Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y'' + ay' + by = g(x)$

(y, y', y'' treten linear auf, gemischte Produkte wie yy', yy'' und $y'y''$ sind nicht erlaubt)

Das Vorgehen zur Lösung von linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffinienten ist gleich wie bei jenen 1. Ordnung, d.h. es wird zuerst die allgemeine Lösung der homogenen und nachher eine parikuläre Lösung der inhomogenen DGL gesucht. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL setzt sich aus der partikulären Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen DGL zusammen ($y = y_p + y_h$).

Grundsätzlich ist für die homogene DGL ein Exponentialansatz zu empfehlen. Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL richtet sich nach der Art der Störfunktion und wird entsprechend angesetzt (siehe Tabelle weiter unten).

Lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y'' + ay' + by = 0$

Exponentialansatz: $y_h = e^{\lambda x}$

$y_h' = \lambda e^{\lambda x}$

$y_h'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 \quad \text{(Charakteristische Gleichung)}$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Die Diskriminante $D = a^2 - 4b$ entscheidet über die Art der Lösung, wobei 3 Fälle zu unterscheiden sind.

1. **$D = a^2 - 4b > 0$**

   Es gibt zwei verschiedene reelle Lösungen für λ, nämlich λ_1 und λ_2.

   Die Lösungsfunktionen heissen: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2 = e^{\lambda_2 x}$.

   Die beiden Lösungen y_1 und y_2 sind partikuläre Lösungen. wenn wir die allgemeine Lösung suchen, erwarten wir zwei Parameter (C_1 und C_2).

Satz 1: Ist $y_1(x)$ eine Lösung der linearen homogenen DGL , so ist auch $y(x) = C_1 \bullet y_1(x)$ eine Lösung dieser DGL.

Satz 2: Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der linearen homogenen DGL, so ist auch die Linearkombination der beiden Lösungen $y(x) = C_1 \bullet y_1(x) + C_2 \bullet y_2(x)$ eine Lösung dieser DGL.

Beweis: Satz 1 ist ein Sonderfall von Satz 2 ($C_2 = 0$). Deshalb muss nur Satz 2 bewiesen werden.
$y(x) = C_1 \bullet y_1(x) + C_2 \bullet y_2(x)$
$y'(x) = C_1 \bullet y_1'(x) + C_2 \bullet y_2'(x)$
$y''(x) = C_1 \bullet y_1''(x) + C_2 \bullet y_2''(x)$

Einsetzen in $y'' + ay' + by = 0$

$C_1 \bullet y_1''(x) + C_2 \bullet y_2''(x) + aC_1 \bullet y_1'(x) + aC_2 \bullet y_2'(x) + bC_1 \bullet y_1(x) + bC_2 \bullet y_2(x) = 0$

$[C_1 \bullet y_1''(x) + aC_1 \bullet y_1'(x) + bC_1 \bullet y_1(x)] + [C_2 \bullet y_2''(x) + aC_2 \bullet y_2'(x) + bC_2 \bullet y_2(x)] = 0$

Die beiden eckigen Klammern ergeben jeweils Null, weil y_1 und y_2 Lösungen der homogenen DGL sind.

Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten erhält man:

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \bullet e^{\lambda_1 x} + C_2 \bullet e^{\lambda_2 x} \qquad (C_1 \in R, C_2 \in R)$$

Beispiel: $y'' + 2y' - 8y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$

$\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 2$

Lösungen: $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^{2x}$

Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 \bullet e^{-4x} + C_2 \bullet e^{2x}$ $(C_1 \in R, C_2 \in R)$

2. **$D = a^2 - 4b = 0$**

Es gibt genau eine reelle Lösung für λ.

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$

$y_1 = y_2 = e^{-\frac{a}{2}x}$

Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL brauchen wir aber zwei Parameter, weil diese Lösung eine zweiparametrige Funktionenschar bildet.

Mit *Variation der Konstanten* kann die allgemeine Lösung gewonnen werden.

