Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$y' + f(x) \bullet y = g(x)$

g(x) wird als Störglied bezeichnet. Ist für alle $x \in R$ der Wert von $g(x) \equiv 0$, nennt man die DGL homogen, mit $g(x) \not\equiv 0$ heisst sie inhomogen.

Kennzeichen der linearen DGL 1. Ordnung ist das lineare Auftreten von y' und y. Der gemischte Ausdruck yy' ist verboten.

Die homogene lineare DGL 1. Ordnung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden.

allgemein:

$y' + f(x) \bullet y = 0$

$\frac{dy}{dx} = -f(x) \bullet y$

$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)\,dx$

$\ln|y| = -\int f(x)\,dx + \ln|C_1|$

$y = C_1 \bullet e^{-\int f(x)\,dx} \qquad (C_1 \in R)$

Beispiel:

$y' + xy = 0$

$\frac{dy}{dx} = -xy$

$\int \frac{dy}{y} = -\int x\,dx$

$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + \ln|C_1|$

$y = C_1 \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (C_1 \in R)$

Um die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung ($g(x) \not\equiv 0$) zu lösen, benötigen wir eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ($y_p(x)$ und die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen DGL ($y_h(x)$). Es gilt: $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$

Beweis:
$y' = y_p' + y_h'$

Einsetzen in die DGL: $y_p' + y_h' + f(x) \bullet (y_p + y_h) = g(x)$

Umformen: $(y_h' + f(x) \bullet y_h) + y_p' + f(x) \bullet y_p = g(x)$

Weil y_h eine Lösung der homogenen DGL ist, ist der erste Teil Null. Mit y_p Als Lösung der inhomogenen Gleichung ist die Identität nachgewisen.

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu finden ist nicht so leicht. Es gibt aber Methoden dafür.

Variation der Konstanten

Die homogene Differentialgleichung 1. Ordnung $y' + f(x) \bullet y = 0$ hat die Lösung

$y_h = C_1 \bullet e^{-\int f(x)\,dx}$

Wir ersetzen nun die Konstante C_1 durch eine Funktion von x: $C_1 = K(x)$. Den neuen Wert für y setzen wir in der inhomogenen Differentialgleichung ein.

$y = K(x) \bullet e^{-\int f(x)\,dx} \quad \Rightarrow \quad y' = K'(x) \bullet e^{-\int f(x)\,dx} + K(x) \bullet e^{-\int f(x)\,dx} \bullet (-f(x))$

$y' + f(x) \bullet y = g(x)$

Man erhält folgende Gleichung:

$K'(x) \bullet e^{-\int f(x)\,dx} - K(x) \bullet f(x) \bullet e^{-\int f(x)\,dx} + f(x) \bullet K(x) \bullet e^{-\int f(x)\,dx} = g(x)$

Das zweite und das dritte Glied heben sich auf, und die DGL wird zu:

$K'(x) \bullet e^{-\int f(x)\,dx} = g(x) \quad \Rightarrow \quad K(x) = \int g(x) \bullet e^{\int f(x)\,dx}\,dx + C$

Somit heisst die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y = y_p + y_h = \left(\int g(x) \bullet e^{\int f(x)\,dx}\,dx + C\right) \bullet e^{-\int f(x)\,dx}$$

Beispiel:

$y' + xy = x$

Die Lösung der homogenen DGL ist $y_h = C_1 \bullet e^{-\frac{x^2}{2}}$

Variation der Konstanten: Ansatz: $y = K(x) \bullet e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\Rightarrow$ $y' = K'(x) \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} - K(x) \bullet x \bullet e^{-\frac{x^2}{2}}$

Einsetzen:

$$K'(x) \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} - K(x) \bullet x \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} + x \bullet K(x) \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} = x$$

$$K'(x) = x \bullet e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$K(x) = \int x \bullet e^{\frac{x^2}{2}} \, dx$$

