$y = \ln x$	$x = e^{y}$
$y' = \frac{1}{x}$	$x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^{y}$

Nach Vertauschen von x und y erhält man:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = e^{x} \\ y' = e^{x}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = a^{x} = e^{x\ln a} \\ y' = e^{x\ln a}\bullet\ln a = a^{x}\ln a\end{array}}$$

Hyperbolische Funktionen und Areafunktionen

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \\ y' = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh x\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \\ y' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\ y' = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \sinh x\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \\ y' = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \\ y' = \frac{1}{1-x^2}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \\ y' = \frac{1}{1-x^2}\end{array}}$$

Maximum, Minimum, Optimum

Relative und absolute Extremwerte

$f: [-1; 2] \rightarrow R$
$f: x \rightarrow y = f(x) = x^2$ Zeichnung

Gesucht ist das globale Maximum und das globale Minimum von f(x). Es ist f(-1) = 1 und f(2) = 4. Bei der Berechnung der relativen Extrema erhält man:

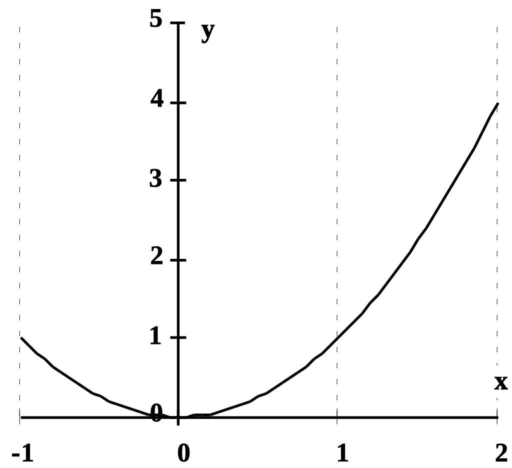
$f'(x) = 2x$ $\quad f'(x) = 2x = 0$

$x = 0, f(0) = 0$

$f''(x) = 2 > 0$ Minimum

Die Funktion f hat bei x = 2 ein globales Maximum und bei x = 0 ein globales Minimum.

Das Beispiel zeigt die Problematik von globalen und lokalen (relativen) Extremwerten auf.



Extremwerte mit Nebenbedingungen

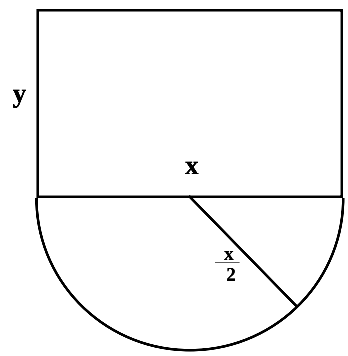
In der Praxis kommen oft Funktionen vor, welche von mehreren Variablen abhängig sind. Allerdings sind diese Variablen oft voneinander abhängig, sodass man durch ein System von Gleichungen (Nebenbedingungen) die gegebene Funktion auf eine Funktion von einer Variablen zurückführen kann. An einem Beispiel soll ein solches Problem erläutert werden.

Beispiel 1:

Ein oben offener Abwasserkanal hat folgenden Querschnitt: Auf einen Halbkreis ist ein Rechteck aufgesetzt (siehe Zeichnung). Bei gegebenem Querschnitt A = 1 m^2 soll die Oberfläche der Wandverkleidung minimiert werden.

Als Mass für die Oberfläche der Wandverkleidung des Kanals kann die Summe von der Bogenlänge des Halbkreises und den beiden nach oben laufenden Streckenstücken genommen werden. Diese Gesamtlänge, die ja dann minimiert werden soll, wird als Funktion von der Breite x und der Höhe y des Rechtecks angesetzt (Ziefunktion)

Gesamtlänge $G = 2y + \frac{1}{2} x\pi$ (Zielfunktion)



Hier kann eine Nebenbedingung aufgestellt werden, denn es ist ja der Querschnitt des Kanals gegeben.

$A = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\pi + xy$ (Nebenbedingung)

Um die Zielfunktion als Funktion von einer Variablen darzustellen, wird die Nebenbedingung umgeformt. Es ist einfach, diese Gleichung auf y zu lösen und das y in der Zielfunktion zu eliminieren.

$A = \frac{x^2\pi}{8} + xy$

$y = \frac{A}{x} - \frac{x\pi}{8}$

$G = 2\left(\frac{A}{x} - \frac{x\pi}{8}\right) + \frac{1}{2} x\pi = \frac{2A}{x} + \frac{x\pi}{4} = \frac{8A + x^2\pi}{4x}$

Wie bekannt ist, bleibt ein konstanter Faktor beim Ableiten erhalten. Deshalb kann man eine Vereinfachungsregel formulieren.

Bei der Extremwertberechnung kann ein positiver konstanter Faktor gestrichen werden.

Die neue Zielfunktion heisst z.B. Φ

$$\Phi = \frac{8A + x^2\pi}{x}$$
$$\Phi' = \frac{-8A + \pi x^2}{x^2}$$
$$\Phi'' = \frac{16A}{x^3}$$

$\Phi' = 0 \quad -8A + \pi x^2 = 0$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{8A}{\pi}}$$

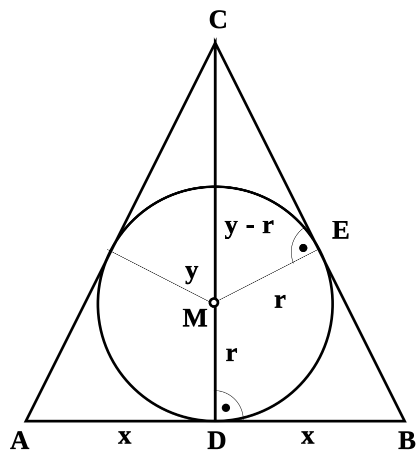
Für A = 1 m² erhält man also: x = ±1.6

Der negative Wert ergibt beim gegebenen Problem keinen Sinn. Den positiven Wert kann man mittels 2. Ableitung auf das Minimum überprüfen.

$\Phi'' = \frac{16A}{x^3} > 0$ **für** $x > 0$ **Minimum**

Beispiel 2:

Einem Kreis mit dem Radius r soll das gleichschenkelige Dreieck mit kleinster Fläche umschrieben werden.



Das Dreieck hat die Basis 2x und die Höhe y. Da die Fläche minimal werden soll, wird die Fläche als Funktion von x und y angesetzt (Zielfunktion):

$F = \frac{1}{2} \bullet 2xy = xy$

Nebenbedingung: Es gibt zwei ähnliche Dreiecke: ΔDBC ~ ΔEMC

$x : \sqrt{x^2 + y^2} = r : (y - r)$

Mit dieser Gleichung kann eine Variable in der Zielfunktion durch die andere ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} x(y - r) &= r\sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2(y - r)^2 &= r^2(x^2 + y^2) \\ x^2y^2 - 2x^2yr + x^2r^2 &= x^2r^2 + y^2r^2 \\ x^2y^2 - 2x^2yr &= y^2r^2 \\ x^2y - 2x^2r &= yr^2 \\ x^2 &= \frac{yr^2}{y - 2r} \\ x &= r\sqrt{\frac{y}{y - 2r}} \end{aligned}$$

$F = xy = yr\sqrt{\frac{y}{y - 2r}}$

Hier liegt jetzt eine Wurzelfunktion zur weiteren Behandlung vor. Das Ableiten von Wurzelfunktionen ist zwar möglich, aber doch etwas mühsam. Deshalb fragen wir, ob wir nicht das Quadrat der Flächenfunktion weiter behandeln könnten. Was aber geschieht beim Quadrieren einer Funktion mit den Extremwerten?

$y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$. **Es sei** $f(x) > 0$

$\Phi = y^2 = f^2(x)$

$\Phi' = 2yy' = 2f(x)f'(x)$

$\Phi'' = 2y'^2 + 2yy'' = 2f'^2(x) + 2f(x)f''(x)$

$\Phi' = 0 \qquad 2f(x)f\,'(x) = 0$

Als Lösungen erhalten wir bei f(x) > 0 genau jene Stellen, an denen f '(x) = 0 ist. Φ" wird dann zu 2f(x)f "(x) und hat bei positivem f(x) dasselbe Vorzeichen wie f "(x). Damit aber gibt Φ" genauso gut Auskunft über ein Maximum oder Minimum wie f "(x).

Wir sehen, dass statt der positiven Funktion f(x) auch ihre Quadratfunktion auf Extremwerte untersucht werden kann. Bei Wurzelfunktionen sind, wenn es sich um die positive Wurzel handelt, die oben genannten Bedingungen erfüllt.

Bei der Extremwertberechnung kann die Zielfunktion quadriert werden.

$$F = xy = y\sqrt{\frac{yr^2}{y - 2r}}$$

In unserem Fall quadrieren wir die Zielfunktion. Ferner kann das r^2 als konstanter Faktor gestrichen werden.

$$\Phi = \frac{y^3}{y - 2r}$$

$$\Phi' = \frac{2y^3 - 6y^2r}{(y - 2r)^2}$$

$$\Phi'' = \frac{2y^3 - 12y^2r + 24yr^2}{(y - 2r)^3}$$

$\Phi' = 0 \qquad 2y^3 - 6y^2r = 0 \quad |: y^2 \neq 0$

$y = 3r$

$\Phi''(3r) = \frac{54r^3 - 108r^3 + 72r^3}{r^3} > 0 \qquad$ Minimum

$$x = r\sqrt{\frac{y}{y - 2r}} = r\sqrt{\frac{3r}{r}} = r\sqrt{3}$$

$$F = xy = 3r^2\sqrt{3}$$

Lineare Optimierung

In den vorhergehenden Aufgaben wurden Maximierungs- und Minimierungsaufgaben gelöst, bei denen die Nebenbedingungen durch Gleichungen gegeben waren. Häufig ist dies aber nicht der Fall. Vielmehr sind die Nebenbedingungen durch Ungleichungen gegeben. Somit erhält man eine Zielfunktion für die zu maximierende oder zu minimierende Grösse und ein System von Gleichungen und Ungleichungen für die Nebenbedingungen. Im folgenden wird der Fall behandelt, dass die Zielfunktion und die Nebenbedingungen linear sind. Dieser Fall heisst "Lineare Optimierung".

Die lineare Optimierung spielt meist eine Rolle bei der numerischen Behandlung von wirtschaftlichen Fragestellungen. So geht es oft um das Problem der Gewinnmaximierung unter den gegebenen Bedingungen eines Produktionsbetriebes wie Anzahl Mitarbeiter und Beschränkung der Wochenarbeitszeit oder um die Kostenminimierung bei Sicherung einer bestimmten Qualität.

Beispiel:
In einer Fabrik wird eine Ware in zwei verschiedenen Qualitäten Q_1 und Q_2 hergestellt. Dabei wird jedes Stück nacheinander auf den Maschinen M_1 und M_2 bearbeitet. Die jeweilige Qualität wird durch die entsprechende Bearbeitungszeit auf den beiden Maschinen erreicht. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick:

Bearbeitungszeit/Qualität	Q_1	Q_2
auf M_1	a_1	b_1
auf M_2	a_2	b_2
Stückgewinn	g_1	g_2
hergestellte Menge	x_1	x_2

Es soll jetzt der Gesamtgewinn maximiert werden, wobei aber zu beachten ist, dass die Arbeitszeit pro Woche (s) limitiert ist.

Als Zielfunktion wird der Gesamtgewinn G angesetzt. Er ist:

$$G = g_1x_1 + g_2x_2$$

Die Nebenbedingungen werden einerseits durch die maximale Laufzeit der Maschinen und andererseits durch die Tatsache, dass Stückzahlen nicht negativ sind bestimmt.

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 &\leq s \\ a_2x_1 + b_2x_2 &\leq s \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Für die konkrete Lösung seien nun folgende Zahlenwerte gegeben:
$a_1 = 2$ min $b_1 = 4$ min $g_1 = 4$ Fr.
$a_2 = 6$ min $b_2 = 2$ min $g_2 = 3$ Fr. $s = 2400$ min

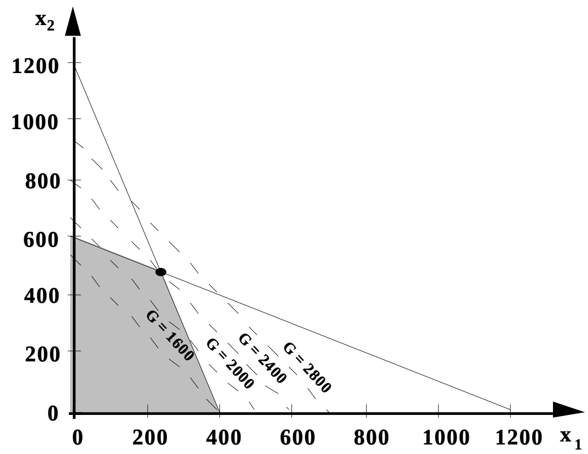
Damit ergeben sich folgende Gleichungen und Ungleichungen:

$$G = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 2400 \\ 6x_1 + 2x_2 &\leq 2400 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Graphische Lösung:

Das Ungleichungssystem der Nebenbedingungen beschreibt in der x_1/x_2-Ebene einen von Geraden begrenzten Bereich. Die Zielfunktion lässt sich für einen festen Wert von G durch eine Gerade darstellen. Für verschiedene Werte von G hat die Gewinngerade dieselbe Steigung. Nur die Achsenabschnitte ändern sich. Nun wird jene Gewinngerade eingezeichnet, welche den Bereich der Nebenbedingungen berührt und für den Gewinn G den grössten Wert ergibt. Gewinngeraden, welche durch den Nebenbedingungsbereich hindurchgehen, lassen verschiedene Kombinationen für die Produktionsmengen zu, Gewinngeraden, welche den Nebenbedingungsbereich nicht schneiden, sind mit nicht realisierbaren Gewinnwerten ausgestattet. Als Lösung kann aus der Zeichnung für $x_1 = 240$, für $x_2 = 480$ und für $G = 2400$ abgelesen werden.



Eine analytische Lösung für dieses Problem ist nicht so einfach. Gerade die Unsicherheit, die in den Ungleichungen steckt, lässt sich nicht so kurz fassen. Das zur Lösung von linearen Optimierungsaufgaben gebräuchliche Rechenverfahren, die *Simplexmethode* wird hier aber nicht behandelt.

Allgemeine Formulierung des Problems für Maximierung:

Zielfunktion $G = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$

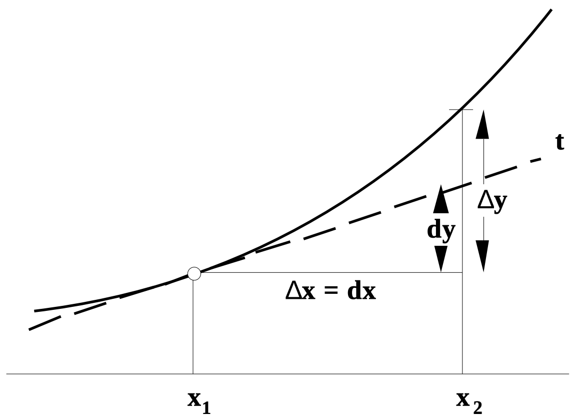
Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Für den Fall der Minimierung der Zielfunktion müssen in den Nebenbedingungen Abschätzungen nach unten (mit ≥ statt ≤) angegeben werden.

Differentiale



Eine Funktion f(x) ist differenzierbar und hat die Ableitung f '(x). Geometrisch bedeutet die 1. Ableitung bekanntlich die Steigung der Tangente. Der Zweck des Differenzierens ist es ja immer gewesen, für ein sehr kleines Stück die Kurve durch ihre Tangente zu ersetzen. Mit der 1. Ableitung kann die Tangentengleichung gebildet werden. Für einen sehr kleinen Fortschritt von x - wir nennen ihn hier dx oder Δx - wird sich das y nicht sehr viel anders verändern, wenn wir die ursprüngliche Funktion oder ihre Tangente im Startpunkt verfolgen. Mit Δy bezeichnen wir die effektive Veränderung des Funktionswertes bei einem Fortschritt um dx, dy soll die Veränderung des y-Wertes an der Tangente messen.

$y = f(x)$
$y' = f\,'(x)$
$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = f\,'(x)$$

$$dy = f\,'(x) \bullet dx$$

Beispiel 1:

$y = x^2,\ x_1 = 2,\ \Delta x = dx = 0{,}01$

$y' = 2x$

$y'(2) = 4$

$\Delta y = (2.01)^2 - 2^2 = 4{,}0401 - 4 = 0{,}0401$

$dy = f\,'(2) \bullet dx = 4 \bullet 0{,}01 = 0{,}04$

Beispiel 2:

$y = \ln x,\ x_1 = 0{,}1,\ \Delta x = dx = 0{,}01$

$y' = \frac{1}{x}$

$y'(0{,}1) = \frac{1}{0{,}1} = 10$

$\Delta y = \ln 0{,}11 - \ln 0{,}1 = 0{,}095310$

$dy = f\,'(0{,}1) \bullet 0{,}01 = 10 \bullet 0{,}01 = 0{,}1$

Bei genügend kleinem Wert von dx = Δx ist der Unterschied zwischen Δy und dy sehr klein. Für praktische Probleme liegt dieser Unterschied meist unterhalb der Genauigkeitsschwelle der Messwerte.

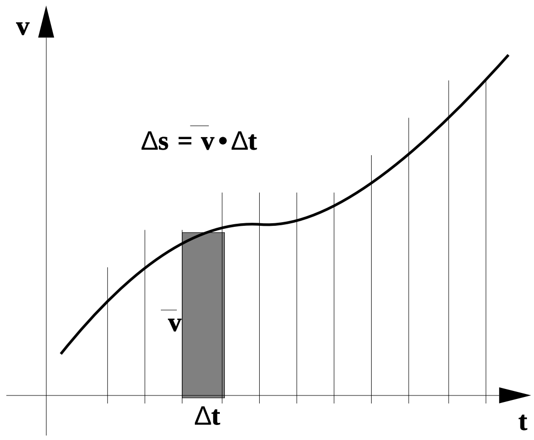
Bestimmtes Integral

Einführung

1. Weg-Zeit-Funktion:

Bei der gleichförmigen Bewegung aber auch bei der gleichmässig beschleunigten Bewegung kann man den in einer Zeitspanne Δt zurückgelegten Weg noch recht einfach berechnen. Bei einer nichtlinearen Geschwindigkeits-Zeit-Funktion gibt es aber Probleme. Die Geschwindigkeit ist ja die Änderung des Weges Δs während einer kleinen Zeitspanne Δt: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Für Δs gilt: $\Delta s = v \cdot \Delta t$

Am besten wird das gesamte Zeitintervall in kleine Spannen Δt zerlegt. Die jeweils in diesen Zeitspannen Δt zurückgelegten Strecken Δs werden summiert. Für eine sehr feine Einteilung erhält man auch sehr viele Summanden und das Ergebnis wird dem genauen Wert für den Weg sehr nahe kommen.



$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i$$

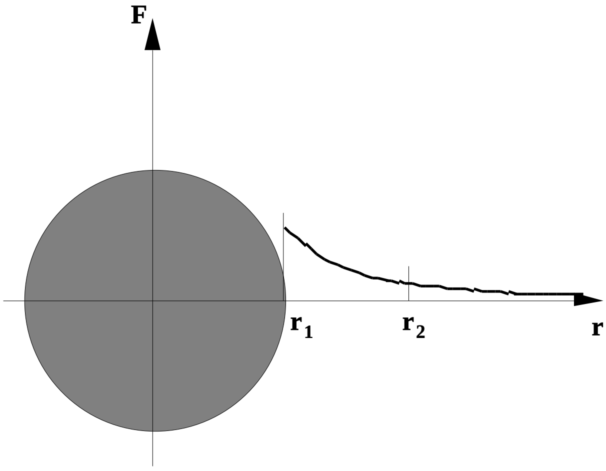
2. Arbeit im Gravitationsfeld:

Bei der Brechnung der Hubarbeit im Gravitationsfeld bei grösserer Hubhöhe kann man die Änderung der Gravitationskraft mit dem Abstand r nicht mehr vernachlässigen: $F(r) = \gamma \frac{mM}{r^2}$

Auch hier kann die Gesamtarbeit W als Summe der einzelnen Arbeitsportionen ΔW berechnet werden. $\Delta W = F(r)\Delta r$

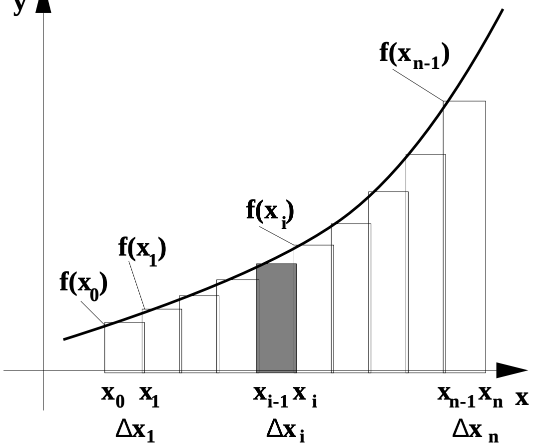
$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F_i(r)\Delta r_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma \frac{mM}{r_i^2} \Delta r_i$$

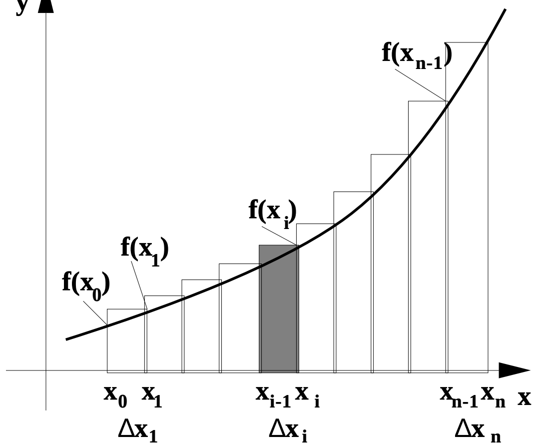
Geometrisch bedeuten diese Summierungen eine Berchnung der Fläche zwischen einer Kurve und der Abszisse im entsprechenden Abszissenabschnitt.