$y = K(x) \bullet e^{-\frac{a}{2}x}$

$y' = K'(x) \bullet e^{-\frac{a}{2}x} - K(x) \bullet \frac{a}{2} \bullet e^{-\frac{a}{2}x} = e^{-\frac{a}{2}x}\left[K'(x) - K(x) \bullet \frac{a}{2}\right]$

$y'' = -\frac{a}{2} e^{-\frac{a}{2}x} \bullet \left[K'(x) - K(x) \bullet \frac{a}{2}\right] + e^{-\frac{a}{2}x} \bullet \left[K''(x) - K'(x) \bullet \frac{a}{2}\right] = e^{-\frac{a}{2}x} \bullet \left[K''(x) - aK'(x) + \frac{a^2}{4} \bullet K(x)\right]$

Einsetzen in die DGL:

$e^{-\frac{a}{2}x} \bullet \left[K''(x) - aK'(x) + \frac{a^2}{4} \bullet K(x)\right] + a \bullet e^{-\frac{a}{2}x}\left[K'(x) - K(x) \bullet \frac{a}{2}\right] + b \bullet K(x) \bullet e^{-\frac{a}{2}x} = 0$

$K''(x) - aK'(x) + \frac{a^2}{4} \bullet K(x) + aK'(x) - K(x) \bullet \frac{a^2}{2} + b \bullet K(x) = 0$

$K''(x) + \frac{a^2}{4} \bullet K(x) - K(x) \bullet \frac{a^2}{2} + b \bullet K(x) = 0$

$K''(x) - \frac{a^2}{4} \bullet K(x) + b \bullet K(x) = 0$

$K''(x) - \frac{a^2 - 4b}{4} K(x) = 0$

Weil aber die Diskriminante $D = a^2 - 4b = 0$ ist, fällt das Glied mit $K(x)$ weg.

$K''(x) = 0$

Zweimal integrieren führt zu einer zweiparametrigen Lösung für $K(x)$:

$K'(x) = C_1$

$K(x) = \int C_1 \, dx = C_1 x + C_2$

Somit heisst die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$y_h(x) = (C_1 x + C_2) \bullet e^{-\frac{a}{2}x}$ $(C_1 \in R, C_2 \in R)$

Beispiel: $y'' - 8y' + 16y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$

Partikuläre Lösung: $y = e^{4x}$

Allgemeine Lösung: $y(x) = (C_1 x + C_2)e^{4x}$ $(C_1 \in R, C_2 \in R)$

3. $D = a^2 - 4b < 0$

Es gibt zwei konjugiert komplexe Lösungen λ_1 und λ_2.

Mit den Abkürzungen $\alpha = -\frac{a}{2}$ und $\omega = \sqrt{\frac{4b - a^2}{4}} > 0$ kann man die Lösungen in folgender Form schreiben:

$y_1 = e^{(\alpha + j\omega)x}$ und $y_2 = e^{(\alpha - j\omega)x}$

Die allgemeine Lösung lautet:

$y(x) = C_1 \bullet e^{(\alpha + j\omega)x} + C_2 \bullet e^{(\alpha - j\omega)x} = e^{\alpha x}(C_1 \bullet e^{j\omega x} + C_2 \bullet e^{-j\omega x})$

Mit dem Eulerschen Satz kann die allgemeine Lösung weiter umgeformt werden:

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1\cos(\omega x) + C_1 j \bullet \sin(\omega x) + C_2\cos(\omega x) - C_2 j \bullet \sin(\omega x)) =$$
$$= e^{\alpha x}\Big(j(C_1 - C_2)\sin(\omega x) + (C_1 + C_2)\cos(\omega x)\Big) = e^{\alpha x}(jA_1\sin(\omega x) + A_2\cos(\omega x))$$

Satz 3: Ist $y(x) = u(x) + j\,v(x)$ eine komplexwertige Lösung der linearen homogenen DGL, so sind Realteil $u(x)$ und Imaginärteil $v(x)$ selbst auch (reelle) Lösungen dieser DGL.

Beweis:
$y(x) = u(x) + j\,v(x)$
$y'(x) = u'(x) + jv'(x)$
$y''(x) = u''(x) + jv''(x)$

$y'' + ay' + by = 0$

$u''(x) + jv''(x) + au'(x) + ajv'(x) + bu(x) + bjv(x) = 0$

$(u''(x) + au'(x) + bu(x)) + j(v''(x) + av'(x) + bv(x)) = 0$

Die letzte Gleichung kann aber nur gültig sein, wenn Realteil und Imaginärteil gleichzeitig verschwinden. Es gilt:

$u''(x) + au'(x) + bu(x) = 0$

$v''(x) + av'(x) + bv(x) = 0$

Das bedeutet aber, dass $u(x)$ und $v(x)$ Lösungen der DGL sind.