Dieses Integral kann durch Substitution gelöst werden:

$$K(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + C$$

K(x) wird in den Ansatz eingesetzt und die Lösung der DGL ist somit:

$$y = y_p + y_h = \left(e^{\frac{x^2}{2}} + C \right) \bullet e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + C \bullet e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Aufsuchen einer partikulären Lösung

Wie oben besprochen besteht die Lösung einer Linearen DGL 1. Ordnung aus der Summe einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der homogenen DGL ($y = y_p + y_h$). Wenn also eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL bekannt ist, kann die gesamte Lösung aufgeschrieben werden. Nach dem Lösen der homogenen DGL wird nun im Probierverfahren eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL gesucht. Man versucht einen Ansatz, der je nach Typ der Koeffizientenfunktion f(x) bzw. des Störgliedes abhängt. Der Ansatz wird natürlich noch Parameter enthalten müssen, welche zu bestimmen sind.

Beispiel:

$y' - (\tan x) \bullet y = 2\sin x$

homogene DGL: $y' - (\tan x) \bullet y = 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \tan x \, dx$$

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{\cos x}\right|$$

$$y_h = \frac{C}{\cos x} \qquad (C \in R)$$

Ansatz: $y_p = A \bullet \cos x$

$y_p' = -A \bullet \sin x$ einsetzen

$\Rightarrow$ $-A \bullet \sin x - (\tan x) \bullet A \bullet \cos x = 2\sin x$

$-2A \bullet \sin x = 2\sin x$

$\Rightarrow$ $A = -1$

Das Aufsuchen einer partikulären Lösung braucht etwas Glück und ist nur bei einfachen Funktionen zu empfehlen. Bei linearen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (f(x) = konstant) ist diese Methode allerdings recht erfolgreich, weil sich der Lösungsansatz im wesentlichen nach dem Störglied richtet.

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y' + ay = g(x)$

Die Lösung setzt sich auch hier iweder aus der Summe einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL und der allgemeinen Lösung der homogenen DGL zusammen.

$y = y_p + y_h$

$y' + ay = 0$

Die homogene DGL kann durch Trennen der Variablen gelöst werden. Man kann aber auch mit einem Exponentialansatz sehr schnell zur Lösung kommen.

Ansatz: $y_h = C \bullet e^{\lambda x}$

$y_h' = C\lambda \bullet e^{\lambda x}$

$C\lambda \bullet e^{\lambda x} + a \bullet C \bullet e^{\lambda x} = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = -a$

$y_h = C \bullet e^{-ax} \qquad (C \in R)$

Die partikuläre Lösung kann durch *"Variation der Konstanten"* oder durch *"Aufsuchen einer partikulären Lösung"* gefunden werden. Meistens ist das Aufsuchen einer partikulären Lösung zweckmässiger, weil der Ansatz nur vom Typ des Störgliedes abhängt. Folgende Empfehlungen führen meist zur Lösung:

Störglied $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Konstante Funktion	Konstante Funktion $y_p = c_0$
Lineare Funktion	Lineare Funktion $y_p = c_1x + c_0$
Quadratische Funktion	Quadratische Funktion $y_p = c_2x^2 + c_1x + c_0$
Polynomfunktion vom Grad n	Polynomfunktion vom Grad n $y_p = c_nx^n + \ldots + c_1x + c_0$
$g(x) = A \bullet \sin(\omega x)$	$y_p = C_1 \bullet \sin(\omega x) + C_2 \bullet \cos(\omega x)$
$g(x) = B \bullet \cos(\omega x)$	oder
$g(x) = A \bullet \sin(\omega x) + B \bullet \cos(\omega x)$	$y_p = C \bullet \sin(\omega x + \varphi)$
$g(x) = A \bullet e^{bx}$	$y_p = C \bullet e^{bx}$ (für $b \neq -a$) $y_p = Cx \bullet e^{bx}$ (für $b = -a$)

Beispiel 1:

$y' + 2y = 2\sin x$

homogene DGL: $y' + 2y = 0$

Exponentialansatz: $y_h = C\bullet e^{\lambda x}$

$y_h' = C\lambda\bullet e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \quad C\lambda\bullet e^{\lambda x} + 2\bullet C\bullet e^{\lambda x} = 0$