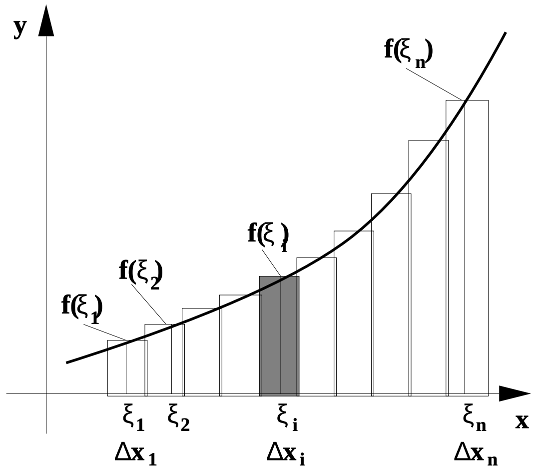
Flächenberechnung und bestimmtes Integral

Gegeben ist eine in einem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige Funktion f(x). Gesucht ist der Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse im Intervall [a, b]. Zunächst sei zudem vorausgesetzt, dass f(x) streng monoton steigend sei und für alle x aus dem Intervall [a, b] $f(x) \geq 0$ gelte.





Die Fläche wird in Streifen mit der Breite Δx_i eingeteilt. Werden jeweils mit den grössten Funktionswerten Rechtecke gebildet, nennt man die Summe der Rechtecksflächen Obersumme O_n. Entsprechend ist die Untersumme U_n die Summe der Rechtecke mit den jeweils kleinsten Funktionswerten in den einzelnen Streifen. Wählt man in jedem Streifen einen beliebigen Funktionswert $f(\xi_i)$ aus, erhält man eine sogenannte Zwischensumme F_n.



Es gilt: $U_n \le F_n \le O_n$

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Nun wird die Einteilung verfeinert, d.h. die Anzahl der Streifen wird vergrössert, wobei aber die Streifen selbst schmäler werden. Durch diese Verfeinerung werden Obersumme, Untersumme und Zwischensumme einen besseren Näherungswert für die gesuchte Fläche geben als zuvor. Bildet man den Grenzwert mit $n \to \infty$, wobei aber die Breite aller Streifen Δx_i nach Null gehen soll, erhalten wir einen genauen Wert für die gesuchte Fläche. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Wir werden jetzt die oben getroffenen Einschränkungen was das Vorzeichen von f(x) und die Monotonie betrifft fallen lassen. Es sei also f(x) eine in einem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige Funktion. Es wird eine Einteilung in n Streifen mit der Breite Δx_i vorgenommen. In jedem Streifen wird ein x-Wert ξ_i ausgewählt. Der Funktionswert an der Stelle ξ_i ist dann $f(\xi_i)$. Die n-te Zwischensumme F_n ist somit:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Existiert der Grenzwert mit n nach ∞ und Δx_i nach Null, so ist dieser Grenzwert das 'Integral der Funktion f(x) in den Grenzen von a bis b'.

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

f(x) heisst Integrand, das Intervall von a bis b ist der Integrationsweg, a und b heissen Integrationsgrenzen und x ist die Integrationsvariable.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt = \dots$$

Das bestimmte Integral wird ganz allgemein als Grenzwert einer Produktsumme definiert. Für bestimmte Eigenschaften von f(x) (siehe oben) kann das Integral zur Berechnung von Flächen verwendet werden. In der Physik werden aber auch andere Grössen als Integral definiert.

Für die beiden Beispiele zur Einführung erhalten wir jetzt:

Weg-Zeit-Funktion:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v_i\Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Arbeit im Gravitationsfeld:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F_i(r)\Delta r_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma \frac{mM}{r_i^2}\Delta r_i = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2}\,dr$$

Integrationsregeln

Konstanter Faktor: $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$

Summe und Differenz: $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Zerlegung des Integrationsintervalls: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Vorzeichen des Integrals:

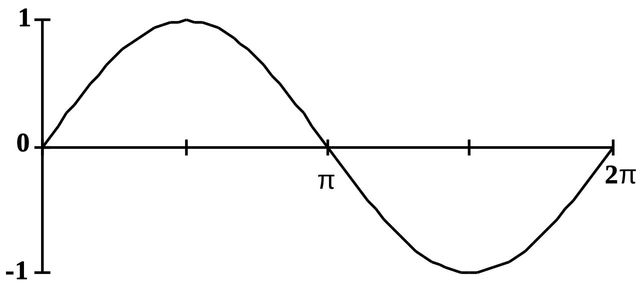
$a < b$	$f(x) > 0$	$I > 0$
$a < b$	$f(x) < 0$	$I < 0$
$a > b$	$f(x) > 0$	$I < 0$, weil alle $\Delta x_i < 0$ sind
$a > b$	$f(x) < 0$	$I > 0$

Vertauschen der Grenzen: $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Begründung für diese Regeln: Das Integral ist als Grenzwert definiert worden. Für Grenzwerte gelten bestimmte Rechenregeln, auf die hier verwiesen wird.

Beispiel:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = 0$$



Wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, haben die beiden Teilflächen dieselbe Grösse. Die beiden Teilintegrale haben aber unterschiedliches Vorzeichen, sodass das Gesamtintegral Null wird.

Achtung: Bei Flächenberechnungen darf nicht über Nullstellen wegintegriert werden.

Das unbestimmte Integral

$\int_a^b f(x)dx$ ist das bestimmte Integral einer Funktion f(x) in den Grenzen a bis b. Der Wert dieses Integrals hängt von der Grösse der Grenzen a und b ab. Wir werden jetzt eine Grenze variieren lassen. Der Wert des Integrals hängt dann von dieser variablen Grenze ab, er ist eine Funktion dieser Grenze.

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ — $\Phi(x)$ ist ein unbestimmtes Integral der Funktion f.

$\Psi(x) = \int_d^x f(t)dt$ — $\Psi(x)$ ist ein anderes unbestimmtes Integral der Funktion f.

Wenn die untere Grenze variabel ist, sind die Verhältnisse gleich.

> **Satz:** Zwei unbestimmte Integrale derselben Funktion f unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summand.

Beweis:

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_d^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{\alpha} f(t)dt) = \int_a^{\alpha} f(t)dt = C = \text{konstant}$$

Es sei $F(x) = \Phi(x) + C$. Die Funktion F(x) ist ein unbestimmtes Integral. Lässt man C durch alle reelle Zahlen laufen, erhält man alle unbestimmten Integrale zur Integrandfunktion f. Wir definieren allgemein das unbestimmte Integral:

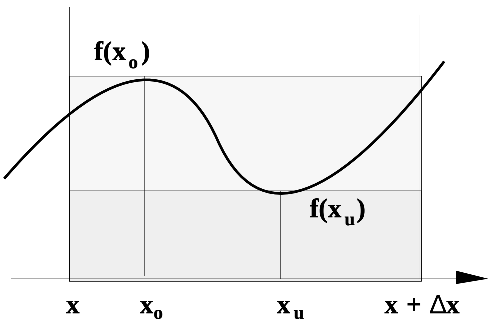
$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C}$$

Kernsatz der Differential und Integralrechnung

Es sei f(x) eine stetige Funktion und F(x) die Integralfunktion $F(x) = \int f(x)dx$.

> **Satz:** Die 1. Ableitung der Integralfunktion F(x) ist gleich ihrer Integrandfunktion f(x).
> oder:
> Das Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens.

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt\right) = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$



x_u sei jene Stelle, an der der Funktionswert am kleinsten im Intervall $(x, x + \Delta x)$ ist, x_o ist die Stelle mit dem grössten Funktionswert.

Für $\Delta x > 0$ und $f(x) \geq 0$ gilt:

$$f(x_u)\Delta x \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leq f(x_o)\Delta x \qquad | :\Delta x$$

$$f(x_u) \leq \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leq f(x_o)$$

$\Delta x \to 0$: $f(x_u) \to f(x)$, $\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \to f(x)$, $f(x_o) \to f(x)$

Für $\Delta x < 0$ und $f(x) \leq 0$ kann die Überlegung, die zum Grenzwert führt, analog gemacht werden.

Die 1. Ableitung der Funktion F(x) ist dann $F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(x)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Stammfunktion

Die Integralfunktion $F(x) = \int f(x)dx$ heisst Stammfunktion der Funktion $f(x)$, weil gilt: $F'(x) = f(x)$.

Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integral

$$F(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$$

$$F(a) = \Phi(a) + C = \int_a^a f(t)dt + C = C$$

$$F(b) = \Phi(b) + C = \int_a^b f(t)dt + C = \int_a^b f(t)dt + F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Das bestimmte Integral kann berechnet werden, indem man zuerst die Stammfunktion zur Integrandfunktion bestimmt und die Differenz aus den Werten der Stammfunktion nach Einsetzen der oberen und unteren Integrationsgrenzen bildet. Regeln für die planmässige Suche nach den Stammfunktionen können aus den Ableitungsregeln gewonnen werden.

Grundintegrale

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{für } n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$$

Aus den Ableitungsregeln können weitere Integralformeln entnommen werden.

Integrationsmethoden

In vielen Fällen treten keine sogenannten Grundintegrale auf, welche direkt durch Anwendung der Ableitungsregeln gelöst werden könnten. Deshalb wurden Methoden zur Lösung weiterer Integrale entwickelt. Die Substitutionsmethode arbeitet mit der Verschachtelung von Funktionen und ist mit der Kettenregel beim Differenzieren verwandt. Die Partielle Integration beruht auf der Produktregel des Differenzierens und ist deshalb auch für Integranden, die in Produktform vorliegen, geeignet. Mit der Partialbruchzerlegung werden gebrochen rationale Funktionen in integrierbare Teilfunktionen zerlegt.

Substitution

$\int f(x)\,dx$ **Es sei $x = g(u)$. Die Funktion g soll bijektiv und differenzierbar sein ($u = g^{-1}(x)$).**

$dx = g'(u)du$

$\int f(x)\,dx = \int f(g(u))g'(u)du$

Es kann nun sein, dass das neue Integral einfacher zu berechnen ist.

Beispiele:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+u}{u} \cdot 2u\,du = 2\int (1+u)du = 2\left(u + \frac{u^2}{2}\right) + C = 2\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2}\right) + C$$

$u = \sqrt{x}$ $\quad x = u^2$

$dx = 2u\,du$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{(-du)}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

$u = \cos x$ $\quad x = \arccos u$

$du = -\sin x\,dx$ $\quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

$$\int \frac{2x}{(x^2-3)^5}\,dx = \int \frac{du}{u^5} = \int u^{-5}\,du = \frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{(x^2-3)^{-4}}{-4} + C$$

$u = x^2 - 3$

$du = 2x\,dx$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C$$

$u = g(x)$

$du = g'(x)\,dx$

$$\int g(x)\,g'(x)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}[g(x)]^2 + C$$

$u = g(x)$

$du = g'(x)\,dx$

Partielle Integration

Die Produktregel beim Differenzieren heisst $(uv)' = u'v + uv'$. Aus dieser Regel kann man eine Formel zum Umformen von Integralen entwickeln. Es wird einfach die Produktregel integriert:

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Die Formel für die partielle Integration eignet sich gut für die Integration von Produktfunktionen.

Hinweis: Es soll jener Faktor, der leicht abzuleiten ist, als u und jener, der leicht zu integrieren ist, als dv gewählt werden.

Beispiele:

$\int x \sin x\, dx = x \cdot (-\cos x) - \int(-\cos x)\, dx = -x \cos x + \sin x + C$

$u = x \qquad dv = \sin x\, dx$

$du = dx \qquad v = \int \sin x\, dx = -\cos x$

$\int \ln x\, dx = (\ln x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \int dx = x$

Partialbruchzerlegung

Mit dieser Methode können echt gebrochene rationale Funktionen integriert werden. Liegt eine unecht gebrochene rationale Funktion vor, kann sie durch Polynomdivision in eine ganz rationale Funktion und eine echt gebrochene rationale Funktion zerlegt werden.

$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$

h(x) ist ganz rational und der Grad von r(x) ist kleiner als der Grad von g(x)

Mit der Partialbruchzerlegung wird eine echt gebrochene rationale Funktion in eine Summe von integrierbaren Brüchen zerlegt. Die Integration verläuft in drei Schritten:

1. **Nullstellen des Nenners bestimmen**
2. **Koeffizienten der Partialbrüche berechnen**
3. **Partialbrüche integrieren**

Je nach Art der Nullstellen des Nenners gibt es verschiedene Arten von Partialbrüchen. Es sind dabei vier Fälle zu unterscheiden.

a) **Es gibt nur verschiedene reelle Nullstellen:**

$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{C_1}{x - x_1} + \frac{C_2}{x - x_2} + \dots + \frac{C_n}{x - x_n}$

Beispiel:

$\frac{6x^2 - 26x + 8}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$

Die Nullstellen von $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)$ sind $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 3$.

$\frac{6x^2 - 26x + 8}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} = \frac{A(x+1)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+1)}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{(A + B + C)x^2 + (-2A - 4B)x + (-3A + 3B - C)}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$

Durch Koeffizientenvergleich können die Werte für A, B und C bestimmt werden.

x^2: $\quad 6 = A + B + C$

x^1: $\quad -26 = -2A - 4B$

x^0: $\quad 8 = -3A + 3B - C$

$A = 3,\ B = 5,\ C = -2$

$\int \frac{6x^2 - 26x + 8}{x^3 - 3x^2 - x + 3}\, dx = \int \frac{3}{x-1}\, dx + \int \frac{5}{x+1}\, dx + \int \frac{-2}{x-3}\, dx = 3 \ln|x - 1| + 5 \ln|x + 1| - 2 \ln|x - 3| + D$

b) **Es gibt mehrfache zusammenfallende reelle Nullstellen**
Es sei x_1 eine mehrfache Nullstelle des Nenners (i-fach). Für die einfachen Nullstellen wird der Ansatz für die Partialbrüche wie oben vorgenommen. Für die i-fache Nullstelle x_1 wird folgender Ansatz für Partialbrüche gemacht:

$\frac{D_1}{x - x_1} + \frac{D_2}{(x - x_1)^2} + \frac{D_3}{(x - x_1)^3} + \dots + \frac{D_i}{(x - x_1)^i}$

Beispiel:

$\frac{x^2}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}$

Die Nullstellen von $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = (x - 3)^2(x + 2)$ sind $x_1 = 3$ und $x_2 = -2$, wobei x_1 eine doppelte Nullstelle ist.

$$\frac{x^2}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{(x - 3)^2} + \frac{C}{x + 2} = \frac{(A + C)x^2 + (-A + B - 6C)x + (-6A + 2B + 9C)}{(x - 3)^2(x + 2)}$$

Koeffizientenvergleich:

x^2: $1 = A + C$
x^1: $0 = -A + B - 6C$
x^0: $0 = -6A + 2B + 9C$

$A = \frac{21}{25}$, $B = \frac{9}{5}$, $C = \frac{4}{25}$

$$\int \frac{x^2}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}\, dx = \int \frac{21}{25(x - 3)}\, dx + \int \frac{9}{5(x - 3)^2}\, dx + \int \frac{4}{25(x + 2)}\, dx = \frac{21 \ln|x - 3|}{25} + \frac{-9}{5(x - 3)} + \frac{4 \ln|x + 2|}{25} + D$$

c) **Es gibt verschiedene komplexe Nullstellen**
Hierbei wird nur bis zum jeweiligen quadratischen Term zerlegt und damit ein Ansatz gemacht.

Beispiel:

$$\frac{7x^2 - 19x + 30}{x^3 - 6x^2 + 10x}$$

Der Nenner kann zerlegt werden in: $x^3 - 6x^2 + 10x = x(x^2 - 6x + 10)$.
Somit wird folgender Ansatz gemacht:

$$\frac{7x^2 - 19x + 30}{x^3 - 6x^2 + 10x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 6x + 10} = \frac{(A + B)x^2 + (-6A + C)x + 10A}{x^3 - 6x^2 + 10x}$$

Koeffizientenvergleich:
x^2: $7 = A + B$
x^1: $-19 = -6A + C$
x^0: $30 = 10A$

$A = 3$, $B = 4$, $C = -1$

$$\int \frac{7x^2 - 19x + 30}{x^3 - 6x^2 + 10x}\, dx = \int \frac{3}{x}\, dx + \int \frac{4x - 1}{x^2 - 6x + 10}\, dx = 3 \ln |x| + 2 \ln|x^2 - 6x + 10| + 11 \arctan(x - 3) + D$$

d) **Es gibt mehrfache zusammenfallende komplexe Nullstellen**
Für diesen Fall, der recht selten vorkommt, wird auf einschlägige Formelsammlungen und Integraltafeln verwiesen.

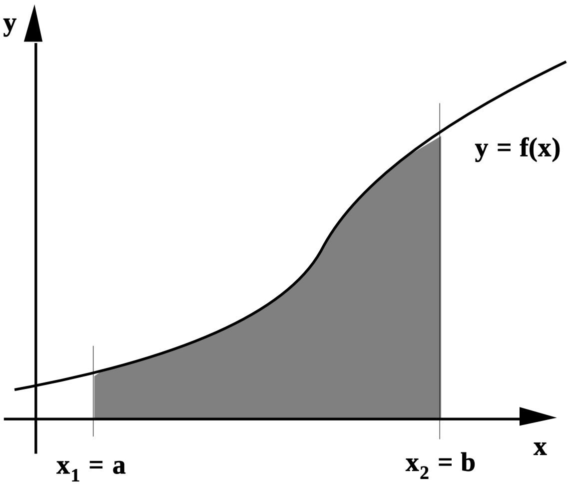
Integrieren mit Integrationstafeln und mit Mathematikprogrammen

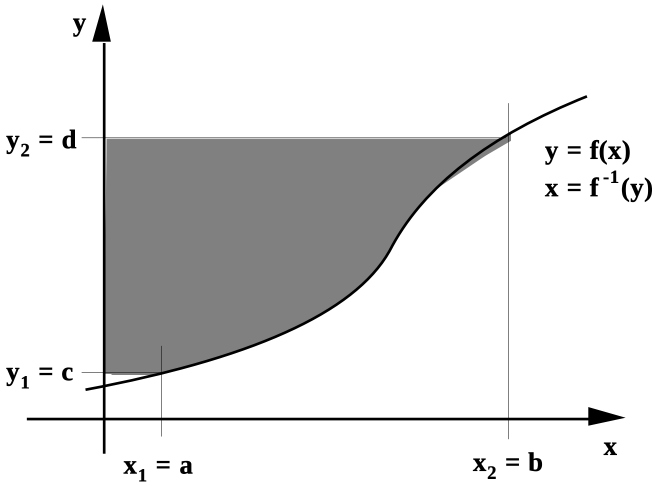
Viele Formelsammlungen bieten Integrationstafeln an. Dort sind z.B. geeignete Substitutionen für eine grosse Zahl von Fällen zu finden. Ebenfalls kann man spezielle Integrale nachschlagen, welche in diesem Lehrgang nicht behandelt werden.

Mathematikprogramme wie Maple V und Mathematica können unbestimmte und auch bestimmte Integrale im allgemeinen recht zuverlässig berechnen. In besonderen Fällen sollte man sich jedoch der Integrationsmethode der Programme bewusst sein, damit eventuell fehlerhafte Lösungen ausgeschieden werden können.

Anwendung der Integralrechnung in Naturwissenschaft und Technik

Flächenberechnung

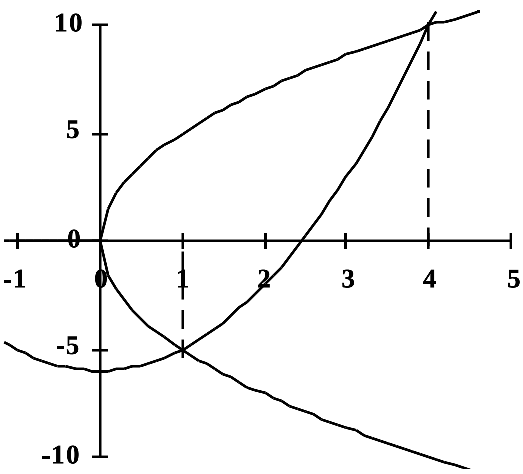




$$F_x = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$F_y = \int_c^d f^{-1}(y)\,dy = \int_c^d x\,dy = \int_a^b x\,f'(x)\,dx$$

Beispiel:
$y = x^2 - 6$
$y^2 = 25x$
Zu berechnen ist die von beiden Kurven eingeschlossene Fläche.



Schnittpunkte: A(1/-5), B(4/10)

$$F = \int_0^1 5\sqrt{x}\,dx + \int_0^4 5\sqrt{x}\,dx - \int_1^4 (x^2 - 6)dx =$$

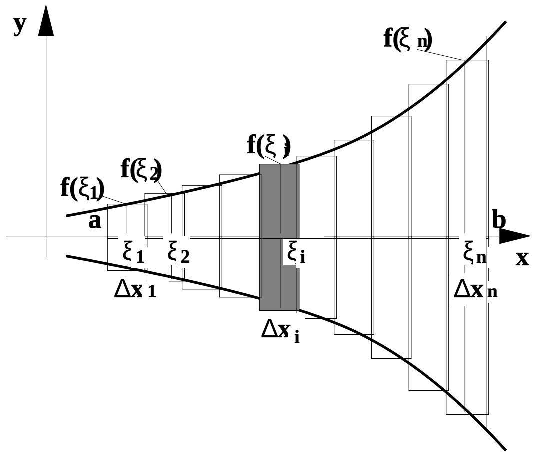
$$= 5\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + 5\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3} - 6x\right]_1^4 =$$

$$= \left[5 \cdot \frac{2}{3}\,x\sqrt{x}\right]_0^1 + \left[5 \cdot \frac{2}{3}\,x\sqrt{x}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3} - 6x\right]_1^4 =$$

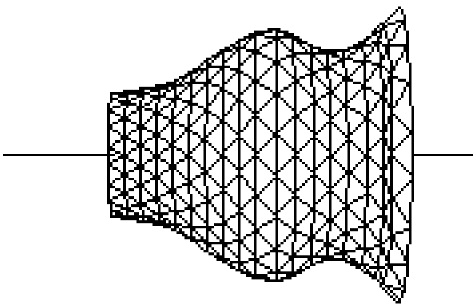
$$= \frac{10}{3} + \frac{80}{3} - \left(\frac{64}{3} - 24 - \frac{1}{3} + 6\right) = 30 - 3 = 27$$

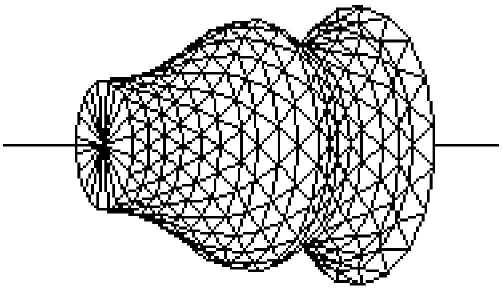
Volumen von Rotationskörpern

Gegeben ist eine in einem Intervall [a, b] stetige Funktion y = f(x). Der Graph der Funktion soll um die x-Achse rotieren. Dabei beschreibt er die Hülle eines Rotationskörpers, dessen Volumen folgendermassen berechnet werden kann: Der Rotationskörper wird durch zylindrische Scheiben aproximiert. Der Grenzwert der Summe der zylindrischen Scheiben ist gleich dem Volumen des Drehkörpers.



$$V_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\,[f(\xi_i)]^2 \Delta x_i = \pi \int_{x1=a}^{x2=b} y^2\, dx$$



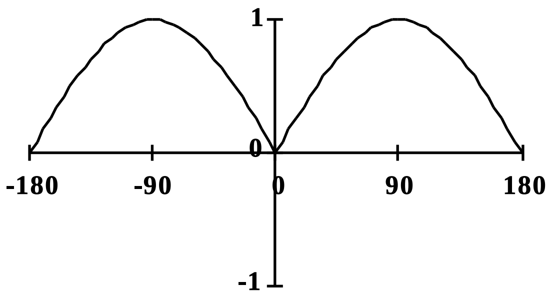


Rotation um die y-Achse: $V_y = \pi \int_{y1=a}^{y2=d} x^2\, dy$

Beispiel:

Es soll das Volumen des Drehkörpers berechnet werden, der entsteht, wenn man die Sinuskurve in den Grenzen $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi$ um die y-Achse dreht.