Mit diesem Satz kann die Lösung der homogenen DGL mit reller Basis geschrieben werden:

$y_h(x) = e^{\alpha x}(B_1\sin(\omega x) + B_2\cos(\omega x))$ $(B_1 \in R, B_2 \in R)$

Beispiel: $y'' + 4y' + 13y = 0$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$

$\lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm 3j$

$\alpha = -2, \omega = 3$

Reelle Partikularlösungen: $y_1 = e^{-2x}\sin(3x)$, $y_2 = e^{-2x}\cos(3x)$

Allgemeine Lösung: $y(x) = e^{-2x}(B_1\sin(3x) + B_2\cos(3x))$

Linear unabhängige Lösungen, Wronski-Determinante

In allen drei Fällen, nämlich bei rellen wie auch bei komplexen Lösungen der charakteristischen Gleichung, haben wir als Lösung eine zweiparametrige Funktionenschar gewonnen. Dabei wurde diese Schar mit zwei Basisfunktionen aufgebaut.

Definition:
Zwei Lösungen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

werden als Basisfunktionen oder Basislösungen der Differentialgleichung bezeichnet, wenn die mit ihnen gebildete Wronski-Determinante

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Fall 1: $D = a^2 - 4b > 0$, Basislösungen: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$

$$\text{Wronski-Determinante } W(y_1;y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} = (\lambda_2 - \lambda_1) \bullet e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist die Wronski-Determinante ungleich Null, y_1 und y_2 sind also Basisfunktionen.

Fall 2: $D = a^2 - 4b = 0$, Basislösungen: $y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}$, $y_2(x) = xe^{-\frac{a}{2}x}$

$$\text{Wronski-Determinante } W(y_1;y_2) = \begin{vmatrix} e^{-\frac{a}{2}x} & xe^{-\frac{a}{2}x} \\ -\frac{a}{2} e^{-\frac{a}{2}x} & \left(1 - \frac{a}{2}x\right) \bullet e^{-\frac{a}{2}x} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1 - \frac{a}{2}x\right) \bullet e^{-ax} - \left(-\frac{a}{2}x\right) e^{-ax} = e^{-ax} \neq 0$$

Fall 3: $D = a^2 - 4b < 0$, Basislösungen: $y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\omega x)$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\omega x)$

$$\text{Wronski-Determinante } W(y_1;y_2) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\sin \omega x & e^{\alpha x}\cos \omega x \\ e^{\alpha x}(\alpha \sin \omega x + \omega \cos \omega x) & e^{\alpha x}(\alpha \cos \omega x - \omega \sin \omega x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x}(\alpha \sin \omega x \cos \omega x - \omega \sin^2 \omega x) - e^{2\alpha x}(\alpha \sin \omega x \cos \omega x + \omega \cos^2 \omega x) =$$
$$= -\omega e^{2\alpha x}(\sin^2 \omega x + \cos^2 \omega x) = -\omega e^{2\alpha x} \neq 0$$

So sind also in allen drei Fällen die gefundenen Lösungen Basislösungen.

Zwei Basislösungen werden auch als linear unabhängig bezeichnet. Diese Bezeichnung kommt aus der linearen Algebra und besagt, dass die Gleichung

$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$ nur mit $C_1 = 0$ und $C_2 = 0$ lösbar ist.

Es genügt zu zeigen, dass die Wronski-Determinante ungleich Null ist, damit zwei Lösungen als linear unabhängig gelten können. Ist die Wronski-Determinante zweier Lösungen hingegen gleich Null, sind die beiden Lösungen linear abhängig.

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist die Linearkombination zweier linear unabhängiger Lösungen (Basislösungen).

Lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wie schon bei den Linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung ist auch hier der Typ des Störgliedes für den Ansatz entscheidend. Folgende Ansätze sind für das Aufsuchen einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL zu empfehlen:

Störglied $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Polynomfunktion vom Grad n $g(x) = P_n(x)$	$y_p = \begin{cases} Q_n(x) & \text{für } b \neq 0 \\ x \bullet Q_n(x) & \text{für } a \neq 0,\ b = 0 \\ x^2 \bullet Q_n(x) & \text{für } a = b = 0 \end{cases}$ $Q_n(x)$: Polynom vom Grad n
Sinusfunktion $g(x) = \sin(\beta x)$ oder Cosinusfunktion $g(x) = \cos(\beta x)$	$j\beta$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = C_1 \bullet \sin(\beta x) + C_2 \bullet \cos(\beta x)$ oder $y_p = C \bullet \sin(\beta x + \varphi)$ $j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = x[A \bullet \sin(\beta x) + B \bullet \cos(\beta x)]$
Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$	c ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \bullet e^{cx}$ c ist eine einfache Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = Ax \bullet e^{cx}$ c ist eine doppelte Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = Ax^2 \bullet e^{cx}$

Beispiel:

$y'' + 3y' - 4y = 2x^2 - 4$

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ (Charakteristische Gleichung)

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4$ $y_h = C_1 \bullet e^x + C_2 \bullet e^{-4x}$

$y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y_p' = 2Ax + B$

$y_p'' = 2A$

Einsetzen: $2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 4$

$2A + 6Ax + 3B - 4Ax^2 - 4Bx - 4C = 2x^2 - 4$

Koeffizientenvergleich:

x^2: $-4A = 2$

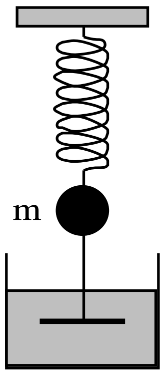
x: $6A - 4B = 0$

x^0: $\underline{2A + 3B - 4C = -4}$

$A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{3}{4}, C = \frac{3}{16}$

$y = y_h + y_p = C_1 \bullet e^x + C_2 \bullet e^{-4x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{16}$

Die Schwingung eines Federpendels



An eine Schraubenfeder mit der Federkonstanten D ist eine Masse m angehängt. Eine Dämpfungsfahne taucht in eine Flüssigkeit ein und verursacht eine zur Geschwindigkeit proportionale Widerstandskraft. Die Masse wird aus der Ruhestellung ausgelenkt. Nach dem Loslassen beginnt eine periodische Hin- und Herbewegung, eine Schwingung. Nach Newton kann folgende Gleichung angesetzt werden:

$m\ddot{y} = -Dy - \beta\dot{y}$

Die auf die Masse wirkende Kraft setzt sich aus der rücktreibenden Kraft der Feder -Dy und der Widerstandskraft $-\beta\dot{y}$ zusammen.

Es seien folgende Anfangswerte gegeben: $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$

Durch Umformen erhält man:

$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + Dy = 0 \qquad | :m$

$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = 0$

Mit $\delta = \frac{\beta}{2m}$ und $\omega_0{}^2 = \frac{D}{m}$ kann man schreiben:

$\ddot{y} + 2\delta\,\dot{y} + \omega_0{}^2\,y = 0$

$\lambda^2 + 2\delta\,\lambda + \omega_0{}^2 = 0$ (Charakteristische Gleichung)

$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}$

Bei starker Dämpfung ($\delta > \omega_0$) werden die Lösungen der charakteristischen Gleichung reell sein, bei schwacher Dämpfung ($\delta < \omega_0$) sind sie komplex. Dazwischen gibt es einen Grenzfall. Es wird zunächst der Fall von schwacher Dämpfung betrachtet.

$\delta < \omega_0$: (Schwingfall)

$\alpha = -\delta$, $\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL heisst:

$$y_h = e^{\alpha t}(C_1 \bullet \sin(\omega t) + C_2 \bullet \cos(\omega t)) = e^{-\delta t}\left(C_1 \bullet \sin\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}\ \ t\right) + C_2 \bullet \cos\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}\ \ t\right)\right)$$

Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich die partikuläre Lösung:

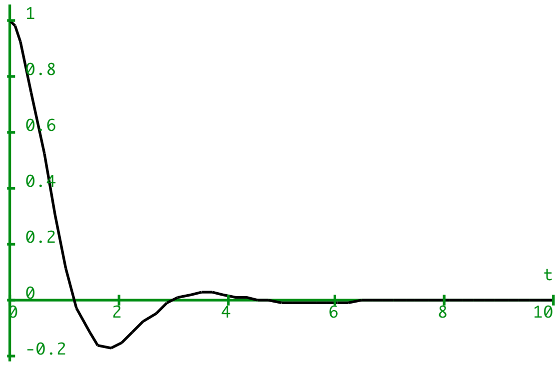
$$y_p = y_0 e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}} \bullet \sin\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}\ \ t\right) + \cos\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}\ \ t\right)\right)$$

