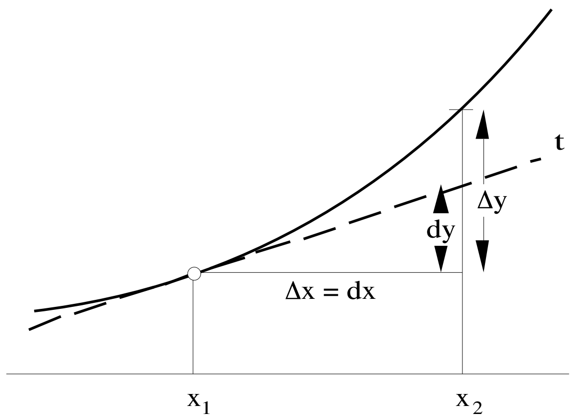
Differentiale

Eine Funktion f(x) ist differenzierbar und hat die Ableitung f '(x). Geometrisch bedeutet die 1. Ableitung bekanntlich die Steigung der Tangente. Der Zweck des Differenzierens ist es ja immer gewesen, für ein sehr kleines Stück die Kurve durch ihre Tangente zu ersetzen. Mit der 1. Ableitung kann die Tangentengleichung gebildet werden. Für einen sehr kleinen Fortschritt von x - wir nennen ihn hier dx oder Δx - wird sich das y nicht sehr viel anders verändern, wenn wir die ursprüngliche Funktion oder ihre Tangente im Startpunkt verfolgen. Mit Δy bezeichnen wir die effektive Veränderung des Funktionswertes bei einem Fortschritt um dx, dy soll die Veränderung des y-Wertes an der Tangente messen.



$y = f(x)$
$y' = f'(x)$
$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$

$dy = f'(x) \bullet dx$

Beispiel 1:

$y = x^2,\ x_1 = 2,\ \Delta x = dx = 0{,}01$

$y' = 2x$

$y'(2) = 4$

$\Delta y = (2.01)^2 - 2^2 = 4{,}0401 - 4 = 0{,}0401$

$dy = f'(2) \bullet dx = 4 \bullet 0{,}01 = 0{,}04$

Beispiel 2:

$y = \ln x,\ x_1 = 0{,}1,\ \Delta x = dx = 0{,}01$

$y' = \frac{1}{x}$

$y'(0{,}1) = \frac{1}{0{,}1} = 10$

$\Delta y = \ln 0{,}11 - \ln 0{,}1 = 0{,}095310$

$dy = f'(0{,}1) \bullet 0{,}01 = 10 \bullet 0{,}01 = 0{,}1$

Bei genügend kleinem Wert von dx = Δx ist der Unterschied zwischen Δy und dy sehr klein. Für praktische Probleme liegt dieser Unterschied meist unterhalb der Genauigkeitsschwelle der Messwerte.