Bei diesem Beispiel muss die Sinuskurve in zwei Teile zerlegt werden, nämlich $y_1 = \sin x$ für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ und $y_2 = \sin x$ für $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$. In diesen beiden Intervallen kann jeweils die Umkehrfunktion gebildet werden: x = arcsin y. Wird der innere Drehkörper vom äusseren subtrahiert, kommt man zum gesuchten Volumen. Es gibt aber auch eine andere Methode, und zwar kann von der Integrationsvariablen y auf x transformiert werden. Es ist y = sin x und damit dy = cos x dx. Das Volumen wird jetzt folgendermassen berechnet:



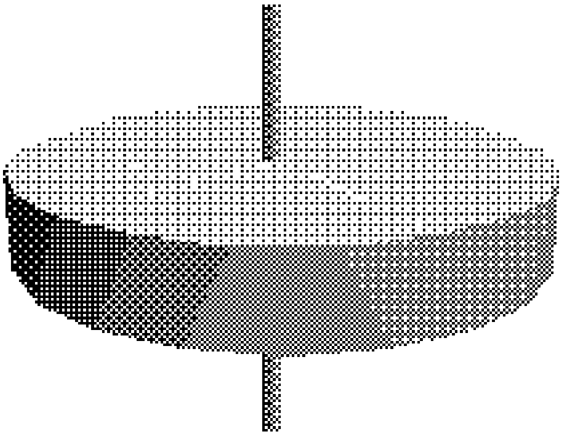
$$V = \pi \int_{\pi}^{0} x^2 \cos x\, dx = \pi\left[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x\right]_{\pi}^{0} = 19.7$$

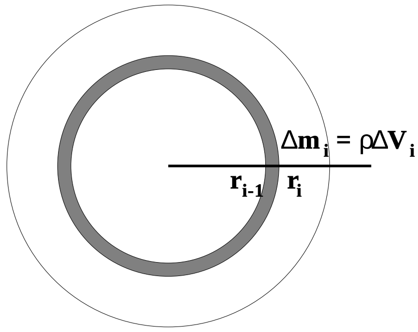
Die Wahl der Grenzen (es handelt sich um Grenzen für x) kommt daher, dass eben das y von 0 bis 1 bei den beiden Teilfunktionen gewesen ist. Wird die Funktion y_2 von 0 bis 1 integriert, so entspricht dies x-Grenzen von π bis $\frac{\pi}{2}$. Weil der innere Drehkörper subtrahiert wird, kann man die Grenzen vertauschen, was schliesslich zu einem Weiterintegrieren von $\frac{\pi}{2}$ bis 0 führt.

Trägheitsmomente

Beispiele:

1) Eine zylindrische Scheibe mit dem Radius R und der Dicke h rotiert um eine Achse (siehe Abbildung). Es soll das Trägheitsmoment J der Scheibe bezüglich der angegebenen Rotationsachse berechnet werden.





Wir betrachten einen Kreisring mit den Radien r_{i-1} und r_i.

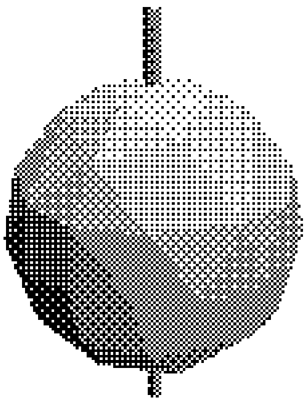
$\Delta m_i = \rho\Delta V_i = \rho(r_i^2\pi - r_{i-1}^2\pi)h = \rho\pi h(r_i^2 - r_{i-1}^2) = \rho\pi h(r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1})$

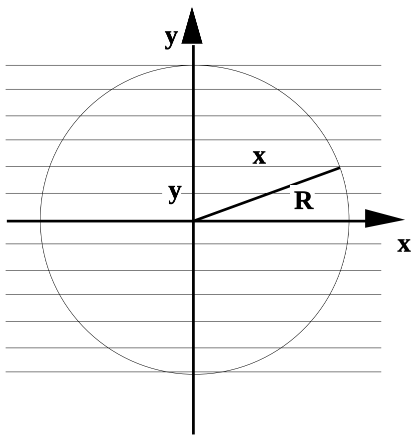
Das Trägheitsmoment J ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i}^{n} r_i^2 \Delta m_i$.

Für $n \to \infty$ **gilt:** $r_i - r_{i-1} \to dr$ **und** $r_i + r_{i-1} \to 2r$

$J = \rho\pi h\int_0^R r^2 \cdot 2r\, dr = 2\rho\pi h\int_0^R r^3\, dr = 2\rho\pi h\, \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} R^2\rho \cdot R^2\pi h = \frac{1}{2} R^2\rho V = \frac{1}{2} R^2 m$

2) Eine Kugel mit dem Radius r rotiert um eine Achse durch das Zentrum. Zu berechnen ist das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich dieser Achse.



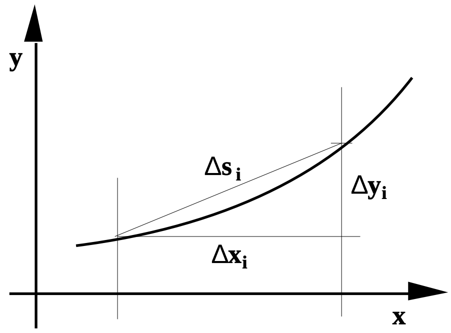


Dazu wird die Kugel in zylindrische Scheiben mit der Höhe dy zerlegt.
Für das Trägheitsmoment einer Scheibe gilt: $dJ = \frac{1}{2} x^2 dm = \frac{1}{2} x^2 \cdot \rho x^2\pi dy = \frac{1}{2} \rho\pi x^4 dy =$
$= \frac{1}{2} \rho\pi(R^2 - y^2)^2\, dy = \frac{1}{2} \rho\pi(R^4 - 2R^2y^2 + y^4)\, dy$

$J \;\; = \int dJ = \frac{1}{2} \rho\pi\int_{-R}^{R}(R^4 - 2R^2y^2 + y^4)\, dy = \frac{1}{2} \rho\pi \left[R^4y - 2R^2\frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_{-R}^{R} = \frac{8}{15} \rho\pi R^5 = \frac{2}{5} \cdot R^2 \cdot \rho\, \frac{4R^3\pi}{3} =$

$= \frac{2}{5} R^2 \cdot \rho V = \frac{2}{5} R^2 m$

Bogenlänge einer Kurve

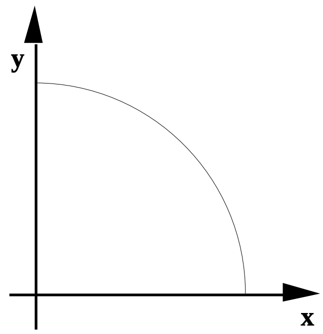


$$\Delta s_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 = \left(1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}\right)\Delta x_i^2$$

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ dx$$

Beispiel:

Wie gross ist die Länge des Viertelkreisbogens?



$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ **und** $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\ dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\ dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\ dx = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \Big[r \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\Big]_0^r = r\,\frac{\pi}{2}$$

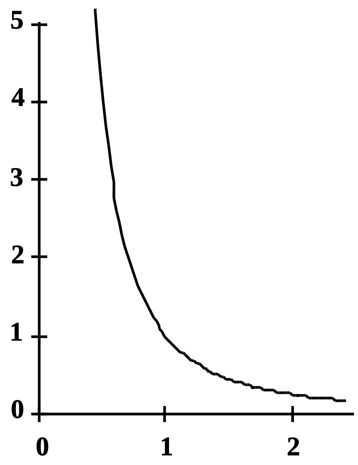
Uneigentliche Integrale

Existiert ein bestimmtes Integral, obwohl entweder der Integrand an einer der Grenzen eine Unendlichkeitsstelle (Pol) hat, oder eine der beiden Integrationsgrenzen beliebig wächst, so handelt es sich um ein uneigentliches Integral.

Beispiele:

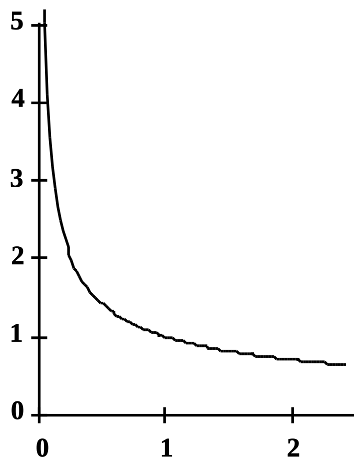
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{-b} - \frac{1}{-1}\right) = 1$$



$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to 0} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0} \left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2$$



Interpolation

Interpolation mit Polynomen

Von einer Kurve seien mehrere Punkte gegeben: (x_0/ y_0), (x_1/ y_1), (x_2/ y_2), …, (x_n/ y_n). Gesucht ist der Funktionswert y(x) an einer beliebigen Stelle x zwischen den Stützpunkten.

Für die Interpolation wird meist eine Polynomfunktion verwendet. Durch die (n+1) Stützpunkte kann eine Polynomfunktion n-ten Grades gelegt werden:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Durch die (n+1) Punkte sind (n+1) Bedingungen für die unbekannten Koeffizienten a_n, a_{n-1}, …, a_0 gegeben. Man erhält folgendes Gleichungssystem mit (n+1) Gleichungen und (n+1) Unbekannten:

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0\\
y_1 &= a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0\\
&\ldots\\
y_n &= a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_1 x_n + a_0
\end{aligned}$$

Kubische Spline-Funktionen

Interpolation mit Polynomen bei vielen Stützstellen hat den Nachteil, dass dazu Polynome von hohem Grad benötigt werden. Solche Polynome haben aber entsprechend viele relative Extremwerte und sind deshalb recht wellig. Meist braucht man aber eine glatte Kurve. In der Konstruktionspraxis verwendet man dazu eine lange biegsame Latte (Straklatte, spline), die durch die einzelnen Punkte gelegt wird. Dabei treten an den einzelnen Punkten lineare Biegemomente $M_i(x)$ auf, d.h. diese Biegemomente sind als lineare Funktion von x darstellbar. Durch zweimalige Integration der Biegemomente erhält man die Biegelinie, welche in diesem Fall dann eine Polynomfunktion 3. Grades ist.

Will man das Strakverfahren numerisch verwenden, kann man je zwischen zwei Stützpunkten eine Polynomfunktion 3. Grades ansetzen. An den Stützpunkten müssen die aufeinanderfolgenden Kurven gleiche Steigung (1. Ableitung) und gleiche Krümmung (2. Ableitung) haben. An den Enden der Straklatte ist die Krümmung jeweils gleich Null.

Im i-ten Intervall wird die Polynomfunktion $P_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ $(x_{i-1} \le x \le x_i)$ angesetzt. Für die Ableitungen erhält man dann:
$P_i'(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$
$P_i''(x) = 6a_i x + 2b_i$

Die gesuchte Spline-Funktion F(x) hat bei n Intervallen und mit n+1 Stützstellen folgende Form:

$$F(x) = \begin{cases}
P_1(x) & \text{für } x_0 \le x \le x_1\\
P_2(x) & \text{für } x_1 \le x \le x_2\\
\ldots & \ldots\\
P_i(x) & \text{für } x_{i-1} \le x \le x_i\\
\ldots & \ldots\\
P_n(x) & \text{für } x_{n-1} \le x \le x_n
\end{cases}$$

Dabei gilt an den Stützstellen:

$$\begin{aligned}
F(x_{i-1}) &= P_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\\
F(x_i) &= P_i(x_i) = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}$$

Ferner lauten die Übergangsbedingungen für die Steigung und die Krümmung:

$$\begin{aligned}
P_{i-1}'(x_{i-1}) &= P_i'(x_{i-1}) \qquad (i = 2, \ldots, n)\\
P_{i-1}''(x_{i-1}) &= P_i''(x_{i-1}) \qquad (i = 2, \ldots, n)
\end{aligned}$$

und die Krümmungsbedingungen an den beiden Enden:

$$\begin{aligned}
P_1''(x_0) &= 0\\
P_n''(x_n) &= 0
\end{aligned}$$

Jedes der n Teilpolynome hat 4 unbekannte Koeffizienten. Zählen wir die Anzahl der Bedingungen ab, so ergibt sich folgender Wert:

n+1 Stützpunkte
3(n-1) Übergangsbedingungen
2 Randbedingungen

Zusammen ergibt dies (n+1) + 3n - 3 + 2 = 4n Bedingungen und damit 4n Gleichungen.

Beispiel:

Es sind die folgenden Stützpunkte gegeben: (1,5/5), (2,5/1,3), (4,3/6,3), (5,1/4,2)
Gesucht ist die Spline-Funktion F(x) durch die gegebenen Stützpunkte.

$$5 = 1{,}5^3a_1 + 1{,}5^2b_1 + 1{,}5c_1 + d_1$$
$$1{,}3 = 2{,}5^3a_2 + 2{,}5^2b_2 + 2{,}5c_2 + d_2$$
$$6{,}3 = 4{,}3^3a_3 + 4{,}3^2b_3 + 4{,}3c_3 + d_3$$

$$1{,}3 = 2{,}5^3a_1 + 2{,}5^2b_1 + 2{,}5c_1 + d_1$$
$$6{,}3 = 4{,}3^3a_2 + 4{,}3^2b_2 + 4{,}3c_2 + d_2$$
$$4{,}2 = 5{,}1^3a_3 + 5{,}1^2b_3 + 5{,}1c_3 + d_3$$

$$3\bullet 2{,}5^2a_1 + 2\bullet 2{,}5b_1 + c_1 = 3\bullet 2{,}5^2\,a_2 + 2\bullet 2{,}5b_2 + c_2$$
$$3\bullet 4{,}3^2a_2 + 2\bullet 4{,}3b_2 + c_2 = 3\bullet 4{,}3^2a_3 + 2\bullet 4{,}3b_3 + c_3$$

$$6\bullet 2{,}5a_1 + 2b_1 = 6\bullet 2{,}5a_2 + 2b_2$$
$$6\bullet 4{,}3a_2 + 2b_2 = 6\bullet 4{,}3a_3 + 2b_3$$

$$6\bullet 1{,}5a_1 + 2b_1 = 0$$
$$6\bullet 5{,}1a_3 + 2b_3 = 0$$

Berechnung mit MatLab:
Variablenfolge: a_1 b_1 c_1 d_1 a_2 b_2 c_2 d_2 a_3 b_3 c_3 d_3

```
A1=[1.5^3,1.5^2,1.5,1,0,0,0,0,0,0,0,0];
A2=[0,0,0,0,2.5^3,2.5^2,2.5,1,0,0,0,0];
A3=[0,0,0,0,0,0,0,0,4.3^3,4.3^2,4.3,1];
A4=[2.5^3,2.5^2,2.5,1,0,0,0,0,0,0,0,0];
A5=[0,0,0,0,4.3^3,4.3^2,4.3,1,0,0,0,0];
A6=[0,0,0,0,0,0,0,0,5.1^3,5.1^2,5.1,1];
A7=[3*2.5^2,2*2.5,1,0,-3*2.5^2,-2*2.5,-1,0,0,0,0,0];
A8=[0,0,0,0,3*4.3^2,2*4.3,1,0,-3*4.3^2,-2*4.3,-1,0];
A9=[6*2.5,2,0,0,-6*2.5,-2,0,0,0,0,0,0];
A10=[0,0,0,0,6*4.3,2,0,0,-6*4.3,-2,0,0];
A11=[6*1.5,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
A12=[0,0,0,0,0,0,0,0,6*5.1,2,0,0];
A=[A1;A2;A3;A4;A5;A6;A7;A8;A9;A10;A11;A12];
b=[5;1.3;6.3;1.3;6.3;4.2;0;0;0;0;0;0];
```

Zu lösen ist das Gleichungssystem $A\bullet\vec{x} = \vec{b}$

x = inv(A)•b oder A\b

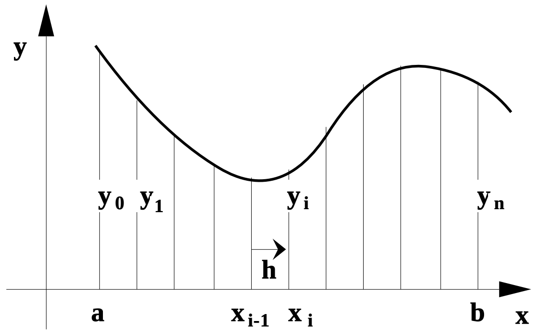
```
x =
    1.6773    a1
   -7.5480    b1
    5.9447    c1
    7.4050    d1
   -1.8316    a2
   18.7693    b2
  -59.8486    c2
   62.2327    d2
    2.0245    a3
  -30.9751    b3
  154.0522    c3
 -244.3584    d3
```

Numerische Integration

Ein einfaches Verfahren zur Berechnung eines Näherungswertes für das bestimmte Integral kann direkt aus der Definition von Ober- und Untersumme entnommen werden. Bildet man den Mittelwert aus Ober- und Untersumme, erhält man ein recht gutes Ergebnis. Im folgenden werden weitere gebräuichliche Integrationsmethoden vorgestellt.

Trapezregel

Wurden bei der Berechnung der Ober- und der Untersumme Rechtecksflächen als Ersatz für die entsprechende Fläche im jeweiligen Streifen gewählt, wird nun die Streifenfläche durch eine Trapezfläche ersetzt. Ferner werden alle Streifen gleich breit gewählt, d.h. $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$. Die Flächenformel für Trapeze bildet jeweils das arithmetische Mittel der beiden Parallelseiten. Diese haben hier die Länge, die durch die jeweiligen y-Werte angegeben wird. Werden alle Trapeze addiert, so treten die Randwerte y_0 und y_n einmal, die übrigen Werte je zweimal auf. Es ergibt sich folgender Näherungswert für das Integral:



$$I_{Trap} = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_i + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Simpsonsche Regel

Anstatt durch Geraden wie bei der Trapezregel wird der Graph der zu integrierenden Funktion durch Parabeln ersetzt. Durch jeweils drei Punkte des Graphen wird eine Parabel 2. Ordnung gelegt (quadratische Interpolation). Dies verlangt eine gerade Anzahl (n) von Streifen. Die Fläche unter der Parabel kann dann durch eine Summe von y-Werten exakt dargestellt werden. Die Fläche eines Doppelstreifens beträgt:

$$A_i = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$$

Wird nämlich die Parabelgleichung $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ integriert, erhält man:

$$I = \int_0^{2h}(a_2x^2 + a_1x + a_0)\,dx = \frac{8}{3}a_2h^3 + 2a_1h^2 + 2a_0h = \frac{h}{3}(6a_0 + 6a_1h + 8a_2h^2)$$

Die letzte Klammer wird nun durch eine Summe von Ordinaten ersetzt:

$$\begin{array}{rll}
y_0 & = f(0) & = a_0 \\
4y_1 & = 4f(h) & = 4a_0 + 4a_1h + 4a_2h^2 \\
y_2 & = f(2h) & = a_0 + 2a_1h + 4a_2h^2 \\
\hline
y_0 + 4y_1 + y_2 & & = 6a_0 + 6a_1h + 8a_2h^2
\end{array}$$

Werden die Flächen mehrerer Doppelstreifen addiert, so treten mit Ausnahme der ersten und der letzten Ordinate die Randordinaten jedes Doppelstreifens in zwei benachbarten Doppelstreifen auf. Somit lautet die Simpson-Regel:

$$I_{Simpson} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n)$$

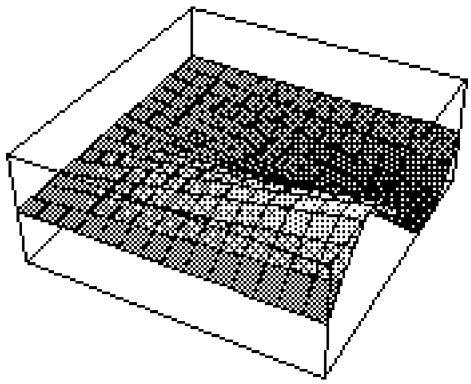
Differential und -Integralrechnung von Funktionen mehrerer Variablen

Funktionen von zwei Variablen

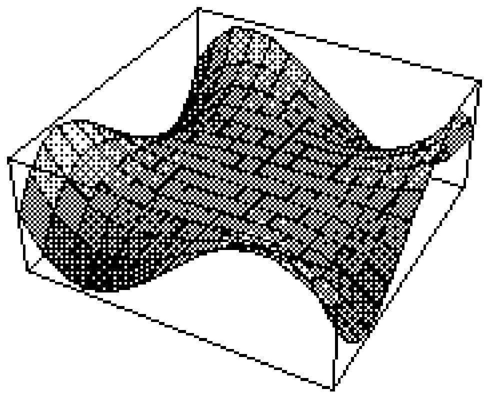
Gegeben sei die Funktion $z = f(x,y)$, d.h. der Wert von z ist abhängig von der gleichzeitigen Einstellung der Werte von x und y. Solche Funktionen sind im 3-dimensionalen Raum als Flächen darstellbar.

Beispiele:

$z = x \cdot \sin y$
$(0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2\pi)$



$z = x^3y - xy^3 + 2x - y + 5$
$(-5 \le x \le 5,\ -5 \le y \le 5)$



Wird eine Variable fest gehalten, so bleibt nur mehr eine Funktion von der anderen Variablen übrig. Im Bild bedeutet dies einen vertikalen Schnitt durch die Kurve entlang des festgehaltenen Variablenwerts. Dieser Schnitt lässt sich als 2-dimensionale Kurve aufzeichnen. An die Schnittkurve können z.B. Tangenten gelegt werden, wobei für die Tangentensteigung die bekannten Grundsätze der Differentialrechnung gelten.