Beispiel:
$\delta = 1$, $\omega_0 = 2$, $y_0 = 1$, Lösung mit Maple V:

```
restart:
DGL:=diff(y(t),t$2) + 2*delta*diff(y(t),t) + omega0^2*y(t) = 0;
delta:=1:omega0:=2:y0:=1:
L:=dsolve({DGL,y(0)=y0,D(y)(0)=0},y(t));
assign(L):
              / 2       \
              |d        |           /d      \          2
       DGL := |--- y(t)| + 2 delta |-- y(t)| + omega0  y(t) = 0
              |  2      |           \dt     /
              \dt       /

L := y(t) = 1/3 sqrt(3) exp(-t) sin(sqrt(3) t) + exp(-t) cos(sqrt(3) t)
```

```
plot(y(t),t=0..10);
```



$\delta > \omega_0$: Bei starker Dämpfung kommt der sogenannte 'Kriechfall' zustande.

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ sind beide negativ, wir bezeichnen sie mit $\lambda_1 = -k_1$ bzw. $\lambda_2 = -k_2$.

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL heisst:

$y_h = C_1 \bullet e^{-k_1 t} + C_2 \bullet e^{-k_2 t}$

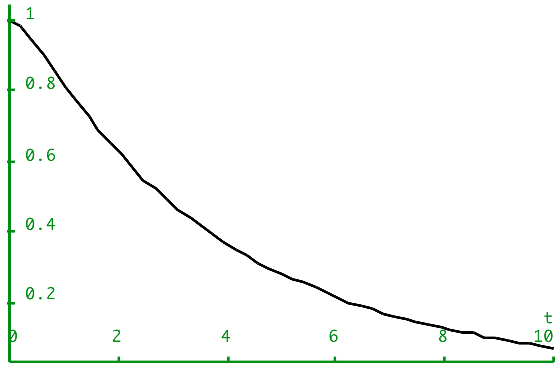
Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich die partikuläre Lösung:

$$y_p = \frac{y_0}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \left(\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) t} - \left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) t} \right)$$

Beispiel:
$\delta = 2$, $\omega_0 = 1$, $y_0 = 1$, Lösung mit Maple V:

```
restart:
DGL:=diff(y(t),t$2) + 2*delta*diff(y(t),t) + omega0^2*y(t) = 0;
delta:=2:omega0:=1:y0:=1:
L:=dsolve({DGL,y(0)=y0,D(y)(0)=0},y(t));
assign(L):
              / 2       \
              |d        |            /d       \          2
       DGL := |--- y(t)| + 2 delta |-- y(t)| + omega0   y(t) = 0
              |  2      |            \dt      /
              \dt       /

L := y(t) = (1/2 + 1/3 sqrt(3)) exp((-2 + sqrt(3)) t)
         + (- 1/3 sqrt(3) + 1/2) exp(-(2 + sqrt(3)) t)
plot(y(t),t=0..10);
```



$\delta = \omega_0$: Aperiodischer Grenzfall

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind beide gleich: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$.

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL heisst dann:
$y_h = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 \bullet t)$

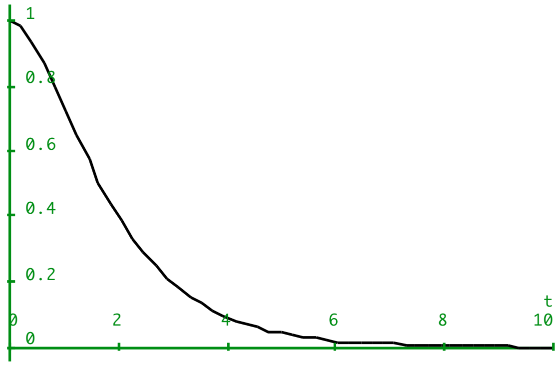
Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich die partikuläre Lösung:

$y_p = y_0 e^{-\delta t}(1 + \delta t)$

Beispiel:
$\delta = 1$, $\omega_0 = 1$, $y_0 = 1$, Lösung mit Maple V:

```
restart:
DGL:=diff(y(t),t$2) + 2*delta*diff(y(t),t) + omega0^2*y(t) = 0;
delta:=1:omega0:=1:y0:=1:
L:=dsolve({DGL,y(0)=y0,D(y)(0)=0},y(t));
assign(L):
               / 2        \
               |d         |             /d       \          2
       DGL :=  |--- y(t)| + 2 delta |-- y(t)| + omega0   y(t) = 0
               |  2       |             \dt      /
               \dt        /

L := y(t) = exp(-t) + exp(-t) t
plot(y(t),t=0..10);
```



Im aperiodischen Grenzfall schwingt das Pendel zurück, ohne die Ruhelage zu überschreiten. Für das Abklingen der Schwingung wird minimale Zeit benötigt.

