1) Der folgende Text aus der NZZ hat zu einigen Überlegungen zur Statistik und Wahrscheinlichkeit Anlass gegeben.

NZZ 29.8.2001

«Im Tram haben wir uns lange in die Augen geschaut . . .»

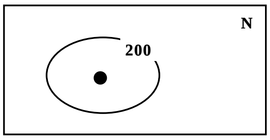
Kontaktinserate sind beliebte Auffangbecken für verpasste Gelegenheiten

Wer bei einer Zufallsbegegnung im entscheidenden Moment den Mund nicht aufbringt, kann versuchen, das Verpasste auf schriftlichem Weg nachzuholen. Zum Beispiel mit einem Kontaktinserat der Sorte «Im Tram haben wir uns lange in die Augen geschaut, aber ich traute mich nicht, Dich anzusprechen». Die Erfolgsquote solcher Inserate ist unterschiedlich.

-yr. In der New Yorker Single-Szene geht der Spruch, man dürfe keine Gelegenheit verpassen, um ein sympathisches Gegenüber sofort anzusprechen. Denn die Chance, dass man die Person in seinem Leben ein zweites Mal sieht, liegt in der amerikanischen Metropole fast bei null. Wer in Zürich die New Yorker Regel nicht befolgt, ...

Wenn man die Wahrscheinlichkeit berechnen möchte, dass zwei Personen zufällig Blickkontakt haben, formuliert man am besten ein Modell. In unserem Fall soll das Modell folgendermassen aussehen:

Gegeben ist eine Gemeinschaft mit N Personen (z.B. N = 10'000). Es seien darin gleichvie-le Männer wie Frauen vertreten. Angenommen wird ferner, dass von den N Personen die Hälfte ungebunden und somit für Blickkontakte zugänglich ist (gleich viele Frauen wie Männer). Wir nehmen an, dass jede Person im Mittel 30 Begegnungen mit Blickkontakt pro Tag hat. Davon entfallen 20 Begegnungen auf Personen aus dem engeren Umfeld, welches mit 200 Personen festgelegt wird. Interessant für unsere Untersuchung sind die Begegnungen mit Personen, die nicht zum persönlichen Umfeld zählen.
(Dieses Modell ist ein erster Versuch, das Problem zu mathematisieren. Die Verfeinerung des Modells und die Präzisierung des Datenmaterials ist eine Aufgabe der Soziologie).



a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person an einem Tag einer beliebigen anderen Person aus dem Kreis des nichtpersönlichen Umfeldes begegnet.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit in 30 Tagen einer ganz bestimmten Person aus dem nichtpersönlichen Umfeld mindestens 2 Mal zu begegnen?
Begründen Sie kurz, warum Sie die zur Berechnung verwendete Wahrscheinlichkeitsverteilung gewählt haben.

c) Zur einfacheren Abschätzung der Wahrscheinlichkeit kann man in gewissen Fällen die diskrete Verteilung durch eine kontinuierliche approximieren. Würden Sie hier eher die Normalverteilung oder die Exponentialverteilung wählen? Begründen Sie in ein paar Sätzen.

d) Berechnen Sie mit der in c) bevorzugten Wahrscheinlichkeitsverteilung die Frage von b) approximativ, also die Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 Begegnungen in 30 Tagen.

e) Die Angabe legt einen Mittelwert fest für die Anzahl Begegnungen pro Tag mit Personen, die nicht zum persönlichen Umfeld gehören. Diese Zahl von Begegnungen wird aber schwanken.
Wie breit muss das um den Mittelwert symmetrische Intervall $[\mu - d, \mu + d]$ sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgrösse (also Anzahl Begegnungen pro Tag) in diesem Intervall liegt, 95% ist? Verwenden Sie hier die Normalverteilung.

2) Ein Netzknoten hat 4 Zuleitungen und einen Ausgang. Es werden Pakete auf den Zuleitungen an den Knoten gesandt. Alle diese Pakete brauchen im Knoten dieselbe Verarbeitungszeit Δt. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Paketes während der Zeitspanne Δt im Knoten ist für alle Zuleitungen gleich gross, sie wird mit p bezeichnet.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Knoten ein Stau auftritt (d.h., dass mehr als ein Paket in der Zeitspanne Δt eintrifft)? Für p ist der Wert 0,2 gegeben.

b) Wieviele Zuleitungen dürfen maximal an einen Knoten geschaltet werden, damit längerfristig keine Überlastung auftritt (d.h. dass Warteschlangen wieder abgebaut werden)? Rechnen Sie mit p = 0,075.

3) Herr Müller wohnt in einem Hochhaus im 20. Obergeschoss. Um seine Wohnung zu erreichen benützt er den Lift. Wenn er von der Arbeit nach Hause kommt, möchte er, dass die Fahrt vom Erdgeschoss in das 20. Stockwerk möglichst nicht unterbrochen wird. Dennoch gibt es immer wieder unwillkommene Stops.