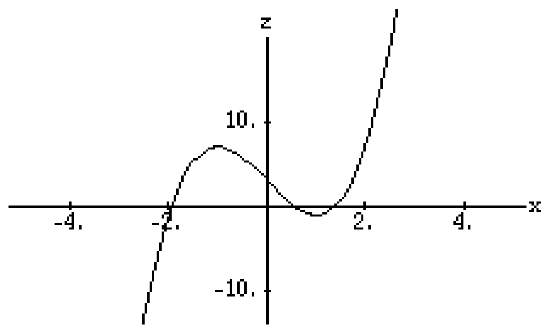
Beispiel:

$z = x^3y - xy^3 + 2x - y + 5$

Für $y = 2$ erhält man:
$z = 2x^3 - 8x + 2x - 2 + 5 = 2x^3 - 6x + 3$

$\frac{dz}{dx} = 6x^2 - 6$

Die Abbildung zeigt die Schnittkurve für $y = 2$



Partielle Ableitungen

$z = f(x,y)$

Partielle Ableitung nach x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = z_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Partielle Ableitung nach y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y = z_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Beispiel:

$$z = x^3y - xy^3 + 2x - y + 5$$
$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3 + 2$$
$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2 - 1$$

Höhere partielle Ableitungen

Wie die 1. Ableitung können auch höhere partielle Ableitungen gebildet werden. Es gilt:

$$z_{xx} = f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z_x}{\partial x}$$
$$z_{yy} = f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z_y}{\partial y}$$

Es gibt aber auch die gemischten 2. Ableitungen z_{xy} und z_{yx}

$$z_{xy} = f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z_x}{\partial y}$$

$$z_{yx} = f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial z_y}{\partial x}$$

Für weitere Ableitungen kann man analog vorgehen.

Ableitungsregeln

Die bei den Funktionen von einer Variablen gefundenen Regeln gelten auch für die partiellen Ableitungen. Insbesondere kann auch die Kettenregel auf die partiellen Ableitungen übertragen werden.

Kettenregel:

$z = f(u,v)$ mit $u = u(x)$ und $v = v(x)$

$z = f(u(x),v(x)) = F(x)$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial u} \bullet \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \bullet \frac{dv}{dx}$$

Verallgemeinerung

$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$z_{x1} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \qquad z_{x2} = \frac{\partial z}{\partial x_2} \qquad \ldots \qquad z_{xn} = \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

Totales Differential

$z = f(x,y)$

$dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy$

Explizite und implizite Darstellung von Funktionen

implizit: $F(x,y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$

Durch die angegebenen Gleichungen wird eine Beziehung zwischen den Variablen ausgedrückt. In vielen Fällen (nicht immer) ist eine Auflösung der Gleichung nach y bzw. nach z möglich. Die so erhaltene Form heisst explizite Darstellung der Funktion.

explizit: $y = f(x)$ $z = f(x,y)$

Funktionen können auch in der impliziten Form abgeleitet werden.

$F(x,y) = 0$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Beispiel:

Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder $F(x,y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

$F_x = 2b^2x$ $F_y = 2a^2y$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2b^2x}{2a^2y} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

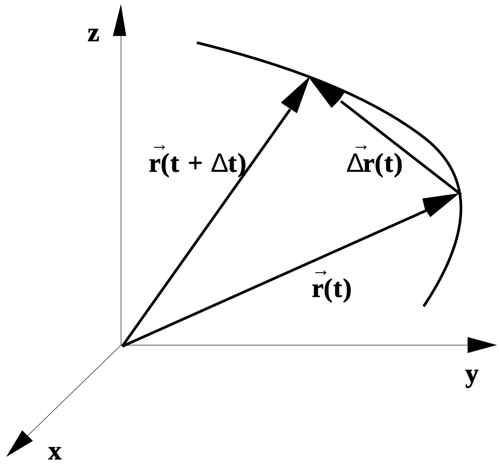
Kontrolle: Lösen der Ellipsengleichung auf $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ und dann ableiten.

Vektoranalysis

Bisher haben wir mit Vektoren mit festen Komponenten gearbeitet. Die Komponenten eines Vektors können aber genauso gut auch von einer oder mehreren Variablen abhängig sein. Dann stellt sich die Frage, ob man so einen Vektor auch differenzieren kann.

Gegeben ist ein Vektor $\vec{r}$, dessen Komponenten Funktion einer Variablen t sind:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



Lässt man t durch alle reellen Zahlen laufen, wird die Spitze des Vektors $\vec{r}$ eine Kurve im Raum beschreiben.

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

$$\dot{\vec{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta(t)} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Ableitungsregeln

Summe und Differenz	$(\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2)^{\bullet} = \dot{\vec{r}}_1 \pm \dot{\vec{r}}_2$
Vielfaches	$(\lambda \bullet \vec{r})^{\bullet} = \dot{\lambda} \bullet \vec{r} + \lambda \bullet \dot{\vec{r}}$
Skalares Produkt	$(\vec{r}_1 \bullet \vec{r}_2)^{\bullet} = \dot{\vec{r}}_1 \bullet \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \bullet \dot{\vec{r}}_2$
Vektorprodukt	$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)^{\bullet} = \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_2$

Beispiel:

Schiefer Wurf

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x}t + x_0 \\ v_{0y}t + y_0 \\ -\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t + z_0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \int \vec{v}\,dt$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ -gt + v_{0z} \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \int \vec{a}\,dt$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Felder

Gradient eines Skalarfeldes

Es sei u eine Ortsfunktion, d.h. u ist eine Funktion der Variablen x, y und z, welche die Koordinaten eines Punktes im Raum sind. Diese Ortsfunktion u beschreibt ein Skalarfeld.

$u = u(x,y,z)$

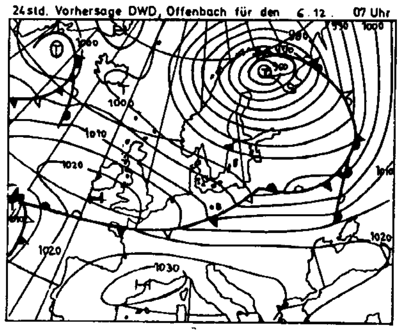
Die partiellen Ableitungen von u nach x, y und z geben die Steigung von u in der jeweiligen Koordinatenrichtung an. Der aus diesen partiellen Ableitungen zusammengesetze Vektor gibt die Steigung von u an. Sein Betrag ist umso grösser, je kleiner der Abstand der Niveauflächen (Flächen mit gleichem u-Wert) ist. Der Vektor steht senkrecht zu den Niveauflächen, er ist also so gerichtet, dass er die stärkste Änderung anzeigt. Dieser Vektor heisst Gradient von u.

$$\text{grad } u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Beispiele:

Temperaturgradient: Ein Körper wird erwärmt. In jedem Punkt des Körpers kann eine bestimmte Temperatur gemessen werden. Der Temperaturgradient gibt die Geschwindigkeit der Temperaturänderung im Körper an und zeigt mit seiner Richtung den Wärmefluss im Körper an.

Druckgradient: Auf der Wetterkarte werden die Luftdruckwerte eingezeichnet. Sogenannte Isobaren verbinden die Punkte mit denselben Luftdruckwerten. Ein dichter Verlauf der Isobaren zeigt ein starkes Druckgefälle auf kleiner Distanz an. Der Druckgradient verläuft senkrecht zu den Isobaren. Er zeigt die Windrichtung an und aus seinem Betrag lässt sich auf die Windstärke schliessen.



Bodenvorhersagekarte für den 6.12.79, 7⁰⁰ Uhr

Erläuterung im 2-dimensionalen Raum:

F(x,y) = 0 ist die Gleichung einer ebenen Kurve. Die Steigung der Tangente y' kann berechnet werden:

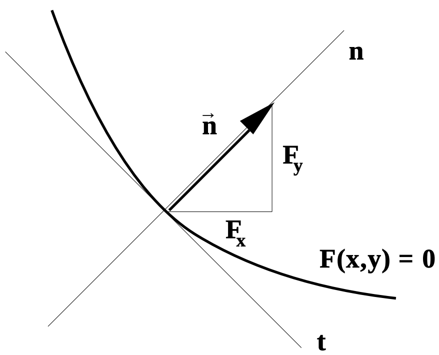
$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

Die Normale hat die Steigung

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{F_y}{F_x}$$

Ein Normalvektor zur gegebenen Kurve hat also die Komponenten

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}.$$



Dieser Vektor ist aber der Gradient von F:

$$\text{grad } F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}.$$

Divergenz eines Vektorfeldes

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Als Divergenz des Vektorfeldes $\vec{v}$ wird der Skalar div $\vec{v}$ definiert:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Physikalisch bedeutet die Divergenz eine Quellstärke je Volumeneinheit. Ist div $\vec{v} > 0$, so enthält das Feld Quellen, ist div $\vec{v} < 0$, so enthält es Senken. Ein Feld mit div $\vec{v} = 0$ ist quellen- und senkenfrei.

Beispiel:

Bei einer nichtzusammendrückbaren Flüssigkeit kann aus einem Volumenelement nur soviel Flüssigkeit herauskommen, wie hineingeströmt ist. Für solche Flüssigkeiten lautet die Kontinuitätsgleichung div $\vec{v} = 0$.

Rotation eines Vektorfeldes

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Als Rotation des Vektorfeldes $\vec{v}$ wird der Vektor rot $\vec{v}$ definiert:

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & v_x \\ \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & v_y \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die partiellen Ableitungssymbole $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ in der Determinante werden als Operatoren verstanden, die jeweils auf eine Komponente des Vektorfeldes $\vec{v}$ angewendet werden.

Physikalisch ist die Rotation eines Vektorfeldes zur Winkelgeschwindigkeit einer Drehung proportional.

Ein Vektorfeld heisst wirbelfrei, wenn für jeden Vektor $\vec{v}$ des Feldes gilt : rot $\vec{v} = \vec{o}$

Nabla-Operator

Ein Operator wird als Differentialoperator bezeichnet, wenn zu seiner Definition Differentialquotienten benützt werden. Ein häufig benützter Operator ist der Nabla-Operator ∇:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Mit dem Nabla-Operator kann man den Gradienten eines Skalarfeldes u = u(x,y,z) aufschreiben:

$$\text{grad } u = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} u(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{v}$ ist:

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Das Vektorprodukt von Nabla mit dem Vektorfeld $\vec{v}$ ergibt die Rotation von $\vec{v}$:

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & v_x \\ \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & v_y \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & v_z \end{vmatrix}$$

Das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit sich selbst ergibt den Laplace-Operator Δ:

$$\nabla \bullet \nabla = \nabla^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

Die Maxwell-Gleichungen und das elektromagnetische Feld

Zur Beschreibung von elektrischen Vorgängen im Vakuum benötigt man vier Grundgrössen, die elektrische Ladungsdichte σ, die elektrische Stromdichte $\vec{i}$, die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die magnetische Induktion $\vec{B}$. Durch die Maxwell-Gleichungen sind diese vier Grundgrössen miteinander folgendermassen verknüpft (ε_0 elektrische Feldkonstante, μ_0 magnetische Feldkonstante):

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

James Clerc Maxwell (1831 - 1879) begründete 1860 die vollständige Theorie der elektromagnetischen Vorgänge. Er sagte die Existenz von Radiowellen voraus und deutete das Licht als elektromagnetische Welle.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Im Abschnitt Wahrscheinlichkeit I wurde in verschiedenen Aufgaben jeweils die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses berechnet. Nun wollen wir die Frage stellen, wie gross bei mehrfacher Wiederholung eines Zufallsversuchs die Wahrscheinlichkeit ist, dass das genannte Ereignis eine bestimmte Anzahl mal eintritt. Diese Frage führt bei für jeden Zufallsversuch gleicher Ausgangslage zur Binomialverteilung, für sich ändernde Bedingungen zur hypergeometrischen Verteilung. Für sehr seltene Ereignisse bei grosser Anzahl der Zufallsversuche gibt es unter dem Namen Poisson-Verteilung eine Näherungslösung. Diese Verteilungen beziehen sich immer auf eine feste Anzahl von Zufallsversuchen, es handelt sich also um Probleme mit diskreten Zufallsgrössen. Für stetige Zufallsgrössen bietet die Normalverteilung eine Lösung.

Zufallsgrösse

Unter einer Zufallsgrösse x (auch Zufallsvariable genannt) versteht man eine Grösse, welche unter gleichbleibenden Versuchsbedingungen unterschiedliche, vom Zufall abhängige Werte annimmt.

Beispiele: Augenzahl beim Würfeln, Messwert in einer Messserie

Diskrete Zufallsgrössen:

Die Zufallsgrösse x ist diskret, wenn sie nur endlich viele Werte x_i annehmen kann, deren Einzelwahrscheinlichkeiten $p(x_i)$ bekannt sind. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

Stetige Zufallsgrössen:

Die Zufallsgrösse x ist stetig, wenn ihre Wahrscheinlichkeit p(x) in einem Intervall als stetige, nicht negative Funktion darstellbar ist und wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte

Unter der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x_i)$ versteht man die Verteilung diskreter Zufallsgrössen. Die Verteilung stetiger Zufallsgrössen heisst Wahrscheinlichkeitsdichte p(x).

Die Verteilungsfunktion ist immer eine Summenfunktion. Bei diskreten Zufallsgrössen ist es die Funktion

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{i} p(x_j),$$

das Ergebnis einer fortlaufenden Addition der Einzelwahrscheinlichkeiten $p(x_j)$.
Bei einer stetigen Zufallsgrösse wird die Verteilungsfunktion als Fläche zwischen Kurve und Abszisse definiert:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x_1} p(t)dt$$

Für $x = x_1$ bedeutet der Wert des Integrals die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgrösse x einen Wert zwischen x_0 und x_1 annimmt.

Mittelwert und Streuung

Der Mittelwert μ (oder auch Erwartungswert) der Zufallsgrösse x ist folgendermassen definiert:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$$ **für eine diskrete Zufallsgrösse x**

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \bullet p(x)\, dx$$ **für eine stetige Zufallsgrösse x.**

Die Streuung σ (oder auch Standardabweichung) der Zufallsgrösse sagt etwas über die Breite der Verteilung aus. Es gilt:

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)$ für eine diskrete Zufallsgrösse x

$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot p(x)\, dx$ für eine stetige Zufallsgrösse x.

σ^2 heisst Varianz.

Binomische Verteilung (diskret)

Beispiel: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfel in 10 Versuchen 4-mal die Augensumme 6 zu werfen?

In einem Wurf ist die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 6 gleich $p = \frac{g}{m} = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} = 0{,}139$. Die Gegenwahrscheinlichkeit ist $q = 1 - p = \frac{31}{36} = 0{,}861$. Die 10 Würfe könnten nun in einem Baumdiagramm aufgezeichnet werden. Zu ermitteln ist die Anzahl der Pfade, welche genau 4-mal das Ereignis enthalten. Es handelt sich dabei um die Kombination von 10 Elementen zur Klasse 4. Die Pfadwahrscheinlichkeiten mit 4-mal Ausgensumme 6 sind jeweils gleich und betragen p^4q^6. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, in 10 Würfen 4-mal die Augensumme 6 zu werfen
$p_{10}(4) = \binom{10}{4} p^4 q^6$

Allgemein:
Die Wahrscheinlichkeit, dass in n Zufallsversuchen das Ereignis E x-mal eintritt, ist:

$p_n(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$,

wobei $q = 1 - p$ ist (p ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E).

Erwartungswert $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i) = np$ (ohne Beweis)

Varianz $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) = npq$ (ohne Beweis)

Poisson-Verteilung (diskret)

Wird die Anzahl der Zufallsversuche sehr gross und die Wahrscheinlichkeit p sehr klein (d.h es wird $q = 1 - p \to 1$), kann man die Poisson-Verteilung zur Berechnung benutzen. Die Poissonsche Formel gibt den Grenzwert der Binomialverteilung mit $n \to \infty$ an.

Es gilt: $\lim_{n \to \infty} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$ mit $\mu = np$ (Erwartungswert)

Wenn n genügend gross (und dabei p hinreichend klein) ist, kann die Poissonsche Formel als Näherung benützt werden.

Erwartungswert $\mu = np$
Varianz $\sigma^2 = npq = \mu$ (weil $q \to 1$)

Beispiel:
Ein Gramm Radium (Ra) enthält etwa 10^{22} Atome. Diese können zerfallen: Ihre Kerne senden α-Teilchen aus und aus dem Radium entsteht Radon (Rn). Der Zerfall eines Kerns ist unabhängig von anderen Kernen. Ferner ist bekannt, dass die mittlere Anzahl α-Teilchen, welche 1 Gramm Radium pro Sekunde aussendet, 10^{10} ist.
Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit, das in einem Messintervall Δt von 1 Gramm Radium x α-Teilchen ausgesandt werden? (Δt = 1s)

Erwartungswert $\mu = np = 10^{22} \cdot p \approx 10^{10}$

$p \approx 10^{-12}$

$p_n(x) \approx \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$ (mit $\mu = 10^{10}$)

Sehr einfach ist die Berechnung des relativen mittleren Fehlers $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{\mu}}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$

Soll also eine Messunsicherheit von 10% erreicht werden, müssen im Mittel pro Messintervall wenigstens $\mu = 10^2$ Erreignisse registriert werden.
Für höhere Genauigkeiten gilt: 1% 10^4, 1‰ 10^6

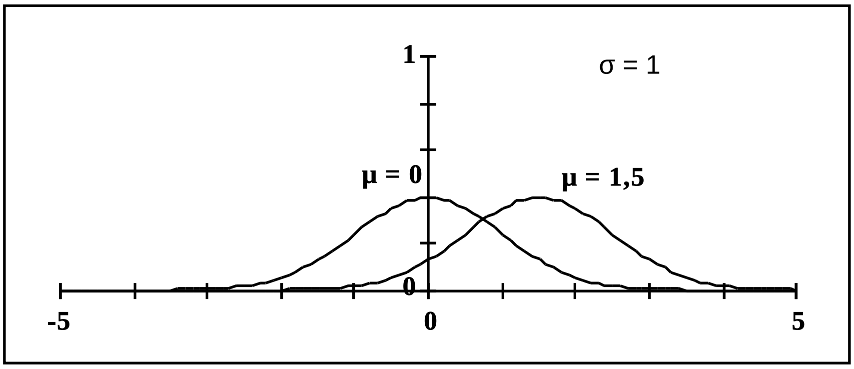
Normalverteilung (kontinuierlich)

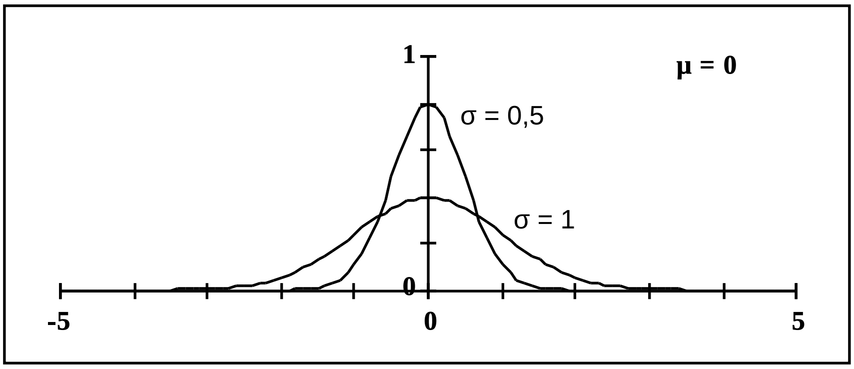
Im Unterschied zur Binomial- und zur Poissonverteilung ist die Normalverteilung eine kontinuierliche Verteilung. Wir gehen von der Vorstellung aus, dass eine Zufallsvariable x jeden reellen Wert einnehmen kann. Bei Zufallsversuchen tritt häufig eine glockenförmige Verteilungskurve auf. Die Normalverteilung beschreibt eine solche Glockenkurve, wobei noch dafür gesorgt ist, dass die Fläche zwischen Kurve und Abszisse den Wert 1 haben soll (Die Wahrscheinlichkeit ist normiert). Teilflächen in den Abschnitten von x_1 bis x_2 geben dann die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable x bei einem Zufallsversuch einen Wert zwischen x_1 und x_2 annimmt.

Kurve der Normalverteilung, Gauss'sche Glockenkurve:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

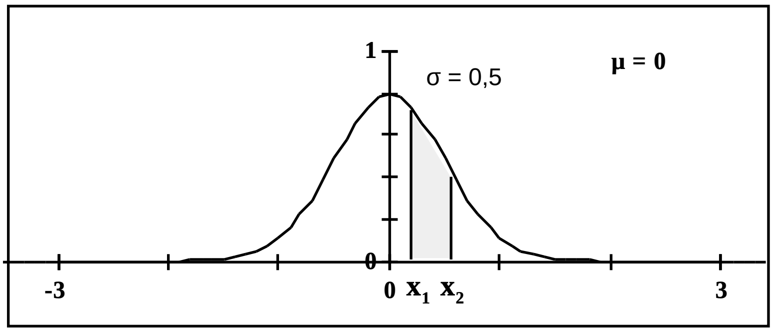
Es gilt: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1$$





Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Zufallsvariablen x zwischen x_1 und x_2 liegt, ist:

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$



Exponentialverteilung

Die Dichtefunktion ist gegeben mit

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ (für } x > 0).$$

Der Erwartungswert ist $\mu = \frac{1}{\lambda}$ **und der Streuungsparameter** $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ **.**

Der Parameter λ **wird als konstante Ausfallrate interpretiert.**

Die Verteilungsfunktion ergibt sich als Integral über die Dichtefunktion. Es gilt:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

F(x) bezeichnet dabei die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable x im Bereich zwischen 0 und x liegt. Für $x \to \infty$ **ergibt sich der Wert 1.**

Die Exponentialverteilung eignet sich zur Modellierung von Wartezeitsituationen (z.B. bei Übermittlungsproblemen) und Berechnung von Zuverlässgkeitswerten für Bauteile (z.B. bei elektronischen Schaltungen).

Potenzreihen

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_k(x - x_0)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

Für $x_0 = 0$ erhält man den Spezialfall:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$$

Beispiele:

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k = 1 + x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \ldots + k!\, x^k + \ldots$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^k}{k} + \ldots$

Ob die Summe existiert, also die Potenzreihe konvergent oder divergent ist, hängt in der Regel von der Wahl des Wertes x ab. Es gibt Potenzreihen, welche für alle x R konvergent sind (Beispiel 2, Konvergenzradius $r = \infty$), es gibt aber auch solche, die nur für $x = 0$ eine endliche Summe haben und sonst divergent sind (Beispiel 1, $r = 0$). Mit dem Quotienten- oder dem Wurzelkriterium (Sätze über konvergente Reihen) kann dies überprüft werden.