Erzwungene Schwingung, Resonanz

Nun wird das Federpendel durch eine externe periodische Kraft $F_0\sin(\omega_s t)$ angeregt. Die dazugehörige inhomogene DGL lautet:

$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + Dy = 0 \qquad |:m$

$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} + \frac{D}{m}y = \frac{F_0}{m}\sin(\omega_s t)$

Mit $\delta = \frac{\beta}{2m}$ und $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ kann man schreiben:

$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\sin(\omega_s t) = a_0\sin(\omega_s t)$

Es wird hier nur der Schwingfall ($\delta < \omega_0$) betrachtet.

Die Lösung der homogenen DGL ist wie oben zu finden:

$$y_h = e^{\alpha t}(C_1 \bullet \sin(\omega t) + C_2 \bullet \cos(\omega t)) = e^{-\delta t}\left(C_1 \bullet \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right) + C_2 \bullet \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right)\right)$$

Und mit den Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$y_{ph} = y_0 e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \bullet \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right) + \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\;t\right)\right)$$

Für die inhomogene DGL mus eine partikuläre Lösung gesucht werden. Durch Orientierung an der Störfunktion ist dies leicht zu tun.

$y_p = A \bullet \sin(\omega_s t + \varphi)$

$\dot{y}_p = \omega_s A \bullet \cos(\omega_s t + \varphi)$

$\ddot{y}_p = -\omega_s^2 A \bullet \sin(\omega_s t + \varphi)$

Durch Einsetzen erhält man:

$-\omega_s^2 A \sin(\omega_s t + \varphi) + 2\delta\omega_s A \cos(\omega_s t + \varphi) + \omega_0^2 A \sin(\omega_s t + \varphi) = a_0 \sin(\omega_s t)$

$$-\omega_2^2 A \sin(\omega_s t)\cos\varphi - \omega_s^2 A \cos(\omega_s t)\sin\varphi + 2\delta\omega_s A \cos(\omega_s t)\cos\varphi - 2\delta\omega_s A \sin(\omega_s t)\sin\varphi +$$
$$+\omega_0^2 A \sin(\omega_s t)\cos\varphi + \omega_0^2 A \cos(\omega_s t)\sin\varphi = a_0 \sin(\omega_s t)$$

Koeffizientenvergleich:

$\sin(\omega_s t)$: $\quad -\omega_s^2 A \cos\varphi - 2\delta\omega_s A \sin\varphi + \omega_0^2 A \cos\varphi = a_0$

$\cos(\omega_s t)$: $\quad \underline{-\omega_s^2 A \sin\varphi + 2\delta\omega_s A \cos\varphi + \omega_0^2 A \sin\varphi = 0}$

$A \cos\varphi\,(\omega_0^2 - \omega_s^2) - 2\delta A\omega_s \sin\varphi = a_0$

$\underline{A \sin\varphi\,(\omega_0^2 - \omega_s^2) + 2\delta A\omega_s \cos\varphi = 0}$

Aus der zweiten Gleichung kann φ berechnet werden:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\delta\omega_s}{\omega_s^2 - \omega_0^2}\right)$$

Werden beide Gleichungen quadriert, lässt sich auch das A leicht berechnen:

$A^2\cos^2\varphi\,(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 - 4\delta\omega_s A^2(\omega_0^2 - \omega_s^2)\sin\varphi\cos\varphi + 4\delta^2\omega_s^2 A^2 \sin^2\varphi = a_0^2$

$A^2\sin^2\varphi\,(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\delta\omega_s A^2(\omega_0^2 - \omega_s^2)\sin\varphi\cos\varphi + 4\delta^2\omega_s^2 A^2 \cos^2\varphi = 0$

Addieren der beiden Gleichungen führt zur Form $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