Die Liftsteuerung ist so eingerichtet, dass bei der Aufwärtsfahrt in den Zwischengeschossen nur Anmeldungen von den Liftrufknöpfen entgegengenommen werden, welche nach oben zeigen.

Aus der Erfahrung weiss man, dass in jedem Obergeschoss die Wahrscheinlichkeit, dass jemand während der Aufwärtsfahrt zusteigen möchte (um aufwärts zu fahren) 0,02 ist.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Liftfahrt des Herrn Müller vom Erdgeschoss in den 20. Stock genau einmal jemand zusteigen möchte?

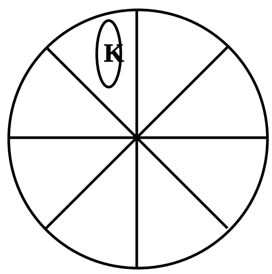
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der in a) beschriebenen Liftfahrt mindestens einmal jemand zusteigen möchte? Berechnen Sie mit Binomial- und mit Poissonverteilung und vergleichen Sie die Werte. Würden Sie für die Lösung dieser Aufgabe lieber die Binomial- oder die Poissonverteilung nehmen? Oder spielt es keine Rolle? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Lösen Sie die Aufgabe b) durch Approximation mit Normalverteilung.

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den in b) erhaltenen Werten und beurteilen Sie, ob eine solche Approximation "vertretbar" ist.

4) Zum Fest Dreikönig ist es Brauch, Königskuchen zu backen. Ein Königskuchen hat 8 Sektoren (siehe Abbildung), wobei sich in einem davon der König (meist eine billige Plastikfigur) befindet.

a) Beim Verkauf in der Mensa ist das Problem, dass nicht ein ganzer Königskuchen sondern nur einzelne Teilstücke nachgefragt werden. Deshalb wurden die 10 gelieferten Königskuchen bereits in die Teilstücke zerlegt, die in einem grossen Korb neben der Kasse zum Kauf angeboten werden.
Der erste Käufer nimmt 3 Teilstücke aus dem Korb. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
- genau 3 Könige
- mindestens einen König erhalten hat?



b) Berechnen Sie die Frage von a) nach "mindestens einem König" näherungsweise mit Binomialverteilung. Geben Sie in einigen kurzen Sätzen an, worin die methodische Problematik bei dieser Näherung besteht.

c) Eine Grossbäckerei produziert Königskuchen speziell für Mensabetriebe. Sie stellt die Kuchen in grossen Mengen her, zerlegt sie in Teilstücke, mischt diese und füllt Säcke mit je 80 Teilstücken ab. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass so ein Sack mindestens einen König enthält? Berechnen Sie die Lösung näherungsweise mit Normalverteilung. Der Streuungsparameter kann wie bei einer Binomialverteilung berechnet werden. Stellen Sie den Wert der gesuchten Wahrscheinlichkeit auch grafisch dar.
(Das Normalverteilungsintegral kann mit dem Taschenrechner berechnet werden.)

d) Berechnen Sie die in c) gefragte Wahrscheinlichkeit mittels Exponentialverteilung. Stellen Sie den Wert der gesuchten Wahrscheinlichkeit auch grafisch dar.

(Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist mit $f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$ gegeben, μ ist dabei der Erwartungswert für die Anzahl Könige.) Das dabei auftretende Integral ist ohne Taschenrechner zu lösen!

e) Vergleichen Sie die Lösungen von c) und d). Die Werte unterscheiden sich beträchtlich. Welche Art der Wahrscheinlichkeitsverteilung, Normal- oder Exponentialverteilung kommt hier den tatsächlichen Gegebenheiten näher? Begründen Sie in einigen Sätzen.

5) Die Verkehrspolizei macht an einer viel befahrenen Strecke regelmässig Geschwindigkeitskontrollen. Die Messungen wurden zum angegebenem Datum jeweils während einer halben Stunde durchgeführt. Die Tabelle gibt die Gesamtzahl der kontrollierten Fahrzeuge und die Anzahl der zu schnellen Fahrzeuge an.

Datum	Gesamt	zu schnell		
12.5.99	20	3		
15.5.99	25	2		
18.5.99	13	2		
21.5.99	40	5		
30.5.99	23	4		

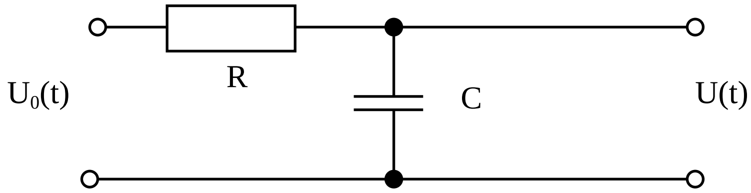
a) Berechnen Sie für jeden Kontrolltag die relative Häufigkeit der "Raser".
Mit welchem Prozentsatz von Rasern muss man im Mittel rechnen? (Es wird angenommen, dass die einzelnen Kontrollen aufeinander keinen Einfluss haben.)