Beispiel 1: $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} |(n + 1)\, x| = \lim_{n \to \infty} (n + 1)\, |x| = \infty \qquad r = 0$

Beispiel 2: $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \qquad r = \infty$

Es gibt auch Potenzreihen, welche für alle reellen x, für die $|x - x_0| < r$ ist, konvergieren. Die Zahl r heisst dann der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Beispiel 3: $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}\, n}{(n+1)\, x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{nx}{n+1} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} |x| = 1 \bullet |x| = |x| \qquad r = 1$

Da die Potenzreihe aus einer Summe von Potenzfunktionen besteht, kann man sie beliebig oft ableiten oder integrieren. Das Ergebnis ist in jedem Fall wieder eine Potenzreihe. Ihr Konvergenzradius ist derselbe wie bei der ursprünglichen Potenzreihe (ohne Beweis).

Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen

Gegeben sei eine Funktion f durch die Gleichung $y = f(x)$. Wir nehmen an, dass sich $f(x)$ durch eine Potenzreihe darstellen lässt:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_k(x - x_0)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

Für $x = x_0$ gilt: $f(x_0) = a_0$

1. Ableitung: $\displaystyle f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x - x_0)^{k-1}$

$f'(x_0) = a_1 \qquad a_1 = f'(x_0)$

2. Ableitung: $\displaystyle f''(x) = 2\bullet 1a_2 + 3\bullet 2a_3(x - x_0) + 4\bullet 3a_4(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} k\bullet(k-1)a_k(x - x_0)^{k-2}$

$f''(x_0) = 2!\, a_2 \qquad a_2 = \dfrac{f''x(0)}{2!}$

usw. $\qquad a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Somit erhält man für f(x):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\cdot(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x - x_0)^k + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x - x_0)^k$$

e^x - Reihe:

$y = e^x$

$y' = e^x$

$y'' = e^x$

...

$y^{(k)} = e^x$

Für $x_0 = 0$ gilt: $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

Damit ergibt sich die Darstellung der Exponentialfunktion zu:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Reihe für sin x und cos x

$y = \sin x$	$f(0) = 0$	$y = \cos x$	$f(0) = 1$
$y' = \cos x$	$f'(0) = 1$	$y' = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$y'' = -\sin x$	$f''(0) = 0$	$y'' = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$y''' = -\cos x$	$f'''(0) = -1$	$y''' = \sin x$	$f'''(0) = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Potenzreihen mit komplexen Gliedern

Setzt man in e^x für $x = i\phi$, so erhält man:

$$e^{i\phi} = 1 + i\phi + \frac{i^2\phi^2}{2!} + \frac{i^3\phi^3}{3!} + \frac{i^4\phi^4}{4!} + \frac{i^5\phi^5}{5!} + \frac{i^6\phi^6}{6!} + \frac{i^7\phi^7}{7!} + \dots = 1 + i\phi - \frac{\phi^2}{2!} - \frac{i\phi^3}{3!} + \frac{\phi^4}{4!} + \frac{i\phi^5}{5!} - \frac{\phi^6}{6!} - \frac{i\phi^7}{7!} + \dots =$$

$$= \left\{1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \dots\right\} + i\left\{\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \frac{\phi^7}{7!} + \dots\right\} = \cos\phi + i\sin\phi \qquad \text{(Euler'sche Relation)}$$

Taylorsche Polynome

f(x) wird durch eine ganz rationale Funktion also durch eine Polynomfunktion approximiert. Diese Polynome heissen "Taylorsche Polynome".

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}\cdot(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$R_n(x)$ heisst Restglied. Es kann z.B. in der Form von Lagrange dargestellt werden (ohne Beweis):

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \qquad \text{mit } 0 < \vartheta < 1$$

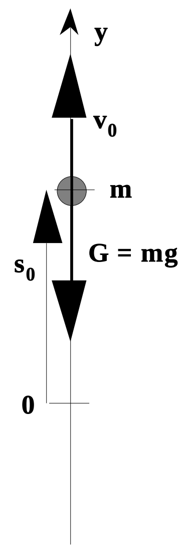
Mit dieser Restglieddarstellung wird es möglich, den Fehler bei der Approximation von f(x) durch ein Taylor-Polynom abzuschätzen.

Differentialgleichungen

Im Physikunterricht wurden z.B. Fall- und Wurfprobleme bearbeitet. Zur mathematischen Beschreibung einer Fall- oder Wurfbewegung ist nur die jeweils wirkende Kraft bekannt. Nach Newton besteht ein Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung, und gemäass Definition von Geschwindigkeit und Beschleunigung kann eine Weg-Zeit-Funktion der Bewegung durch Integrieren gewonnen werden.

Beispiel: Vertikaler Wurf

Die Masse m wird an der Stelle s_0 mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 vertikal abgestossen und dann der Wirkung der Gravitation überlassen. Es wirkt also die Gewichtskraft G = mg während des Fluges auf m.



Somit gilt: $m\ddot{y} = mg$ (2. Newton'sches Axiom)

$\ddot{y} = g$

Durch Integration nach der Zeit erhält man:

$\dot{y} = \int(-g)\,dt = -gt + C_1$ und

$y = \int(-gt + C_1)\,dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$

C_1 und C_2 kann man zu $C_1 = v_0$ und $C_2 = s_0$ bestimmen.

Die Ansatzgleichung $m\ddot{y} = mg$ enthält die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit. Gleichungen, welche Ableitungen enthalten, heissen Differentialgleichungen.

Definitionen

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion y = y(x) bis zur n-ten Ordnung auftreten, heisst gewöhnliche Differentialgleichung.

In der impliziten Form sieht sie so aus:

$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$

Falls man auf $y^{(n)}$ auflösen kann, erhält man die explizite Form:

$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)})$

Neben den gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es die partiellen Differentialgleichungen. Sie enthalten partielle Ableitungen einer unbekannten Funktion von mehreren Variablen.

Beispiele:

$y' = 2x$	Explizite DGL 1.Ordnung
$x + yy' = 0$	Implizite DGL 1. Ordnung
$y' + yy'' = 0$	Implizite DGL 2. Ordnung

Lösungen einer Differentialgleichung

Eine gewöhnliche Differentialgleichung lösen heisst eine Funktion y = y(x) suchen, welche mit all ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt. Die Lösung ist also die Funktion y = y(x).

Wir unterscheiden dabei noch zwischen der *allgemeinen* und der *speziellen* oder *partikulären* Lösung. Die allgemeine DGL n-ter Ordnung enthält noch n voneinander unabhängige Parameter (Integrationskonstanten). In der partikulären Lösung sind diese Unbekannten durch n Bedingungen festgelegt.

Anfangswert- und Randwertprobleme

Um die n Parameter einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung bestimmen zu können, benötigt man n Bedingungen. Dabei wird zwischen Anfangs- und Randbedingungen unterschieden.

Anfangsbedingungen:
$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$ allgemeine Lösung: $y = y(x, C_1, C_2, \ldots , C_n)$
Gegeben sind die Werte: $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$
Es sind die Funktionswerte der Lösungsfunktion und der ersten n-1 Ableitungen an einer ganz bestimmten Stelle x_0. Somit kann ein Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Variablen angesetzt werden.

Beispiel 1:
$y' = 2x$, $y(0) = 1$
Die allgemeine Lösung der DGL ist $y(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C_1$
Die Anfangsbedingung ergibt die Gleichung:
$1 = 0 + C_1$
Die partikuläre Lösung heisst dann: $y_p(x) = x^2 + 1$

Beispiel 2:
Die harmonische Schwingung des Federpendels hat die DGL: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$
Gegeben sind die Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$ mit $x_0 > 0$
Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung lautet: $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$
Durch Ableiten und Einsetzen kann diese Lösung überprüft werden.
$\dot{x}(t) = A\omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$
$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$
Das Gleichungsystem zur Bestimmung der Parameter A (Amplitude) und ϕ (Phasenwinkel) lautet:
$x(0) = x_0$ $\qquad x_0 = A \cdot \sin\phi$
$\dot{x}(0) = 0$ $\qquad 0 = A\omega_0 \cdot \cos\phi$
Die zweite Gleichung liefert $\cos\phi = 0$, die Lösung für ϕ ist somit $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$ oder $\phi_2 = \frac{3\pi}{2}$
In der ersten Gleichung wird $\sin\phi > 0$ für $x_0 > 0$ und $A > 0$. Damit fällt die zweite Lösung für den Phasenwinkel (ϕ_2) dahin. Für A erhält man:

$$A = \frac{x_0}{\sin\frac{\pi}{2}} = x_0$$

Die partikuläre Lösung lautet: $x_p(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

Randbedingungen:
$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$ allgemeine Lösung: $y = y(x, C_1, C_2, \ldots , C_n)$
Gegeben sind die Werte: $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots, y(x_n)$
Es sind die Funktionswerte der Lösungsfunktion an n Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben. Somit kann ein Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Variablen angesetzt werden.

Beispiel:
Ein auf zwei Stützen (Distanz l) aufliegender Balken wird durch eine konstante Streckenlast q gleichmässig belastet. Die Biegelinie $y = y(x)$ für kleine Durchbiegungen genügt näherungsweise der Differentialgleichung 2. Ordnung:
$y'' = -\frac{M_b}{E \cdot I}$ (M_b = Biegemoment, E = Elastizitätsmodul, I= Flächenmoment des Querschnitts)
Das ortsabhängige Biegemoment M_b ergibt im Belastungsfall $M_b = \frac{q}{2}(lx - x^2)$ mit $0 \le x \le l$
Es ist also die folgende Differentialgleichung zu lösen:

$y'' = \frac{-q}{2E \cdot I}(lx - x^2)$ mit $y(0) = 0$, $y(l) = 0$ und $0 \le x \le l$
Zweimaliges Integrieren liefert die Funktionenschar: $y(x) = -\frac{q}{2E \cdot I}\left(\frac{1}{6} lx^3 - \frac{1}{12} x^4 + C_1 x + C_2\right)$
Mit den Randbedingungen erhält man das Gleichungssystem:
$y(0) = 0$ $\qquad 0 = -\frac{q}{2E \cdot I}(C_2)$
$y(l) = 0$ $\qquad 0 = -\frac{q}{2E \cdot I}\left(\frac{1}{6} l^4 - \frac{1}{12} l^4 + C_1 l + C_2\right)$
Aus der ersten Gleichung erhält man $C_2 = 0$, und mit der zweiten Gleichung für $C_1 = -\frac{1}{12} l^3$

Differentialgleichungen 1. Ordnung

F(x, y, y') = 0 oder explizit, wenn auf y' auflösbar: y' = f(x, y)

Es gibt kein allgemeines Verfahren, nach der die Lösungen einer solchen Differentialgleichung gefunden werden können. Der Lösungsweg ist vom Typ der Differentialgleichung abhängig. Zunächst werden wir einige geometrische Überlegungen anhand der expliziten Form zu den Lösungsscharen anstellen.

Richtungsfeld

Gegeben ist die DGL: y' = f(x,y)

Die 1. Ableitung einer Funktion gibt bekanntlich die Steigung m der Kurve an. Hier ist also die Kurvensteigung eine Funktion von x und von y.

m = f(x,y)

In einem speziellen Punkt $P_0(x_0/y_0)$ erhält man m = f(x_0, y_0), einen festen Steigungswert. Geometrisch kann man die Steigung durch einen kleinen Tangentenabschnitt um den Punkt herum, Linienelement genannt, sichtbar machen. Durch das Einzeichnen vieler Linienelemente können näherungsweise die Lösungskurven ermittelt werden.

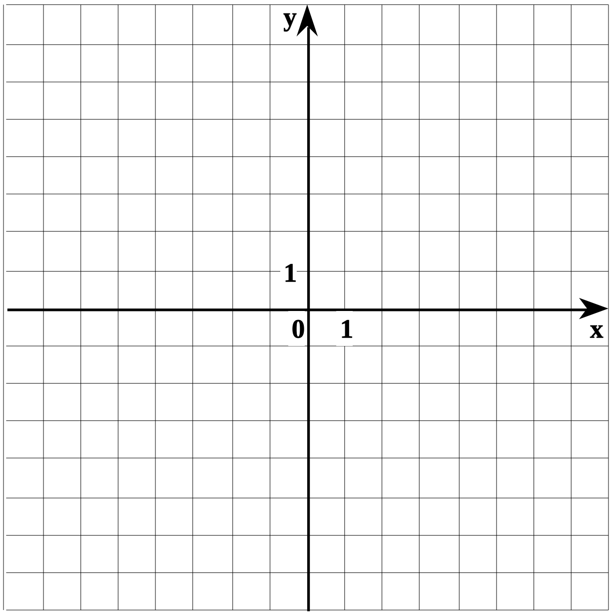
Für vorgegebene, konstante Werte von m liegt jetzt eine gewöhnliche Gleichung in x und y vor, welche im 2-dimensionalen Koordinatensystem eine Kurve beschreibt, nämlich die Menge aller Punkte, für welche die Lösunung der gegebenen DGL denselben Steigungswert hat (Isokline). Mittels der Isoklinen ist es allerdings effizienter, das Feld von Linienelementen zu generieren. Ein Beispiel zeigt die Möglichkeiten.

Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Die folgende Tabelle gibt die Steigungswerte als Funktion von x (horizontal) und y (vertikal) an. Im Koordinatensystem können die Linienelemente eingezeichnet werden. Sie sind die Grundlage für die Näherung der Lösungskurvenschar.

y \ x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	1.0	0.9	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	0.1	0.0	-0.1	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.8	-0.9	-1.0
7	1.1	1.0	0.9	0.7	0.6	0.4	0.3	0.1	0.0	-0.1	-0.3	-0.4	-0.6	-0.7	-0.9	-1.0	-1.1
6	1.3	1.2	1.0	0.8	0.7	0.5	0.3	0.2	0.0	-0.2	-0.3	-0.5	-0.7	-0.8	-1.0	-1.2	-1.3
5	1.6	1.4	1.2	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1.0	-1.2	-1.4	-1.6
4	2.0	1.8	1.5	1.3	1.0	0.8	0.5	0.3	0.0	-0.3	-0.5	-0.8	-1.0	-1.3	-1.5	-1.8	-2.0
3	2.7	2.3	2.0	1.7	1.3	1.0	0.7	0.3	0.0	-0.3	-0.7	-1.0	-1.3	-1.7	-2.0	-2.3	-2.7
2	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	0.5	0.0	-0.5	-1.0	-1.5	-2.0	-2.5	-3.0	-3.5	-4.0
1	8.0	7.0	6.0	5.0	4.0	3.0	2.0	1.0	0.0	-1.0	-2.0	-3.0	-4.0	-5.0	-6.0	-7.0	-8.0
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-1	-8.0	-7.0	-6.0	-5.0	-4.0	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
-2	-4.0	-3.5	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
-3	-2.7	-2.3	-2.0	-1.7	-1.3	-1.0	-0.7	-0.3	0.0	0.3	0.7	1.0	1.3	1.7	2.0	2.3	2.7
-4	-2.0	-1.8	-1.5	-1.3	-1.0	-0.8	-0.5	-0.3	0.0	0.3	0.5	0.8	1.0	1.3	1.5	1.8	2.0
-5	-1.6	-1.4	-1.2	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
-6	-1.3	-1.2	-1.0	-0.8	-0.7	-0.5	-0.3	-0.2	0.0	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	1.0	1.2	1.3
-7	-1.1	-1.0	-0.9	-0.7	-0.6	-0.4	-0.3	-0.1	0.0	0.1	0.3	0.4	0.6	0.7	0.9	1.0	1.1
-8	-1.0	-0.9	-0.8	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.1	0.0	0.1	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	0.9	1.0



Zeichnen Sie das Richtungsfeldmit Maple V und kleben Sie das Ergebnis hier ein.

```
> with(DEtools):
> DEplot({diff(y(x),x)=-x/y(x)},{y(x)}, \
          x=-8..8,y=-8..8)
```

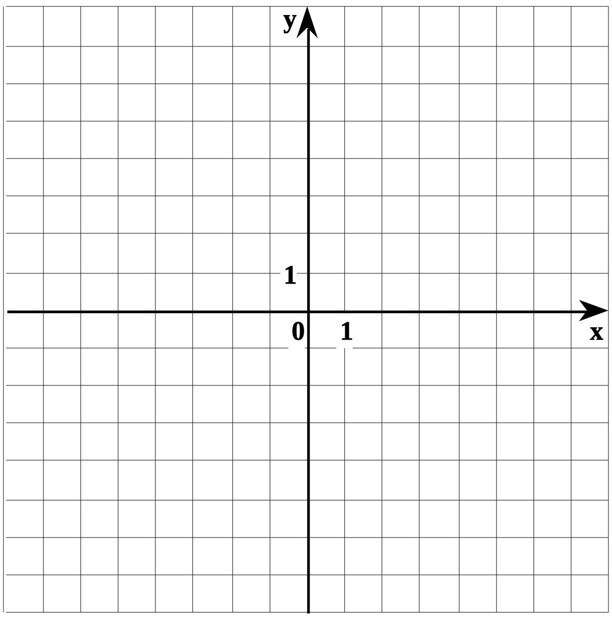
Mit der Isoklinenmethode geht das Ganze noch einfacher. Für jeden konstanten Wert von m ≠ 0 erhält man eine Ursprungsgerade.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$m = -\frac{x}{y}$$

$$y = -\frac{1}{m}x$$

m	$y = -\frac{1}{m}x$
-2	$y = \frac{1}{2}x$
-1	$y = x$
0	y-Achse
1	$y = -x$
2	$y = -\frac{1}{2}x$



Trennung der Variablen (Separation)

Eine DGL 1. Ordnung vom Typ $y' = f(x) \cdot g(y)$ kann durch Trennung der Variablen gelöst werden.

$y' = f(x) \cdot g(y)$

Differential: $dy = y'\,dx = f(x) \cdot g(y)\,dx$

Trennen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$

Integrieren: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

Jetzt sind nur noch die beiden Integrale zu berechnen und wir erhalten die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Beispiel 1:

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad (y \neq 0)$$

$$dy = -\frac{x}{y}\,dx$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y^2 = -x^2 + 2C_1 = -x^2 + C_2$$

$$y = \pm\sqrt{-x^2 + C_2} \qquad \text{oder} \qquad x^2 + y^2 = C_2$$

Für positive Werte von C_2 erhält man dann Kreise mit dem Mittelpunkt im Ursprung.

Beispiel 2:

$$y' = y$$

$$dy = y\,dx$$

$$\frac{dy}{y} = dx \qquad (y \neq 0)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + C_1$$

1) $y > 0$
$\ln y = x + C_1$
$y = e^{x + C_1} = e^x \cdot e^{C_1}$

2) $y < 0$
$\ln(-y) = x + C_1$
$-y = e^{x + C_1} = e^x \cdot e^{C_1}$
$y = -e^x \cdot e^{C_1}$

Nun aber können beide Fälle zusammengefasst werden, weil vor der Exponentialfunktion nur ein konstanter Faktor steht, und die allgemeine Lösung heisst:

$$y = C \cdot e^x \qquad \text{mit } C \neq 0\text{, weil } y \neq 0$$

Die gegebene Differentialgleichung ist aber auch durch $y = 0$ erfüllt. Oben wurde $y = 0$ nur wegen der Division durch y ausgeschlossen. Nun kann die allgemeine Lösung für alle y R folgendermassen geschrieben werden:

$$y = C \cdot e^x \qquad C \quad R$$

Achtung: Bei der Lösung von Differentialgleichungen treten häufig logarithmische Terme wie $\ln|x|$ oder $\ln|y|$ auf. Es ist in so einem Fall günstig, die Integrationskonstante in der Form $\ln|C|$ anzusetzen.

Lösung durch Substitution

Differentialgleichungen der Form $y' = f(ax + by + c)$ oder $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ können durch Substitution auf eine separable Differentialgleichung zurückgeführt werden. Es wird so substituiert, dass anstelle von y und y' neu die Variablen u und u' auftreten.

$y' = f(ax + by + c)$

$u = ax + by + c$

$u' = a + by'$

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$u = \frac{y}{x}$

$y = u \cdot x$

$y' = u'x + u$

In der letzten Gleichung wird für $y' = f(u)$ eingesetzt:

$u' = a + b \cdot f(u)$

$du = \left(a + b \cdot f(u)\right) dx$

$\frac{du}{a + b \cdot f(u)} = dx$

$\int \frac{du}{a + b \cdot f(u)} = \int dx$

$f(u) = u'x + u$

$u' = \frac{f(u) - u}{x}$

$du = \frac{f(u) - u}{x}\ dx$

$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$

Beispiel 1:

$y' = 2x - y$

Substitution: $u = 2x - y$

$u' = 2 - y'$

y' einsetzen:

$u' = 2 - u$

Differential: $du = (2 - u)dx$

Trennen: $\frac{du}{2 - u} = dx$

Integrieren: $\int \frac{du}{2 - u} = \int dx$

$-\ln|2 - u| = x + \ln|C_1|$

$\ln|2 - u| = -x - \ln|C_1|$

$2 - u = C_2 \cdot e^{-x}$ $(C_2 \quad R)$

Rücksubstitution:

$2 - 2x + y = C_2 \cdot e^{-x}$

$y = C_2 \cdot e^{-x} + 2x - 2$ $(C_2 \quad R)$

Beispiel 2:

$y' = \frac{x + 2y}{x} = 1 + 2\frac{y}{x}$

Substitution: $u = \frac{y}{x}$

$y = ux$

$y' = u'x + u$

y' einsetzen:

$1 + 2u = u'x + u$

Differential: $du = \frac{1 + u}{x} dx$

Trennen: $\frac{du}{1 + u} = \frac{dx}{x}$

Integrieren: $\int \frac{du}{1 + u} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|1 + u| = \ln|x| + \ln|C_1|$

$1 + u = C_1 \cdot x$ $(C_1 \quad R)$

Rücksubstitution:

$1 + \frac{y}{x} = C_1 \cdot x$

$x + y = C_1 \cdot x^2$

$y = C_1 x^2 - x$ $(C_1 \quad R)$

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$y' + f(x) \bullet y = g(x)$

g(x) wird als Störglied bezeichnet. Ist für alle x   R der Wert von $g(x) \equiv 0$, nennt man die DGL homogen, mit $g(x) \not\equiv 0$ heisst sie inhomogen.

Kennzeichen der linearen DGL 1. Ordnung ist das lineare Auftreten von y' und y. Der gemischte Ausdruck yy' ist verboten.