$A^2(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\delta^2\omega_s^2 A^2 = a_0^2$

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\delta^2\omega_s^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\delta^2\omega_s^2}}$$

Die Lösung der DGL lautet dann:

$$y = y_h + y_p = y_0 e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \bullet \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\quad t\right) + \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\quad t\right)\right) +$$

$$+ \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_s^2)^2 + 4\delta^2\omega_s^2}} \sin\left(\omega_s t + \arctan\left(\frac{2\delta\omega_s}{\omega_s^2 - \omega_0^2}\right)\right)$$

Beispiel:
$\delta = 0.3$, $\omega_0 = 2$, $y_0 = 1$, $F_0 = 1$, $m = 1$, $\omega_s = 1.977$, Lösung mit Maple V:

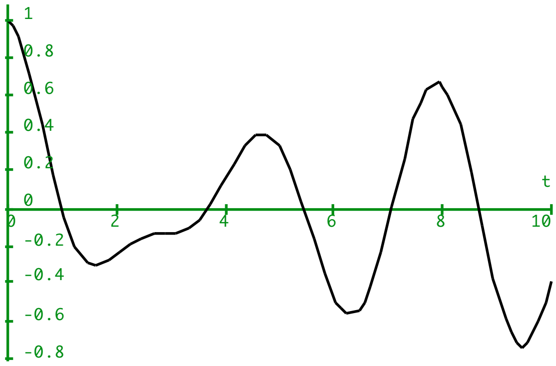
```
restart:Digits:=3:
DGL:=diff(y(t),t$2) + 2*delta*diff(y(t),t) + omega0^2*y(t) = F0/m*sin(omega1*t);
delta:=0.3:omega0:=2:y0:=1:F0:=1:m:=1:omega1:=1.977:
L:=dsolve({DGL,y(0)=y0,D(y)(0)=0},y(t));
assign(L):
         / 2       \
         |d        |            /d       \         2         F0 sin(omega1 t)
  DGL := |--- y(t)| + 2 delta |-- y(t)| + omega0  y(t) = ----------------
         |  2      |            \dt      /                          m
         \dt       /

              5996530481523
 L := y(t) = --------------- exp(- 3/10 t) sin(1/10 sqrt(391) t) sqrt(391)
             553436017081831

            2601637383841
         + ------------- exp(- 3/10 t) cos(1/10 sqrt(391) t)
            1415437383841

             91471000000      1977      1186200000000      1977
         + ------------- sin(---- t) - ------------- cos(---- t)
            1415437383841     1000      1415437383841      1000

plot(y(t),t=0..10);
```



Das Diagramm zeigt, dass am Anfang die Lösung der homogenen DGL die Kurve stark beeinflusst. Mit steigender Zeit t wird sich aber die periodische Anregungskraft durchsetzen. Es ist hier bereits ersichtlich, wie die Schwingung des Pendels die Amplitude vergrössert (Resonanz).

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$

Wie üblich wird zunächst die homogene DGL gelöst.

$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

Mit dem Exponentialansatz $y_h = e^{-\lambda t}$ erhält man die charakteristische Gleichung:

$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

Diese Gleichung n-ten Grades hat maximal n unterschiedliche Lösungen. Es kann reelle oder komplexe (jeweils konjugiert komplex) geben. Es kann auch sein, dass es Mehrfachlösungen gibt. Für die allgemeine Lösung der homogenen DGL kann die Fallunterscheidung bei den Differentialgleichungen 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten wegleitend dienen.

wenn die homogene DGL gelöst ist, kann mit den üblichen Ansatzmethoden eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL gesucht werden. Im folgenden werden drei Beispiele vorgestellt, an denen die Lösungsprizipien dargestellt werden.