b) Nun wird die nächste Geschwindigkeitskontrolle vorbereitet. Es sollen 30 Fahrzeuge kontrolliert werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zwei Fahrzeuge zu schnell unterwegs sind? Wieviele Raser erwarten sie bei dieser Kontrolle? (Es ist eine genaue und nicht eine approximierte Lösung gefordert.)
(Wenn Sie a. nicht gelöst haben, verwenden sie für die Lösung von a. den Wert 10%.)

c) Approximieren Sie (d.h. machen Sie eine Näherung) die Wahrscheinlichkeitsverteilungskurve von b) durch Normalverteilung und berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2 Fahrzeuge zu schnell unterwegs sind.

d) Nehmen wir an, dass bei der Normalverteilung in c) der Streuungsparameter halbiert würde. Welche Auswirkungen hätte dies auf die Verteilungskurve bei unveränderter Anzahl kontrollierter Fahrzeuge und beim selben Mittelwert? Zeichnen Sie in einer Skizze eine Kurve vor und eine Kurve nach dieser Änderung.

6) Am Eingang des RC-Gliedes wird eine Spannung $U_0(t)$ angelegt. Welche Spannung $U(t)$ kann man am unbelasteten Ausgang messen?



Die Ladung folgt in dieser Schaltung der folgenden Differentialgleichung:

$$\dot{Q} + \frac{1}{RC} Q = \frac{U_0}{R}$$

Bestimmen Sie die Lösungen für folgende Fälle:

a) $R = 1000\ \Omega$
$C = 500\ \mu F$
$U_0(t) = 3t$ (U in Volt (V))

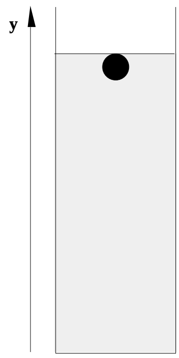
b) $R = 200\ \Omega$
$C = 1000\ \mu F$
$U_0(t) = 12 \sin \omega t$ mit Frequenz $f = 50$ Hz

7) Ein Motorboot bewegt sich in einem stehenden Gewässer mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h. Plötzlich bleibt der Motor stehen. Nach 30 Sekunden beträgt die Geschwindigkeit nur noch 10 km/h. Wie gross ist die Geschwindigkeit nach 2 Minuten?

Beachten Sie folgenden Zusammenhang: Der Reibungswiderstand des Bootes gegenüber dem Wasser ist proportional zur Momentangeschwindigkeit des Bootes.

8) In einem mit Flüssigkeit gefüllten Gefäss wird eine Kugel mit dem Radius r losgelassen (s. Abb.). Sie beginnt zu fallen. Es ist aber kein freier Fall, denn die Flüssigkeit bietet einen Widerstand (Stokes'sche Reibung). Der Fall der Kugel kann mit folgender Differentialgleichung beschrieben werden:

$$m\ddot{y} + 6\pi\eta r\,\dot{y} = mg$$



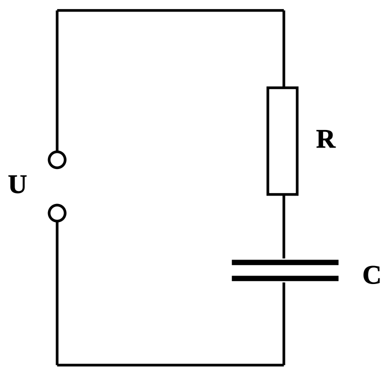
m	Masse der Kugel
η	Viskosität
r	Radius der Kugel
g	Erdbeschleunigung

Wird durch m dividiert, erhält man die Gleichung in der Form:

$$\ddot{y} + k\,\dot{y} = g \text{ mit } k = \frac{6\pi\eta r}{m}$$

Lösen Sie diese DGL ($\ddot{y} + k\,\dot{y} = g$) für die Anfangsbedingungen: $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$.
(Für k ist der Wert 1 gegeben. Die Erdbeschleunigung g kann mit dem Wert 10 eingesetzt werden.)

9) Gegeben ist eine Schaltung mit einem Kondensator mit der Kapazität C (C = 200 µF) und einem Widerstand R (R = 1000 Ω) (s. Skizze). Zu Beginn ist der Kondensator vollständig entladen. Wird eine Spannung U angelegt, wird der Kondensator geladen.



Es wird nun ein Spannungsstoss $U = U_0 e^{-t}$ angelegt, wobei U_0 gegeben ist ($U_0 = 60$ V).
Der Elektrotechniker hat für den beschriebenen Ladevorgang ein mathematisches Modell in folgender Differentialgleichung formuliert:

$$R \cdot \dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0 \cdot e^{-t}$$

Lösen Sie die Differentialgleichung unter der oben gegebenen Anfangsbedingung und berechnen Sie, wieviel Ladung zum Zeitpunkt $t_1 = 1$s auf dem Kondensator ist.

Folgende Beziehungen aus der Elektrotechnik sind noch angegeben:
$C = \frac{Q}{U}$, $U = R \cdot I$