Die homogene lineare DGL 1. Ordnung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden.

allgemein:

$$y' + f(x) \bullet y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) \bullet y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)\, dx$$

$$\ln|y| = -\int f(x)\, dx + \ln|C_1|$$

$$y = C_1 \bullet e^{-\int f(x)\, dx} \qquad (C_1 \quad R)$$

$$y' + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int x\, dx$$

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln|C_1|$$

$$y = C_1 \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (C_1 \quad R)$$

Beispiel:

Um die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung ($g(x) \not\equiv 0$) zu lösen, benötigen wir eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ($y_p(x)$ und die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen DGL ($y_h(x)$). Es gilt: $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$

Beweis:
$y' = y_p' + y_h'$

Einsetzen in die DGL: $y_p' + y_h' + f(x) \bullet (y_p + y_h) = g(x)$

Umformen: $(y_h' + f(x) \bullet y_h) + y_p' + f(x) \bullet y_p = g(x)$

Weil y_h eine Lösung der homogenen DGL ist, ist der erste Teil Null. Mit y_p Als Lösung der inhomogenen Gleichung ist die Identität nachgewisen.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu finden ist nicht so leicht. Es gibt aber Methoden dafür.

Variation der Konstanten

Die homogene Differentialgleichung 1. Ordnung $y' + f(x) \bullet y = 0$ hat die Lösung

$$y_h = C_1 \bullet e^{-\int f(x)\, dx}$$

Wir ersetzen nun die Konstante C_1 durch eine Funktion von x: $C_1 = K(x)$. Den neuen Wert für y setzen wir in der inhomogenen Differentialgleichung ein.

$$y = K(x) \bullet e^{-\int f(x)\, dx} \qquad y' = K'(x) \bullet e^{-\int f(x)\, dx} + K(x) \bullet e^{-\int f(x)\, dx} \bullet (-f(x))$$

$$y' + f(x) \bullet y = g(x)$$

Man erhält folgende Gleichung:

$$K'(x) \bullet e^{-\int f(x)\, dx} - K(x) \bullet f(x) \bullet e^{-\int f(x)\, dx} + f(x) \bullet K(x) \bullet e^{-\int f(x)\, dx} = g(x)$$

Das zweite und das dritte Glied heben sich auf, und die DGL wird zu:

$$K'(x) \bullet e^{-\int f(x)\, dx} = g(x) \qquad K(x) = \int g(x) \bullet e^{\int f(x)\, dx}\, dx + C$$

Somit heisst die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y = y_p + y_h = \left(\int g(x) \bullet e^{\int f(x)\, dx}\, dx + C \right) \bullet e^{-\int f(x)\, dx}$$

Beispiel:

$y' + xy = x$

Die Lösung der homogenen DGL ist $y_h = C_1 \bullet e^{-\frac{x^2}{2}}$

Variation der Konstanten: Ansatz: $y = K(x) \bullet e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\qquad y' = K'(x) \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} - K(x) \bullet x \bullet e^{-\frac{x^2}{2}}$

Einsetzen:

$$K'(x) \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} - K(x) \bullet x \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} + x \bullet K(x) \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} = x$$

$$K'(x) = x \bullet e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$K(x) = \int x \bullet e^{\frac{x^2}{2}}\ dx$$

Dieses Integral kann durch Substitution gelöst werden:

$$K(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

K(x) wird in den Ansatz eingesetzt und die Lösung der DGL ist somit:

$$y = y_p + y_h = \left(e^{\frac{x^2}{2}} + C \right) \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + C \bullet e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Aufsuchen einer partikulären Lösung

Wie oben besprochen besteht die Lösung einer Linearen DGL 1. Ordnung aus der Summe einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der homogenen DGL ($y = y_p + y_h$). Wenn also eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL bekannt ist, kann die gesamte Lösung aufgeschrieben werden. Nach dem Lösen der homogenen DGL wird nun im Probierverfahren eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL gesucht. Man versucht einen Ansatz, der je nach Typ der Koeffizientenfunktion f(x) bzw. des Störgliedes abhängt. Der Ansatz wird natürlich noch Parameter enthalten müssen, welche zu bestimmen sind.

Beispiel:

$y' - (\tan x) \bullet y = 2 \sin x$

homogene DGL: $y' - (\tan x) \bullet y = 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \tan x\ dx$$

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln|C| = \ln \left| \frac{C}{\cos x} \right|$$

$$y_h = \frac{C}{\cos x} \qquad (C \quad R)$$

Ansatz: $y_p = A \bullet \cos x$

$y_p' = -A \bullet \sin x$ **einsetzen**

$-A \bullet \sin x - (\tan x) \bullet A \bullet \cos x = 2 \sin x$

$-2A \bullet \sin x = 2 \sin x$

$A = -1$

Das Aufsuchen einer partikulären Lösung braucht etwas Glück und ist nur bei einfachen Funktionen zu empfehlen. Bei linearen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (f(x) = konstant) ist diese Methode allerdings recht erfolgreich, weil sich der Lösungsansatz im wesentlichen nach dem Störglied richtet.

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y' + ay = g(x)$

Die Lösung setzt sich auch hier iweder aus der Summe einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der homogenen DGL zusammen.

$y = y_p + y_h$

$y' + ay = 0$

Die homogene DGL kann durch Trennen der Variablen gelöst werden. Man kann aber auch mit einem Exponentialansatz sehr schnell zur Lösung kommen.

Ansatz: $y_h = C \bullet e^{\lambda x}$

$y_h' = C\lambda \bullet e^{\lambda x}$

$C\lambda \bullet e^{\lambda x} + a \bullet C \bullet e^{\lambda x} = 0$

$\lambda = -a$

$y_h = C \bullet e^{-ax}$ (C R)

Die partikuläre Lösung kann durch *"Variation der Konstanten"* oder durch *"Aufsuchen einer partikulären Lösung"* gefunden werden. Meistens ist das Aufsuchen einer partikulären Lösung zweckmässiger, weil der Ansatz nur vom Typ des Störgliedes abhängt. Folgende Empfehlungen führen meist zur Lösung:

Störglied $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Konstante Funktion	Konstante Funktion $y_p = c_0$
Lineare Funktion	Lineare Funktion $y_p = c_1x + c_0$
Quadratische Funktion	Quadratische Funktion $y_p = c_2x^2 + c_1x + c_0$
Polynomfunktion vom Grad n	Polynomfunktion vom Grad n $y_p = c_nx^n + \ldots + c_1x + c_0$
$g(x) = A \bullet \sin(\omega x)$	$y_p = C_1 \bullet \sin(\omega x) + C_2 \bullet \cos(\omega x)$
$g(x) = B \bullet \cos(\omega x)$	oder
$g(x) = A \bullet \sin(\omega x) + B \bullet \cos(\omega x)$	$y_p = C \bullet \sin(\omega x + \phi)$
$g(x) = A \bullet e^{bx}$	$y_p = C \bullet e^{bx}$ (für $b \neq -a$) $y_p = Cx \bullet e^{bx}$ (für $b = -a$)

Beispiel 1:

$y' + 2y = 2\sin x$

homogene DGL: $y' + 2y = 0$

Exponentialansatz: $y_h = C \bullet e^{\lambda x}$

$y_h' = C\lambda \bullet e^{\lambda x}$

$C\lambda \bullet e^{\lambda x} + 2 \bullet C \bullet e^{\lambda x} = 0$

$\lambda + 2 = 0$

$\lambda = -2$

$y_h = C \bullet e^{-2x}$

Aufsuchen einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL:

Ansatz: $y_p = C_1 \bullet \sin x + C_2 \bullet \cos x$

$y_p' = C_1 \bullet \cos x - C_2 \bullet \sin x$

Einsetzen: $C_1 \bullet \cos x - C_2 \bullet \sin x + 2C_1 \bullet \sin x + 2C_2 \bullet \cos x = 2\sin x$

Koeffizientenvergleich:

sin x: $2C_1 - C_2 = 2$

cos x: $C_1 + 2C_2 = 0$

$C_1 = \frac{4}{5}, C_2 = -\frac{2}{5}$

$y = y_p + y_h = \frac{4}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + C \bullet e^{-2x}$

Beispiel 2:

$y' - 3y = 2x^2 - 4$

homogene DGL:

Ansatz: $y_h = C \bullet e^{\lambda x}$

$y_h' = C\lambda \bullet e^{\lambda x}$

Einsetzen: $C\lambda \bullet e^{\lambda x} - 3C \bullet e^{\lambda x} = 0$

$\lambda = 3$

$y_h = C \bullet e^{3x}$

Aufsuchen einer partikulären Lösung:

Ansatz: $y_p = ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2ax + b$

Einsetzen: $2ax + b - 3ax^2 - 3bx - 3c = 2x^2 - 4$

Koeffizientenvergleich:

x^2: $-3a = 2$

x: $2a - 3b = 0$

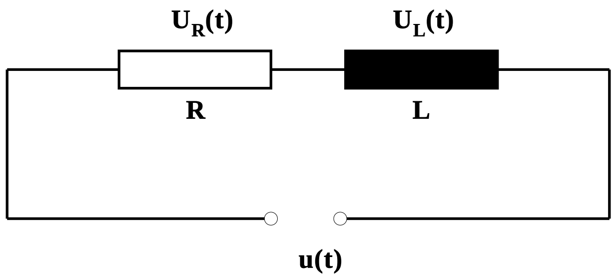
x^0: $b - 3c = -4$

$a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{4}{9}, c = -\frac{32}{27}$

$y = y_p + y_h = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{32}{27} + C \bullet e^{3x}$

Praktische Anwendungen: Wechselstromkreis

In einem Wechselstromkreis sind ein ohmscher Widerstand R und eine Induktivität L in Serie geschaltet:



Nach der Maschenregel gilt: $u(t) = u_R(t) + u_L(t)$

Ohmsches Gesetz: $u_R(t) = R \cdot i$

Induktionsgesetz: $u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$

Quellspannung: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$

Somit erhält man die Differentialgleichung: $\hat{u} \cdot \sin(\omega t) = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$

Umformen: $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t)$

homogene DGL: $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = 0$

Exponentialansatz: $i_h = C \cdot e^{\lambda t}$

$$\frac{di_h}{dt} = C\lambda \cdot e^{\lambda t}$$

$$C\lambda \cdot e^{\lambda t} + \frac{R}{L} \cdot C \cdot e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = -\frac{R}{L}$$

$$i_h = C \cdot e^{-\frac{R}{L} t}$$

Aufsuchen einer partikulären Lösung:

Ansatz: $i_p = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \phi)$

$$\frac{di_p}{dt} = \hat{\imath}\omega \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Einsetzen: $\hat{\imath}\omega \cdot \cos(\omega t + \phi) + \frac{R}{L} \cdot \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \phi) = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t)$

$$\hat{\imath}\omega \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\phi) - \hat{\imath}\omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\phi) + \frac{R}{L} \cdot \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\phi) + \frac{R}{L} \cdot \hat{\imath} \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\phi) = \frac{\hat{u}}{L} \cdot \sin(\omega t)$$

Koeffizientenvergleich:

$\sin(\omega t)$: $\quad - \hat{\imath}\omega \cdot \sin(\phi) + \frac{R}{L} \cdot \hat{\imath} \cdot \cos(\phi) = \frac{\hat{u}}{L}$

$\cos(\omega t)$: $\quad \hat{\imath}\omega \cdot \cos(\phi) + \frac{R}{L} \cdot \hat{\imath} \cdot \sin(\phi) = 0$

Beide Gleichungen werden quadriert und addiert. Dabei fällt φ heraus, und die Gleichung kann auf î gelöst werden:

$$(\hat{\imath}\omega L)^2 \cdot \sin^2(\phi) - 2\hat{\imath}^2\omega\, LR \cdot \sin(\phi)\cos(\phi) + (R\hat{\imath})^2 \cdot \cos^2(\phi) = \hat{u}^2$$

$$(\hat{\imath}\omega L)^2 \cdot \cos^2(\phi) + 2\hat{\imath}^2\omega\, LR \cdot \sin(\phi)\cos(\phi) + (R\hat{\imath})^2 \cdot \sin^2(\phi) = 0$$

$$(\hat{\imath}\omega L)^2\left[\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right] + (R\hat{\imath})^2\left[\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)\right] = \hat{u}^2$$

$$\hat{\imath}^2 = \frac{\hat{u}^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\hat{\imath} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Aus der zweiten Gleichung kann ϕ berechnet werden:

$$\tan(\phi) = -\frac{\omega L}{R}$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{\omega L}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL heisst:

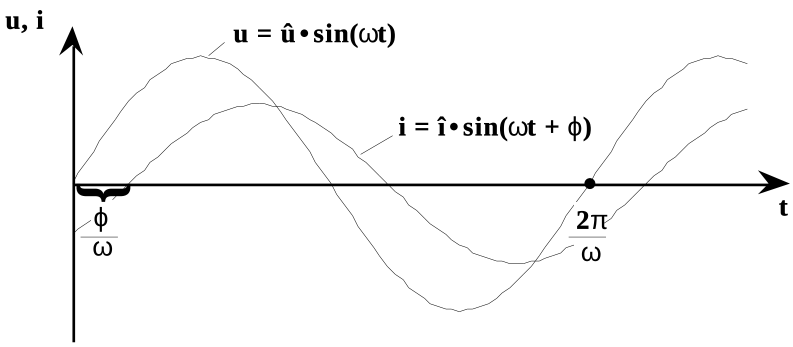
$$i_p(t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \left(\sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)\right)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL heisst:

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \left(\sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)\right) + C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Physikalische Interpretation:

Die partikuläre Lösung stellt einen Wechselstrom mit der Amplitude $\hat{\imath}$ und dem Phasenwinkel ϕ dar. R ist der ohmsche und ωL der induktive Widerstand des Stromkreises. Der Scheinwiderstand des Wechselstromkreises beträgt $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$. Der Wechselstrom läuft der angelegten Wechselspannung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ um den Phasenwinkel ϕ hinterher, ϕ ist die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom.



Die Lösung der homogenen DGL ergibt einen exponentiell abklingenden Gleichstrom i_h, der den Wechselstrom i_p überlagert. Dieser Gleichstrom spielt aber nach einer kurzen Einschwingphase praktisch keine Rolle mehr. Für hinreichend grosse t kann dieser Teil ganz weggelassen werden und der Strom wird nur mehr durch die partikuläre Lösung $i_p(t)$ angegeben.

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

y" + ay' + by = g(x)

(y, y', y" treten linear auf, gemischte Produkte wie yy', yy" und y'y" sind nicht erlaubt)

Das Vorgehen zur Lösung von linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffinienten ist gleich wie bei jenen 1. Ordnung, d.h. es wird zuerst die allgemeine Lösung der homogenen und nachher eine parikuläre Lösung der inhomogenen DGL gesucht. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL setzt sich aus der partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen DGL zusammen ($y = y_p + y_h$).

Grundsätzlich ist für die homogene DGL ein Exponentialansatz zu empfehlen. Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL richtet sich nach der Art der Störfunktion und wird entsprechend angesetzt (siehe Tabelle weiter unten).

Lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

y" + ay' + by = 0

Exponentialansatz: $y_h = e^{\lambda x}$

$y_h' = \lambda e^{\lambda x}$

$y_h'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 \quad \text{(Charakteristische Gleichung)}$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Die Diskriminante $D = a^2 - 4b$ entscheidet über die Art der Lösung, wobei 3 Fälle zu unterscheiden sind.

1. **$D = a^2 - 4b > 0$**

   Es gibt zwei verschiedene reelle Lösungen für λ, nämlich λ_1 und λ_2.

   Die Lösungsfunktionen heissen: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2 = e^{\lambda_2 x}$.

   Die beiden Lösungen y_1 und y_2 sind partikuläre Lösungen. wenn wir die allgemeine Lösung suchen, erwarten wir zwei Parameter (C_1 und C_2).

Satz 1: Ist $y_1(x)$ eine Lösung der linearen homogenen DGL , so ist auch $y(x) = C_1 \bullet y_1(x)$ eine Lösung dieser DGL.

Satz 2: Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der linearen homogenen DGL, so ist auch die Linearkombination der beiden Lösungen $y(x) = C_1 \bullet y_1(x) + C_2 \bullet y_2(x)$ eine Lösung dieser DGL.

Beweis: Satz 1 ist ein Sonderfall von Satz 2 ($C_2 = 0$). Deshalb muss nur Satz 2 bewiesen werden.
$y(x) = C_1 \bullet y_1(x) + C_2 \bullet y_2(x)$
$y'(x) = C_1 \bullet y_1'(x) + C_2 \bullet y_2'(x)$
$y''(x) = C_1 \bullet y_1''(x) + C_2 \bullet y_2''(x)$

Einsetzen in y" + ay' + by = 0

$$C_1 \bullet y_1''(x) + C_2 \bullet y_2''(x) + aC_1 \bullet y_1'(x) + aC_2 \bullet y_2'(x) + bC_1 \bullet y_1(x) + bC_2 \bullet y_2(x) = 0$$

$$[C_1 \bullet y_1''(x) + aC_1 \bullet y_1'(x) + bC_1 \bullet y_1(x)] + [C_2 \bullet y_2''(x) + aC_2 \bullet y_2'(x) + bC_2 \bullet y_2(x)] = 0$$

Die beiden eckigen Klammern ergeben jeweils Null, weil y_1 und y_2 Lösungen der homogenen DGL sind.

Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhält man:

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \bullet e^{\lambda_1 x} + C_2 \bullet e^{\lambda_2 x} \qquad (C_1 \quad R, C_2 \quad R)$$

Beispiel: $y'' + 2y' - 8y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$

$\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 2$

Lösungen: $y_1 = e^{-4x},\ y_2 = e^{2x}$

Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 \bullet e^{-4x} + C_2 \bullet e^{2x}$ (C_1 R, C_2 R)

2. $D = a^2 - 4b = 0$

Es gibt genau eine reelle Lösung für λ.

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$

$y_1 = y_2 = e^{-\frac{a}{2}x}$

Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL brauchen wir aber zwei Parameter, weil diese Lösung eine zweiparametrige Funktionenschar bildet.

Mit *Variation der Konstanten* kann die allgemeine Lösung gewonnen werden.

$$y = K(x) \bullet e^{-\frac{a}{2}x}$$

$$y' = K'(x) \bullet e^{-\frac{a}{2}x} - K(x) \bullet \frac{a}{2} \bullet e^{-\frac{a}{2}x} = e^{-\frac{a}{2}x}\left[K'(x) - K(x) \bullet \frac{a}{2}\right]$$

$$y'' = -\frac{a}{2}\, e^{-\frac{a}{2}x} \bullet \left[K'(x) - K(x) \bullet \frac{a}{2}\right] + e^{-\frac{a}{2}x} \bullet \left[K''(x) - K'(x) \bullet \frac{a}{2}\right] = e^{-\frac{a}{2}x} \bullet \left[K''(x) - aK'(x) + \frac{a^2}{4} \bullet K(x)\right]$$

Einsetzen in die DGL:

$$e^{-\frac{a}{2}x} \bullet \left[K''(x) - aK'(x) + \frac{a^2}{4} \bullet K(x)\right] + a \bullet e^{-\frac{a}{2}x}\left[K'(x) - K(x) \bullet \frac{a}{2}\right] + b \bullet K(x) \bullet e^{-\frac{a}{2}x} = 0$$

$$K''(x) - aK'(x) + \frac{a^2}{4} \bullet K(x) + aK'(x) - K(x) \bullet \frac{a^2}{2} + b \bullet K(x) = 0$$

$$K''(x) + \frac{a^2}{4} \bullet K(x) - K(x) \bullet \frac{a^2}{2} + b \bullet K(x) = 0$$

$$K''(x) - \frac{a^2}{4} \bullet K(x) + b \bullet K(x) = 0$$

$$K''(x) - \frac{a^2 - 4b}{4} K(x) = 0$$

Weil aber die Diskriminante $D = a^2 - 4b = 0$ ist, fällt das Glied mit $K(x)$ weg.

$K''(x) = 0$

Zweimal integrieren führt zu einer zweiparametrigen Lösung für $K(x)$:

$K'(x) = C_1$

$K(x) = \int C_1\, dx = C_1 x + C_2$

Somit heisst die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y_h(x) = (C_1 x + C_2) \bullet e^{-\frac{a}{2}x} \qquad (C_1\ \ R,\ C_2\ \ R)$$

Beispiel: $y'' - 8y' + 16y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$

Partikuläre Lösung: $y = e^{4x}$

Allgemeine Lösung: $y(x) = (C_1 x + C_2)e^{4x}$ (C_1 R, C_2 R)

3. $D = a^2 - 4b < 0$

Es gibt zwei konjugiert komplexe Lösungen λ_1 und λ_2.

Mit den Abkürzungen $\alpha = -\frac{a}{2}$ und $\omega = \sqrt{\frac{4b - a^2}{4}} > 0$ kann man die Lösungen in folgender Form schreiben:

$y_1 = e^{(\alpha + j\omega)x}$ und $y_2 = e^{(\alpha - j\omega)x}$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = C_1 \bullet e^{(\alpha + j\omega)x} + C_2 \bullet e^{(\alpha - j\omega)x} = e^{\alpha x}\left(C_1 \bullet e^{j\omega x} + C_2 \bullet e^{-j\omega x}\right)$$

Mit dem Eulerschen Satz kann die allgemeine Lösung weiter umgeformt werden:

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(C_1\cos(\omega x) + C_1 j \bullet \sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x) - C_2 j \bullet \sin(\omega x)\right) =$$
$$= e^{\alpha x}\Big(j\left(C_1 - C_2\right)\sin(\omega x) + \left(C_1 + C_2\right)\cos(\omega x)\Big) = e^{\alpha x}\left(jA_1\sin(\omega x) + A_2\cos(\omega x)\right)$$

Satz 3: Ist $y(x) = u(x) + j\,v(x)$ eine komplexwertige Lösung der linearen homogenen DGL, so sind Realteil $u(x)$ und Imaginärteil $v(x)$ selbst auch (reelle) Lösungen dieser DGL.

Beweis:
$y(x) = u(x) + j\,v(x)$
$y'(x) = u'(x) + jv'(x)$
$y''(x) = u''(x) + jv''(x)$

$y'' + ay' + by = 0$

$u''(x) + jv''(x) + au'(x) + ajv'(x) + bu(x) + bjv(x) = 0$

$\left(u''(x) + au'(x) + bu(x)\right) + j\left(v''(x) + av'(x) + bv(x)\right) = 0$

Die letzte Gleichung kann aber nur gültig sein, wenn Realteil und Imaginärteil gleichzeitig verschwinden. Es gilt:

$u''(x) + au'(x) + bu(x) = 0$

$v''(x) + av'(x) + bv(x) = 0$

Das bedeutet aber, dass $u(x)$ und $v(x)$ Lösungen der DGL sind.

