Trennung der Variablen (Separation)

Eine DGL 1. Ordnung vom Typ $y' = f(x)\bullet g(y)$ kann durch Trennung der Variablen gelöst werden.

$y' = f(x)\bullet g(y)$

Differential: $dy = y'\,dx = f(x)\bullet g(y)\,dx$

Trennen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$

Integrieren: $\int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

Jetzt sind nur noch die beiden Integrale zu berechnen und wir erhalten die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Beispiel 1:

$y' = -\frac{x}{y}$ $\qquad (y \neq 0)$

$dy = -\frac{x}{y}\,dx$

$y\,dy = -x\,dx$

$\int y\,dy = -\int x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1$

$y^2 = -x^2 + 2C_1 = -x^2 + C_2$

$y = \pm\sqrt{-x^2 + C_2}$ $\qquad$ oder $\qquad x^2 + y^2 = C_2$

Für positive Werte von C_2 erhält man dann Kreise mit dem Mittelpunkt im Ursprung.

Beispiel 2:

$y' = y$

$dy = y\,dx$

$\frac{dy}{y} = dx$ $\qquad (y \neq 0)$

$\int\frac{dy}{y} = \int dx$

$\ln|y| = x + C_1$

1) $y > 0$
$\ln y = x + C_1$
$y = e^{x + C_1} = e^x\bullet e^{C_1}$

2) $y < 0$
$\ln(-y) = x + C_1$
$-y = e^{x + C_1} = e^x\bullet e^{C_1}$
$y = -e^x\bullet e^{C_1}$

Nun aber können beide Fälle zusammengefasst werden, weil vor der Exponentialfunktion nur ein konstanter Faktor steht, und die allgemeine Lösung heisst:

$y = C\bullet e^x$ $\qquad$ mit $C \neq 0$, weil $y \neq 0$

Die gegebene Differentialgleichung ist aber auch durch $y = 0$ erfüllt. Oben wurde $y = 0$ nur wegen der Division durch y ausgeschlossen. Nun kann die allgemeine Lösung für alle $y \in R$ folgendermassen geschrieben werden:

$y = C\bullet e^x$ $\qquad C \in R$

Achtung: Bei der Lösung von Differentialgleichungen treten häufig logarithmische Terme wie $\ln|x|$ oder $\ln|y|$ auf. Es ist in so einem Fall günstig, die Integrationskonstante in der Form $\ln|C|$ anzusetzen.