Beispiel 1:

$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 4$

homogene DGL: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$

$y_h = C_1 \bullet e^x + C_2 \bullet e^{-x} + C_3 e^{2x}$

Exponentialansatz zum Aufsuchen einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL:

$y_p = ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2ax + b$

$y_p'' = 2a$

$y_p''' = 0$

Einsetzen: $0 - 2(2a) - (2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 4$

$-4a - 2ax - b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 2x^2 - 4$

Koeffizientenvergleich:

x^2: $2a = 2$

x: $-2a + 2b = 0$

x^0: $\underline{-4a - b + 2c = -4}$

$a = 1, b = 1, c = \frac{1}{2}$

$y_p = x^2 + x + \frac{1}{2}$

$y = y_p + y_h = x^2 + x + \frac{1}{2} + C_1 \bullet e^x + C_2 \bullet e^{-x} + C_3 e^{2x}$

Beispiel 2:

$y''' + 2y'' + y' + 2y = 104 \sin(3x)$

homogene DGL: $y''' + 2y'' + y' + 2y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = j \Rightarrow \alpha_1 = 0, \omega_1 = 1$
$\lambda_2 = -j \Rightarrow \alpha_2 = 0, \omega_2 = -1$
$\lambda_3 = -2$

$y_h = C_1 \bullet \sin x + C_2 \bullet \cos x + C_3 e^{-2x}$

Ansatz zum Aufsuchen einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL:
$y_p = A \sin(3x + \varphi)$

$y_p' = 3A \cos(3x + \varphi)$

$y_p'' = -9A \sin(3x + \varphi)$

$y_p''' = -27A \cos(3x + \varphi)$

Einsetzen: $-27A \cos(3x + \varphi) -18A \sin(3x + \varphi) + 3A \cos(3x + \varphi) + 2A \sin(3x + \varphi) = 104 \sin(3x)$

$-27A \cos(3x) \cos\varphi + 27A \sin(3x) \sin\varphi - 18A \sin(3x) \cos\varphi - 18A \cos(3x) \sin\varphi +$
$+ 3A \cos(3x) \cos\varphi - 3A \sin(3x) \sin\varphi + 2A \sin(3x) \cos\varphi + 2A \cos(3x) \sin\varphi = 104 \sin(3x)$

Koeffizientenvergleich:

$\sin(3x)$: $27A \sin\varphi - 18A \cos\varphi - 3A \sin\varphi + 2A \cos\varphi = 104$

$\cos(3x)$: $\underline{-27A \cos\varphi -18A \sin\varphi + 3A \cos\varphi + 2A \sin\varphi = 0}$

$24A \sin\varphi - 16A \cos\varphi = 104 \quad |:8$

$\underline{-24A \cos\varphi - 16A \sin\varphi = 0} \quad |:(-8)$

Aus der zweiten Gleichung folgt für $\varphi = \arctan(-1.5) = -0{,}983$ rad

Beide Gleichungen quadrieren und dann addieren:

$3A \sin\varphi - 2A \cos\varphi = 13$

$\underline{3A \cos\varphi + 2A \sin\varphi = 0}$

$9A^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + 4A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 13^2$

$13A^2 = 13^2$

$A = \sqrt{13}$

$y_p = \sqrt{13} \sin(3x -0{,}983)$

$y = y_p + y_h = \sqrt{13} \sin(3x -0{,}983) + C_1 \bullet \sin x + C_2 \bullet \cos x + C_3 e^{-2x}$

Beispiel 3:

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

Lösungen: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$y_h = (C_1 \bullet x^2 + C_2 \bullet x + C_3) \bullet e^x$

Wie bei den linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann auch hier die Unabhängigkeit der Lösungen mit der Wronski-Determinante überprüft werden.

$$W(y_1; y_2; \ldots; y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Ist der Wert der Wronski-Determinante immer ungleich Null, sind $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ unabhängige Basislösungen.

Wronski-Determinante für das Beispiel 3:

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$y_1(x) = x^2 \bullet e^x$	$y_2(x) = x \bullet e^x$	$y_3(x) = e^x$
$y_1'(x) = e^x(2x + x^2)$	$y_2'(x) = e^x(1 + x)$	$y_3'(x) = e^x$
$y_1''(x) = e^x(2 + 4x + x^2)$	$y_2''(x) = e^x(2 + x)$	$y_3''(x) = e^x$

$$W(y_1; y_2; \ldots; y_n) = \begin{vmatrix} x^2 \bullet e^x & x \bullet e^x & e^x \\ e^x(2x + x^2) & e^x(1 + x) & e^x \\ e^x(2 + 4x + x^2) & e^x(2 + x) & e^x \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x + x^2 & 1 + x & 1 \\ 2 + 4x + x^2 & 2 + x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x} \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2+ 4x & 2 & 0 \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ (2 + 4x) & 2 \end{vmatrix} = e^{3x}(4x - 2 - 4x) = -2e^{3x} \neq 0$$