Mit diesem Satz kann die Lösung der homogenen DGL mit reller Basis geschrieben werden:

$y_h(x) = e^{\alpha x}\left(B_1\sin(\omega x) + B_2\cos(\omega x)\right) \qquad (B_1 \quad R,\ B_2 \quad R)$

Beispiel: $y'' + 4y' + 13y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$

$\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm 3j$

$\alpha = -2,\ \omega = 3$

Reelle Partikularlösungen: $y_1 = e^{-2x}\sin(3x)$, $y_2 = e^{-2x}\cos(3x)$

Allgemeine Lösung: $y(x) = e^{-2x}\left(B_1\sin(3x) + B_2\cos(3x)\right)$

Linear unabhängige Lösungen, Wronski-Determinante

In allen drei Fällen, nämlich bei rellen wie auch bei komplexen Lösungen der charakteristischen Gleichung, haben wir als Lösung eine zweiparametrige Funktionenschar gewonnen. Dabei wurde diese Schar mit zwei Basisfunktionen aufgebaut.

Definition:
Zwei Lösungen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

werden als Basisfunktionen oder Basislösungen der Differentialgleichung bezeichnet, wenn die mit ihnen gebildete Wronski-Determinante

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Fall 1: $D = a^2 - 4b > 0$, Basislösungen: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$

Wronski-Determinante $W(y_1;y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} = (\lambda_2 - \lambda_1)\cdot e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}$

Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist die Wronski-Determinante ungleich Null, y_1 und y_2 sind also Basisfunktionen.

Fall 2: $D = a^2 - 4b = 0$, Basislösungen: $y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}$, $y_2(x) = xe^{-\frac{a}{2}x}$

Wronski-Determinante $W(y_1;y_2) = \begin{vmatrix} e^{-\frac{a}{2}x} & xe^{-\frac{a}{2}x} \\ -\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x} & \left(1 - \frac{a}{2}x\right)\cdot e^{-\frac{a}{2}x} \end{vmatrix} =$

$$= \left(1 - \frac{a}{2}x\right)\cdot e^{-ax} - \left(-\frac{a}{2}x\right)e^{-ax} = e^{-ax} \neq 0$$

Fall 3: $D = a^2 - 4b < 0$, Basislösungen: $y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\omega x)$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\omega x)$

Wronski-Determinante $W(y_1;y_2) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\sin\omega x & e^{\alpha x}\cos\omega x \\ e^{\alpha x}(\alpha\sin\omega x + \omega\cos\omega x) & e^{\alpha x}(\alpha\cos\omega x - \omega\sin\omega x) \end{vmatrix} =$

$$= e^{2\alpha x}(\alpha\sin\omega x\cos\omega x - \omega\sin^2\omega x) - e^{2\alpha x}(\alpha\sin\omega x\cos\omega x + \omega\cos^2\omega x) =$$
$$= -\omega e^{2\alpha x}(\sin^2\omega x + \cos^2\omega x) = -\omega e^{2\alpha x} \neq 0$$

So sind also in allen drei Fällen die gefundenen Lösungen Basislösungen.

Zwei Basislösungen werden auch als linear unabhängig bezeichnet. Diese Bezeichnung kommt aus der linearen Algebra und besagt, dass die Gleichung

$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0$ nur mit $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$ lösbar ist.

Es genügt zu zeigen, dass die Wronski-Determinante ungleich Null ist, damit zwei Lösungen als linear unabhängig gelten können. Ist die Wronski-Determinante zweier Lösungen hingegen gleich Null, sind die beiden Lösungen linear abhängig.

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist die Linearkombination zweier linear unabhängiger Lösungen (Basislösungen).

Lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wie schon bei den Linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung ist auch hier der Typ des Störgliedes für den Ansatz entscheidend. Folgende Ansätze sind für das Aufsuchen einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL zu empfehlen:

Störglied g(x)	**Lösungsansatz $y_p(x)$**
Polynomfunktion vom Grad n $g(x) = P_n(x)$	$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & \text{für } b \neq 0 \\ x \cdot Q_n(x) & \text{für } a \neq 0,\ b = 0 \\ x^2 \cdot Q_n(x) & \text{für } a = b = 0 \end{cases}$ $Q_n(x)$: Polynom vom Grad n
Sinusfunktion $g(x) = \sin(\beta x)$ oder **Cosinusfunktion** $g(x) = \cos(\beta x)$	$j\beta$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = C_1 \cdot \sin(\beta x) + C_2 \cdot \cos(\beta x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \phi)$ $j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = x[A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)]$
Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$	c ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{cx}$ c ist eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = Ax \cdot e^{cx}$ c ist eine doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = Ax^2 \cdot e^{cx}$

Beispiel:

$y'' + 3y' - 4y = 2x^2 - 4$

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ (Charakteristische Gleichung)

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -4$ $\qquad y_h = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-4x}$

$y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y_p' = 2Ax + B$

$y_p'' = 2A$

Einsetzen:

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 4$$
$$2A + 6Ax + 3B - 4Ax^2 - 4Bx - 4C = 2x^2 - 4$$

Koeffizientenvergleich:

x^2: $\quad -4A = 2$

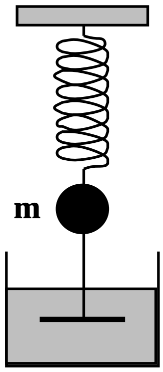
x: $\quad 6A - 4B = 0$

x^0: $\quad \underline{2A + 3B - 4C = -4}$

$A = -\frac{1}{2},\ B = -\frac{3}{4},\ C = \frac{3}{16}$

$y = y_h + y_p = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-4x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{16}$

Die Schwingung eines Federpendels



An eine Schraubenfeder mit der Federkonstanten D ist eine Masse m angehängt. Eine Dämpfungsfahne taucht in eine Flüssigkeit ein und verursacht eine zur Geschwindigkeit proportionale Widerstandskraft. Die Masse wird aus der Ruhestellung ausgelenkt. Nach dem Loslassen beginnt eine periodische Hin- und Herbewegung, eine Schwingung. Nach Newton kann folgende Gleichung angesetzt werden:

$$m\ddot{y} = -Dy - \beta\dot{y}$$

Die auf die Masse wirkende Kraft setzt sich aus der rücktreibenden Kraft der Feder -Dy und der Widerstandskraft $-\beta\dot{y}$ zusammen.

Es seien folgende Anfangswerte gegeben: $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$

Durch Umformen erhält man:

$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + Dy = 0 \qquad |:m$$

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$$

Mit $\delta = \frac{\beta}{2m}$ und $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ kann man schreiben:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad \text{(Charakteristische Gleichung)}$$

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Bei starker Dämpfung ($\delta > \omega_0$) werden die Lösungen der charakteristischen Gleichung reell sein, bei schwacher Dämpfung ($\delta < \omega_0$) sind sie komplex. Dazwischen gibt es einen Grenzfall. Es wird zunächst der Fall von schwacher Dämpfung betrachtet.

$\delta < \omega_0$: (Schwingfall)

$$\alpha = -\delta,\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL heisst:

$$y_h = e^{\alpha t}(C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t)) = e^{-\delta t}\left(C_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\ t\right) + C_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\ t\right)\right)$$

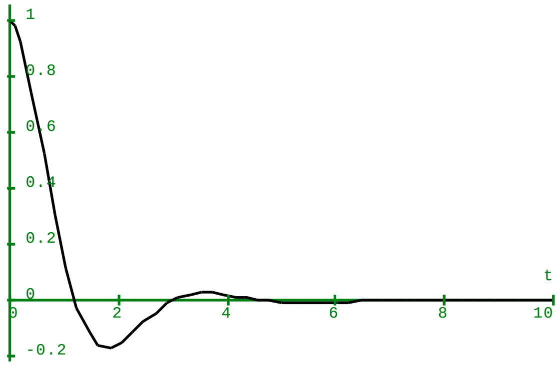
Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich die partikuläre Lösung:

$$y_p = y_0 e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\ t\right) + \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\ t\right)\right)$$

Beispiel:
$\delta = 1$, $\omega_0 = 2$, $y_0 = 1$, Lösung mit Maple V:

```
restart:
DGL:=diff(y(t),t$2) + 2*delta*diff(y(t),t) + omega0^2*y(t) = 0;
delta:=1:omega0:=2:y0:=1:
L:=dsolve({DGL,y(0)=y0,D(y)(0)=0},y(t));
assign(L):
              / 2       \
              |d        |             /d       \           2
       DGL := |--- y(t)| + 2 delta |-- y(t)| + omega0  y(t) = 0
              |  2      |             \dt      /
              \dt       /

L := y(t) = 1/3 sqrt(3) exp(-t) sin(sqrt(3) t) + exp(-t) cos(sqrt(3) t)
```

```
plot(y(t),t=0..10);
```



$\delta > \omega_0$: Bei starker Dämpfung kommt der sogenannte 'Kriechfall' zustande.

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ sind beide negativ, wir bezeichnen sie mit $\lambda_1 = -k_1$ bzw. $\lambda_2 = -k_2$.

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL heisst:

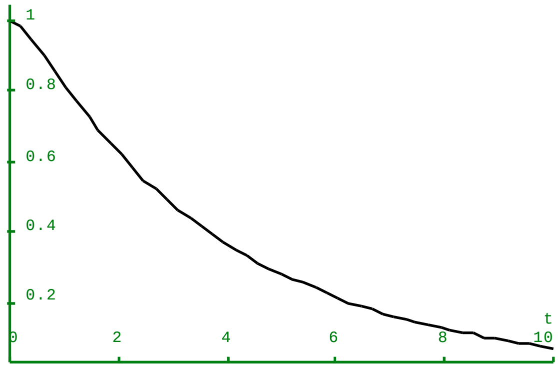
$y_h = C_1 \bullet e^{-k_1 t} + C_2 \bullet e^{-k_2 t}$

Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich die partikuläre Lösung:

$$y_p = \frac{y_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \left(\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) t} - \left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) t} \right)$$

Beispiel:
$\delta = 2$, $\omega_0 = 1$, $y_0 = 1$, Lösung mit Maple V:

```
restart:
DGL:=diff(y(t),t$2) + 2*delta*diff(y(t),t) + omega0^2*y(t) = 0;
delta:=2:omega0:=1:y0:=1:
L:=dsolve({DGL,y(0)=y0,D(y)(0)=0},y(t));
assign(L):
              / 2      \
              |d       |            /d      \         2
       DGL := |--- y(t)| + 2 delta |-- y(t)| + omega0  y(t) = 0
              |  2     |            \dt     /
              \dt      /

L := y(t) = (1/2 + 1/3 sqrt(3)) exp((-2 + sqrt(3)) t)
         + (- 1/3 sqrt(3) + 1/2) exp(-(2 + sqrt(3)) t)
plot(y(t),t=0..10);
```



$\delta = \omega_0$: Aperiodischer Grenzfall

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind beide gleich: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$.

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL heisst dann:
$y_h = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 \bullet t)$

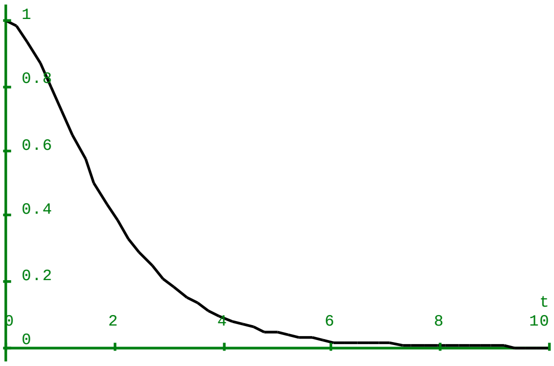
Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich die partikuläre Lösung:

$\mathbf{y_p = y_0 e^{-\delta t}(1 + \delta t)}$

Beispiel:

$\delta = 1$, $\omega_0 = 1$, $y_0 = 1$, Lösung mit Maple V:

```
restart:
DGL:=diff(y(t),t$2) + 2*delta*diff(y(t),t) + omega0^2*y(t) = 0;
delta:=1:omega0:=1:y0:=1:
L:=dsolve({DGL,y(0)=y0,D(y)(0)=0},y(t));
assign(L):
              / 2        \
              |d         |            /d        \          2
       DGL := |--- y(t)| + 2 delta |-- y(t)| + omega0  y(t) = 0
              |  2       |            \dt       /
              \dt        /

L := y(t) = exp(-t) + exp(-t) t
plot(y(t),t=0..10);
```



Im aperiodischen Grenzfall schwingt das Pendel zurück, ohne die Ruhelage zu überschreiten. Für das Abklingen der Schwingung wird minimale Zeit benötigt.

Erzwungene Schwingung, Resonanz

Nun wird das Federpendel durch eine externe periodische Kraft $F_0\sin(\omega_s t)$ angeregt. Die dazugehörige inhomogene DGL lautet:

$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + Dy = 0 \qquad |:m$$

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = \frac{F_0}{m}\sin(\omega_s t)$$

Mit $\delta = \frac{\beta}{2m}$ und $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ kann man schreiben:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\sin(\omega_s t) = a_0\sin(\omega_s t)$$

Es wird hier nur der Schwingfall ($\delta < \omega_0$) betrachtet.

Die Lösung der homogenen DGL ist wie oben zu finden:

$$y_h = e^{\alpha t}(C_1 \bullet \sin(\omega t) + C_2 \bullet \cos(\omega t)) = e^{-\delta t}\left(C_1 \bullet \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right) + C_2 \bullet \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right)\right)$$

Und mit den Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$y_{ph} = y_0 e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \bullet \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right) + \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right)\right)$$

Für die inhomogene DGL mus eine partikuläre Lösung gesucht werden. Durch Orientierung an der Störfunktion ist dies leicht zu tun.

$$y_p = A \bullet \sin(\omega_s t + \phi)$$

$$\dot{y}_p = \omega_s A \bullet \cos(\omega_s t + \phi)$$

$$\ddot{y}_p = -\omega_s^2 A \bullet \sin(\omega_s t + \phi)$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$-\omega_s^2 A \sin(\omega_s t + \phi) + 2\delta\omega_s A \cos(\omega_s t + \phi) + \omega_0^2 A \sin(\omega_s t + \phi) = a_0 \sin(\omega_s t)$$

$$-\omega_2^2 A \sin(\omega_s t)\cos\phi - \omega_s^2 A \cos(\omega_s t)\sin\phi + 2\delta\omega_s A \cos(\omega_s t)\cos\phi - 2\delta\omega_s A \sin(\omega_s t)\sin\phi +$$
$$+\omega_0^2 A \sin(\omega_s t)\cos\phi + \omega_0^2 A \cos(\omega_s t)\sin\phi = a_0 \sin(\omega_s t)$$

Koeffizientenvergleich:

$\sin(\omega_s t)$: $\quad -\omega_s^2 A \cos\phi - 2\delta\omega_s A \sin\phi + \omega_0^2 A \cos\phi = a_0$

$\cos(\omega_s t)$: $\quad \underline{-\omega_s^2 A \sin\phi + 2\delta\omega_s A \cos\phi + \omega_0^2 A \sin\phi = 0}$

$$A\cos\phi\,(\omega_0^2 - \omega_s^2) - 2\delta A\omega_s \sin\phi = a_0$$

$$\underline{A\sin\phi\,(\omega_0^2 - \omega_s^2) + 2\delta A\omega_s \cos\phi = 0}$$

Aus der zweiten Gleichung kann ϕ berechnet werden:

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\delta\omega_s}{\omega_s^2 - \omega_0^2}\right)$$

Werden beide Gleichungen quadriert, lässt sich auch das A leicht berechnen:

$$A^2\cos^2\phi\,(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 - 4\delta\omega_s A^2(\omega_0^2 - \omega_s^2)\sin\phi\cos\phi + 4\delta^2\omega_s^2 A^2 \sin^2\phi = a_0^2$$

$$A^2\sin^2\phi\,(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\delta\omega_s A^2(\omega_0^2 - \omega_s^2)\sin\phi\cos\phi + 4\delta^2\omega_s^2 A^2 \cos^2\phi = 0$$

Addieren der beiden Gleichungen führt zur Form $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$.

$$A^2(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\delta^2\omega_s^2 A^2 = a_0^2$$

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\delta^2\omega_s^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\delta^2\omega_s^2}}$$

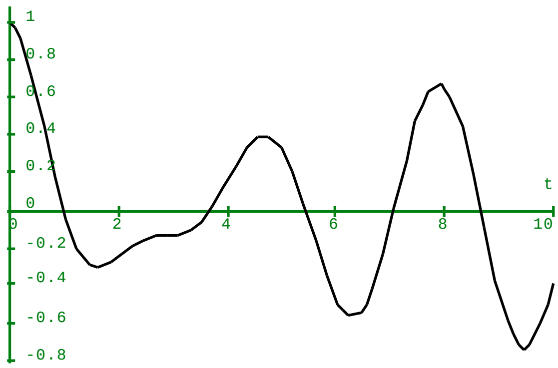
Die Lösung der DGL lautet dann:

$$y = y_h + y_p = y_0 e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \bullet \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right) + \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right)\right) +$$

$$+ \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\delta^2\omega_s^2}} \sin\left(\omega_s t + \arctan\left(\frac{2\delta\omega_s}{\omega_s^2 - \omega_0^2}\right)\right)$$

Beispiel:
$\delta = 0.3$, $\omega_0 = 2$, $y_0 = 1$, $F_0 = 1$, $m = 1$, $\omega_s = 1.977$, Lösung mit Maple V:

```
restart:Digits:=3:
DGL:=diff(y(t),t$2) + 2*delta*diff(y(t),t) + omega0^2*y(t) = F0/m*sin(omega1*t);
delta:=0.3:omega0:=2:y0:=1:F0:=1:m:=1:omega1:=1.977:
L:=dsolve({DGL,y(0)=y0,D(y)(0)=0},y(t));
assign(L):
         / 2       \
         |d        |           /d       \          2         F0 sin(omega1 t)
  DGL := |--- y(t)| + 2 delta |-- y(t)| + omega0  y(t) = ----------------
         |  2      |           \dt      /                          m
         \dt       /

              5996530481523
 L := y(t) = --------------- exp(- 3/10 t) sin(1/10 sqrt(391) t) sqrt(391)
             553436017081831

           2601637383841
         + ------------- exp(- 3/10 t) cos(1/10 sqrt(391) t)
           1415437383841

            91471000000      1977      1186200000000     1977
         + ------------- sin(---- t) - ------------- cos(---- t)
           1415437383841     1000      1415437383841     1000

plot(y(t),t=0..10);
```



Das Diagramm zeigt, dass am Anfang die Lösung der homogenen DGL die Kurve stark beeinflusst. Mit steigender Zeit t wird sich aber die periodische Anregungskraft durchsetzen. Es ist hier bereits ersichtlich, wie die Schwingung des Pendels die Amplitude vergrössert (Resonanz).

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$

Wie üblich wird zunächst die homogene DGL gelöst.

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

Mit dem Exponentialansatz $y_h = e^{-\lambda t}$ erhält man die charakteristische Gleichung:

$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

Diese Gleichung n-ten Grades hat maximal n unterschiedliche Lösungen. Es kann reelle oder komplexe (jeweils konjugiert komplex) geben. Es kann auch sein, dass es Mehrfachlösungen gibt. Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL kann die Fallunterscheidung bei den Differentialgleichungen 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten wegleitend dienen.

wenn die homogene DGL gelöst ist, kann mit den üblichen Ansatzmethoden eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL gesucht werden. Im folgenden werden drei Beispiele vorgestellt, an denen die Lösungsprizipien dargestellt werden.

Beispiel 1:

$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 4$

homogene DGL: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$

$y_h = C_1 \bullet e^x + C_2 \bullet e^{-x} + C_3 e^{2x}$

Exponentialansatz zum Aufsuchen einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL:

$y_p = ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

$y_p''' = 0$

Einsetzen: $0 - 2(2a) - (2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 4$

$-4a - 2ax - b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 2x^2 - 4$

Koeffizientenvergleich:

x^2: $2a = 2$

x: $-2a + 2b = 0$

x^0: $\underline{-4a - b + 2c = -4}$

$a = 1, b = 1, c = \frac{1}{2}$

$y_p = x^2 + x + \frac{1}{2}$

$y = y_p + y_h = x^2 + x + \frac{1}{2} + C_1 \bullet e^x + C_2 \bullet e^{-x} + C_3 e^{2x}$

Beispiel 2:

$y''' + 2y'' + y' + 2y = 104 \sin(3x)$

homogene DGL: $y''' + 2y'' + y' + 2y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = j$ $\alpha_1 = 0, \omega_1 = 1$
$\lambda_2 = -j$ $\alpha_2 = 0, \omega_2 = -1$
$\lambda_3 = -2$

$y_h = C_1 \bullet \sin x + C_2 \bullet \cos x + C_3 e^{-2x}$

Ansatz zum Aufsuchen einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL:

$y_p = A \sin(3x + \phi)$

$y_p' = 3A \cos(3x + \phi)$

$y_p'' = -9A \sin(3x + \phi)$

$y_p''' = -27A \cos(3x + \phi)$

Einsetzen: $-27A \cos(3x + \phi) - 18A \sin(3x + \phi) + 3A \cos(3x + \phi) + 2A \sin(3x + \phi) = 104 \sin(3x)$

$-27A \cos(3x) \cos\phi + 27A \sin(3x) \sin\phi - 18A \sin(3x) \cos\phi - 18A \cos(3x) \sin\phi +$
$+ 3A \cos(3x) \cos\phi - 3A \sin(3x) \sin\phi + 2A \sin(3x) \cos\phi + 2A \cos(3x) \sin\phi = 104 \sin(3x)$

Koeffizientenvergleich:

$$
\begin{aligned}
\sin(3x):&\quad 27A \sin\phi - 18A \cos\phi - 3A \sin\phi + 2A \cos\phi = 104 \\
\cos(3x):&\quad \underline{-27A \cos\phi - 18A \sin\phi + 3A \cos\phi + 2A \sin\phi = 0} \\
&\quad 24A \sin\phi - 16A \cos\phi = 104 \quad |:8 \\
&\quad \underline{-24A \cos\phi - 16A \sin\phi = 0} \quad |:(-8)
\end{aligned}
$$

Aus der zweiten Gleichung folgt für $\phi = \arctan(-1.5) = -0{,}983$ rad

Beide Gleichungen quadrieren und dann addieren:

$$
\begin{aligned}
3A \sin\phi - 2A \cos\phi &= 13 \\
\underline{3A \cos\phi + 2A \sin\phi} &\underline{= 0} \\
9A^2 (\sin^2\phi + \cos^2\phi) + 4A^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) &= 13^2 \\
13A^2 &= 13^2 \\
A &= \sqrt{13}
\end{aligned}
$$

$y_p = \sqrt{13} \sin(3x - 0{,}983)$

$y = y_p + y_h = \sqrt{13} \sin(3x - 0{,}983) + C_1 \bullet \sin x + C_2 \bullet \cos x + C_3 e^{-2x}$

Beispiel 3:

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$y_h = (C_1 \bullet x^2 + C_2 \bullet x + C_3) \bullet e^x$

Wie bei den linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann auch hier die Unabhängigkeit der Lösungen mit der Wronski-Determinante überprüft werden.

$$W(y_1; y_2; \ldots; y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Ist der Wert der Wronski-Determinante immer ungleich Null, sind $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ unabhängige Basislösungen.

Wronski-Determinante für das Beispiel 3:

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$y_1(x) = x^2 \bullet e^x$ $\quad y_2(x) = x \bullet e^x$ $\quad y_3(x) = e^x$

$y_1'(x) = e^x(2x + x^2)$ $\quad y_2'(x) = e^x(1 + x)$ $\quad y_3'(x) = e^x$

$y_1''(x) = e^x(2 + 4x + x^2)$ $\quad y_2''(x) = e^x(2 + x)$ $\quad y_3''(x) = e^x$

$$W(y_1; y_2; \ldots; y_n) = \begin{vmatrix} x^2 \bullet e^x & x \bullet e^x & e^x \\ e^x(2x + x^2) & e^x(1 + x) & e^x \\ e^x(2 + 4x + x^2) & e^x(2 + x) & e^x \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x + x^2 & 1 + x & 1 \\ 2 + 4x + x^2 & 2 + x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x} \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2+ 4x & 2 & 0 \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ (2 + 4x) & 2 \end{vmatrix} = e^{3x}(4x - 2 - 4x) = -2e^{3x} \neq 0$$

Allgemeine Symbole

¬	Negation
	Konjunktion (und)
	Disjunktion (oder)
	für alle
	es gibt ein
(→)	Implikation (hat zur Folge)
⇔ (↔)	Äquivalenz von Aussagen (ist gleichbedeutend mit)
	Allzeichen (für alle)
	Existenzquantor (es existiert)
:=	ist Bezeichnung für
=:	wird bezeichnet als
=	ist gleich
≡	Identität (ist identisch)
(a; b),]a; b[	offenes Intervall
[a; b]	abgeschlossenes Intervall

Mengenlehre

	ist Element von
	ist nicht Element von
	ist Teilmenge von
	ist nicht Teilmenge von
	ist Übermenge von
{} = Ø	leere Menge
{x M: E(x)}	Menge aller Elemente x aus M, welche die Eigenschaft E besitzen}
	Vereinigung
	A B := {x : x A oder x B}
∩	Durchschnitt
	A ∩ B := {x : x A und x B}
A \ B	:= {x A : x B} Differenz
$\bar{A}$	Komplementmenge
A x B	:= {(a, b) : a A, b B) kartesisches Produkt
P(M)	Potenzmenge von M
	Menge aller Teilmengen von M

Geometrie

	kongruent
~	ähnlich
	Winkel
	ist senkrecht zu
||	ist parallel zu
Δ	Dreieck
$\vec{a} \bullet \vec{b}$	Skalares (inneres) Produkt von Vektoren
$\vec{a} \times \vec{b}$	Vektorprodukt, äusseres Produkt (Kreuzprodukt) von Vektoren

Arithmetik, Algebra, ...

N	Menge der natürlichen Zahlen
N_0	Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen
Z	Menge der ganzen Zahlen
Z^+	Menge der positiven ganzen Zahlen
Z^-	Menge der negativen ganzen Zahlen
Z_0^+	Z^+ {0}
Z_0^-	Z^- {0}
Q	Menge der rationalen Zahlen
Q^+, Q^-, Q_0^+, Q_0^-	
R	Menge der reellen Zahlen
R^+, R^-, R_0^+, R_0^-	
C	Menge der komplexen Zahlen
+	Addition
-	Subtraktion
. (×)	Multiplikation
:	Division
a | b	a ist Teiler von b
| a |	absoluter Betrag
<, >	kleiner, grösser
≤, ≥	kleiner oder gleich, grösser oder gleich
a << b	a ist wesentlich kleiner als b
$\binom{m}{n}$	Binomialkoeffizient
n!	n-Fakultät, n! = 1•2•3•…•n
sgn	signum, Vorzeichen
∑	Summenzeichen
∏	Produktzeichen

Analysis

lim	Limes, Grenzwert
$\frac{dy}{dx}$	Differentialquotient
$\frac{\partial y}{\partial x_1}$	partielle Ableitung
∫	Integral
→	Grenzwert: geht nach
δ	Variation
∞	unendlich
	Nabla-Operator
Δ	Differenz, Laplace-Operator

[1] Bachmann, H.: Einführung in die Analysis 1-3, 1. Aufl., SABE Verlagsinstitut für Lehrmittel, Zürich, (1975).

[2] Barner, M.: Differential- und Integralrechnung I, 2. Aufl., Sammlung Göschen, Bd. 86, de Gruyter-Verlag, Berlin, (1963).

[3] Bartsch, H.-J.: Mathematische Formeln, 23. Aufl., Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig, (1991).

[4] Brauch, W., Dreyer, H.-J., Haake, W.: Mathematik für Ingenieure, 8. Aufl. Teubner, Stuttgart, (1990).

[5] Burg, K., Haf, H., Wille, F.: Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. 1-5, Teubner, Stuttgart, (1985)

[6] Cigler, J.: Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie, 1. Teil, Vorlesungen über Mathematik, Manz-Verlag, Wien, (1976).

[7] Cigler, J.: Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie, 2. Teil, Vorlesungen über Mathematik, Manz-Verlag, Wien, (1977).

[8] Enzyklopädie Naturwissenschaft und Technik, Bd. 1 - 5, Hrsg. F. Schuh, Verlag Moderne Industrie, München, (1980/81).

[9] Grezet, P.-A.: Cours de Mathématique, 1er e 2e cycle, Ecole supérieure de commerce, Neuchâtel, (1982).

[10] Henn, R., Künzi, H.P.: Einführung in die Unternehmensforschung II, Springer-Verlag, Berlin, (1968).

[11] Ineichen, R.: Einführung in die elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, 5. Aufl., Einzelschriften zur Gestaltung des math.-phys. Unterrichts, Raeber-Verlag, Luzern, 1977.

[12] Kröhnert, H.: Differentialrechnung für die technische Praxis, 1. Aufl., Vogel-Verlag, Würzburg, (1981).

[13] Kirchgraber, U.: Lineare Algebra, Juris Druck+Verlag, Zürich, (1974).

[14] Kowalsky, H.-J.: Lineare Algebra, 6. Aufl., de Gruyter-Verlag, Berlin, (1972).

[15] Manteufel, K., Seiffart, E.: Einführung in die lineare Algebra und lineare Optimierung, Verlag Chemie, Weinheim, (1970).

[16] Meschkowski, H.: Mathematisches Begriffswörterbuch, 4. Aufl., Hochschultaschenbücher, Bd. 99, Bibliographisches Institut, Mannheim, (1976).

[17] Meschkowski, H.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Hochschultaschenbücher, Bd. 285, Bibliographisches Institut, Mannheim, (1968).

[18] Papula, L.: Mathematik für Ingenieure 1, 2. Aufl., Viewegs Fachbücher der Technik, Vieweg, Braunschweig, (1984).

[19] Papula, L.: Übungen zur Mathematik für Ingenieure, Viewegs Fachbücher der Technik, Vieweg, Braunschweig, (1990).

[20] Smirnow, W. I.: Lehrgang der Mathematik, Bd. 1 - 5, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, (1972-74).

[21] v. Finkenstein, K.: Grundkurs Mathematik für Ingenieure, Teubner, Stuttgart, (1986)

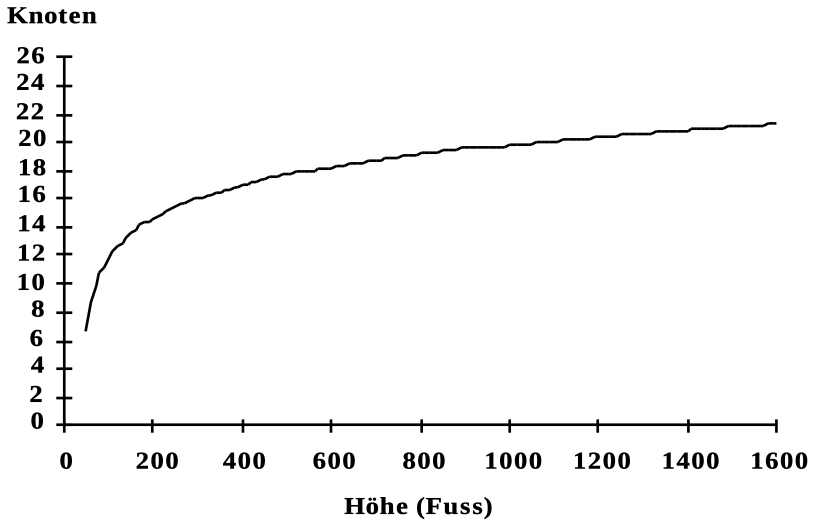
[22] van der Waerden, B.L.: Algebra I, 8. Aufl., Heidelberger Taschenbücher, Bd. 12, Springer-Verlag, Berlin, (1971).

[23] Wittmann, E.Ch.: Elementargeometrie und Wirklichkeit, Einführung in geometrisches Denken, Vieweg, Braunschweig, (1987).

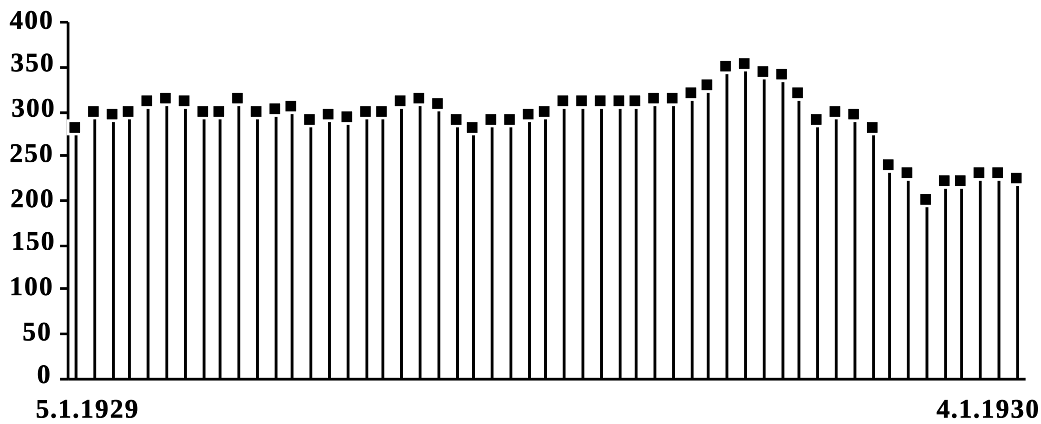
[24] Zimmermann, H.-J.: Fuzzy Set Theory - and Its Applications, 2. Aufl., Kluwer Academic Publishers, Boston, (1991).

Alpha	α	Α
Beta	β	Β
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ε	Ε
Zeta	ζ	Ζ
Eta	η	Η
Theta	ϑ, θ	Θ
Jota	ι	Ι
Kappa	κ	Κ
Lambda	λ	Λ
My	μ	Μ
Ny	ν	Ν
Xi	ξ	Ξ
Omikron	ο	Ο
Pi	π	Π
Rho	ρ	Ρ
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	Τ
Ypsilon	υ	Υ
Phi	ϕ, φ	Φ
Chi	χ	Χ
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

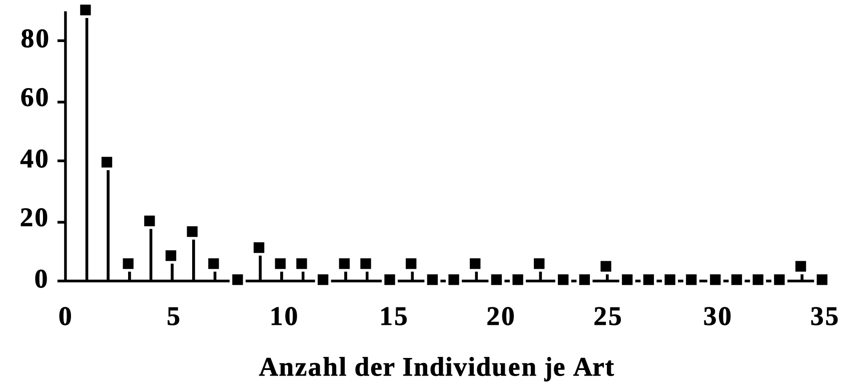
Jährliche Mittelwerte der vertikalen WIndgeschwindigkeitsverteilung



Dow-Jones-Index: wöchentlicher Mittelwert



Anzahl Arten in einer ökologischen Gemeinschaft



Fakultäten

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (lies: "n Fakultät")
$1! = 1$
$0! = 1$

Beispiel: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ (lies: "n über k")

Beispiel: $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

Es gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Die Binomialkoeffizienten geben auch die Anzahl der Kombinationen (ohne Wiederholung) von n Elementen zur Klasse k an.

Binomscher Lehrsatz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots +$$
$$+ \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 +-\ldots+ (-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k +-\ldots+-$$
$$+ \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} - \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Pascal'sches Dreieck

Die Binomialkoeffizienten kann man auch aus dem Pascal'schen Dreieck ablesen:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
…

Kombinatorik

Variation von n Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung

Beispiel: Aus einer Urne mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., 8, 9 werden hintereinander 4 Elemente ohne zurücklegen gezogen und in der Reihenfolge der Ziehung zu einer Zahl zusammengesetzt. Wieviele verschiedene Anordnungen sind dabei möglich?

$V(9,4) = 9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 6 = \frac{9!}{5!}$

allgemein: $V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ **Die Reihenfolge ist wesentlich.**

Permutation von n Elementen

Ein Sonderfall der Variation ist die Permutation, es ist die Anordnung von n Elementen zur Klasse n. Somit gilt für die Permutation P(n):

$P(n) = V(n,n) = n!$

Variation von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung

Gegenüber der dem vorherigen Beispiel ist jetzt eine wiederholung der Elemente möglich (Ziehen mit Zurücklegen). Es ergeben sich bei 9 Elementen zur Klasse 4 $\overline{V}(9,4) = 9^4$ **Möglichkeiten.**

allgemein: $\overline{V}(n,k) = n^k$ **Die Reihenfolge ist wesentlich.**

Kombination von n Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung

Beispiel: Aus einer Urne mit neun verschiedenen Farbtuben werden vier Tuben gezogen. Es wird jeweils ein Streifen ausgedrückt, die vier Streifen werden zu einer Mischfarbe verrührt. Wieviele verschiedene Farben erhält man?

$K(9,4) = \frac{V(9,4)}{4!} = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \binom{9}{4}$

allgemein: $K(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$ **Die Reihenfolge ist unwesentlich.**

Kombination von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung

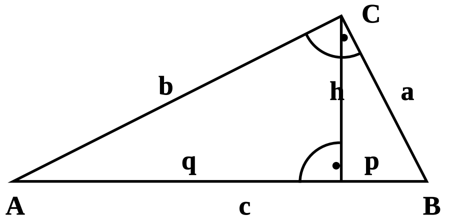
$\overline{K}(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)\bullet \dots \bullet(n+k-1)}{1\bullet 2\bullet 3\bullet \dots \bullet k}$ **Die Reihenfolge ist unwesentlich.**

Allgemeines Dreieck: Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Wichtige Punkte im Dreieck:

Höhenschnittpunkt H:	**Schnittpunkt der Höhen**
Schwerpunkt S:	**Schnittpunkt der Seitenhalbierenden (S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2)**
Umkreismittelpunkt M_u:	**Schnittpunkt der Mittelsenkrechten**
Inkreismittelpunkt M_i:	**Schnittpunkt der Winkelhalbierenden**

Rechtwinkeliges Dreieck:



Satz von Pythagoras:	$c^2 = a^2 + b^2$
Höhensatz (von Euklid):	$h^2 = p \cdot q$
Kathetensatz (von Euklid):	$a^2 = p \cdot c$
	$b^2 = q \cdot c$
Fläche:	$F = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$

Gleichseitiges Dreieck:

Alle Seiten sind gleich lang, alle Winkel sind gleich gross ($\alpha = 60°$).

Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt und Inkreismittelpunkt fallen zusammen. Es gibt 3 Symmetrieachsen.

Gleichschenkeliges Dreieck:

Zwei Seiten (Schenkel) sind gleich lang. Die Winkel an der Basis sind gleich gross.

Kongruenzsätze beim Dreieck

Zwei Dreiecke sind kongruent,

1) **wenn sie in allen drei Seiten übereinstimmen.**
2) **wenn sie in zwei Seiten und im eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.**
3) **wenn sie in einer Seite und in zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.**
4) **wenn sie in zwei Seiten und im Winkel, der der grösseren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen.**

Ähnlichkeitssätze beim Dreieck

Zwei Dreiecke sind ähnlich,

1) **wenn sie im Verhältnis aller drei Seiten übereinstimmen.**
2) **wenn sie im Verhältnis von zwei Seiten und im eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.**
3) **wenn sie in zwei Winkel übereinstimmen.**
4) **wenn sie im Verhältnis von zwei Seiten und im Winkel, der der grösseren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen.**

Geradenspiegelung: S_g

Eine Geradenspiegelung an der Geraden g ist eine Abbildung der Ebene auf sich selbst nach folgenden Regeln:

Jedem Punkt P ist eindeutig ein Bildpunkt P' zugeordnet. P und P' liegen auf derselben Senkrechten zu g, sie haben den gleichen Abstand von g und liegen auf verschiedenen Seiten von g.

Drehung: $D_{O,\alpha}$

Eine Drehung um den Punkt O um den Winkel α ist eine Abbildung der Ebene auf sich selbst nach folgenden Regeln:

Jedem Punkt P ist eindeutig ein Bildpunkt P' zugeordnet. P und P' liegen auf demselben Kreis um O. Die Strecken $\overline{OP}$ und $\overline{OP'}$ schliessen den Drehwinkel α ein. Ist α positiv, so erfolgt die Drehung gegen den Uhrzeigersinn, ist α negativ, so erfolgt die Drehung im Uhrzeigersinn.

Punktspiegelung: S_Z

Eine Punktspiegelung am Zentrum Z ist eine Abbildung der Ebene auf sich selbst nach folgenden Regeln:

Jedem Punkt P ist eindeutig ein Bildpunkt P' zugeordnet. P und P' liegen auf derselben Geraden durch Z, sie haben den gleichen Abstand von Z und sie liegen auf verschiedenen Seiten von Z.

Parallelverschiebung: $V_{\vec{a}}$

Eine Parallelverschiebung um den Vektor $\vec{a}$ ist eine Abbildung der Ebene auf sich selbst nach folgenden Regeln:

Jedem Punkt P ist eindeutig ein Bildpunkt P' zugeordnet. Setzt man den Verschiebungsvektor $\vec{a}$ in P an, so liegt P' in der Pfeilspitze

Zentrische Streckung: $Z_{Z,k}$

Eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor k ist eine Abbildung der Ebene auf sich selbst nach folgenden Regeln:

Jedem Punkt P ist eindeutig ein Bildpunkt P' zugeordnet. P und P' liegen auf derselben Geraden durch Z. Der Abstand des Punktes P' von Z ist das $|k|$-fache des Abstandes des Punktes P von Z. Ist k positiv, so liegen P und P' auf der gleichen Seite von Z, ist k negativ, so liegen P und P' auf verschiedenen Seiten von Z.

Eigenschaften	S_g	$D_{O,\alpha}$	S_Z	$V_{\vec{a}}$	$Z_{Z,k}$
geradentreu	ja	ja	ja	ja	ja
parallelentreu	ja	ja	ja	ja	ja
winkeltreu	ja	ja	ja	ja	ja
verhältnistreu	ja	ja	ja	ja	ja
längentreu	ja	ja	ja	ja	nein
flächentreu	ja	ja	ja	ja	nein
Umlaufsinn	gegensinnig	gleichsinnig	gleichsinnig	gleichsinnig	gleichsinnig
Original- und Bildfigur sind:	kongruent	kongruent	kongruent	kongruent	ähnlich
identische Abbildung	$S_g \bullet S_g$	$D_{O,0°}$	$S_Z \bullet S_Z$	$V_{\vec{o}}$	$Z_{Z,1}$
Umkehrabbildung	S_g	$D_{O,-\alpha}$	S_Z	$V_{-\vec{a}}$	$Z_{Z,1/k}$
Fixpunkte	P g	O	Z		Z
Fixpunktgeraden	g				
Fixgeraden	h g		g, (Z g)		g, (Z g)
Fixkreise		k(O,r)			

Eingabe einer Matrix z.B.	**»A = [2,2,4;1,3,-1;2,-3,4;0,1,0]** **Elemente mit "," Zeilen mit ";" trennen**
Anzeige einzelner Elemente	**»A(Zeile,Spalte).**
Nullmatrix	**»zeros(n) (quadratische Nullmatrix)** **»zeros(m,n) (Nullmatrix im Format m,n)**
Einheitsmatrix	**»eye(n) (quadratische Einheitsmatrix)** **»eye(m,n) (Einheitsmatrix im Format m,n)**
Obere Dreiecksmatrix	**»triu(C)**
Untere Dreiecksmatrix	**»tril(C)**
Spaltenvektor z.B.	**»a = [2;-5;6]**
Zeilenvektor z.B.	**»b = [2,-5,6]**
Rang einer Matrix	**»rank(A)**
Inverse Matrix A^{-1} **(nur für quadratische Matrizen)**	**»inv(A)**
Transponierte Matrix A'	**»A'**
Summe	**»A + B**
Differenz	**»A – B**
Multiplikation mit einem Skalar	**»k*A**
Multiplikation von Matrizen	**»C = A*B**
Lösung eines Gleichungssystems: $A \bullet \vec{x} = \vec{b}$	**»x = inv(A)*b oder: »x = A\b**
Determinante von A	**»det(A)**
Entwicklung nach Spalten	**rrefmovi(A) oder rrefdemo(A)**
Eigenwerte einer Matrix A	**eig(A)**
Eigenvektoren	**[V,D] = eig(A)** **D ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten** **V ist eine Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren zu den entsprechenden Eigenwerten sind.**