$\lambda + 2 = 0$

$\lambda = -2$

$\Rightarrow \quad y_h = C\bullet e^{-2x}$

Aufsuchen einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL:

Ansatz: $y_p = C_1\bullet\sin x + C_2\bullet\cos x$

$y_p' = C_1\bullet\cos x - C_2\bullet\sin x$

Einsetzen: $C_1\bullet\cos x - C_2\bullet\sin x + 2C_1\bullet\sin x + 2C_2\bullet\cos x = 2\sin x$

Koeffizientenvergleich:

sin x: $2C_1 - C_2 = 2$
cos x: $C_1 + 2C_2 = 0$

$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{4}{5}, C_2 = -\frac{2}{5}$

$y = y_p + y_h = \frac{4}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + C\bullet e^{-2x}$

Beispiel 2:

$y' - 3y = 2x^2 - 4$

homogene DGL:

Ansatz: $y_h = C\bullet e^{\lambda x}$

$y_h' = C\lambda\bullet e^{\lambda x}$

Einsetzen: $C\lambda\bullet e^{\lambda x} - 3C\bullet e^{\lambda x} = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = 3$

$y_h = C\bullet e^{3x}$

Aufsuchen einer partikulären Lösung:

Ansatz: $y_p = ax^2 + bx + c$

$y_p' = 2ax + b$

Einsetzen: $2ax + b - 3ax^2 - 3bx - 3c = 2x^2 - 4$

Koeffizientenvergleich:

x^2: $-3a = 2$

x: $2a - 3b = 0$

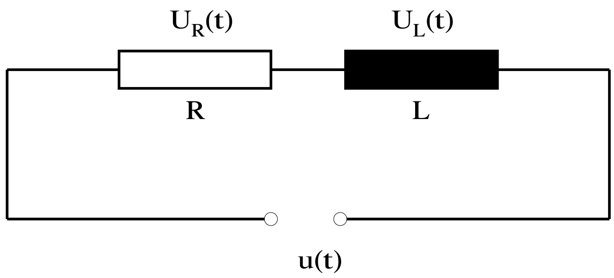
x^0: $b - 3c = -4$

$\Rightarrow \quad a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{4}{9}, c = -\frac{32}{27}$

$y = y_p + y_h = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{32}{27} + C\bullet e^{3x}$

Praktische Anwendungen: Wechselstromkreis

In einem Wechselstromkreis sind ein ohmscher Widerstand R und eine Induktivität L in Serie geschaltet:



Nach der Maschenregel gilt: $u(t) = u_R(t) + u_L(t)$

Ohmsches Gesetz: $u_R(t) = R \bullet i$

Induktionsgesetz: $u_L(t) = L \bullet \frac{di}{dt}$

Quellspannung: $u(t) = \hat{u} \bullet \sin(\omega t)$

Somit erhält man die Differentialgleichung: $\hat{u} \bullet \sin(\omega t) = R \bullet i + L \bullet \frac{di}{dt}$

Umformen: $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \bullet i = \frac{\hat{u}}{L} \bullet \sin(\omega t)$

homogene DGL: $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \bullet i = 0$

Exponentialansatz: $i_h = C \bullet e^{\lambda t}$

$$\frac{di_h}{dt} = C\lambda \bullet e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad C\lambda \bullet e^{\lambda t} + \frac{R}{L} \bullet C \bullet e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = -\frac{R}{L}$$

$$i_h = C \bullet e^{-\frac{R}{L} t}$$

Aufsuchen einer partikulären Lösung:

Ansatz: $i_p = \hat{\imath} \bullet \sin(\omega t + \varphi)$

$$\frac{di_p}{dt} = \hat{\imath}\omega \bullet \cos(\omega t + \varphi)$$

Einsetzen: $\hat{\imath}\omega \bullet \cos(\omega t + \varphi) + \frac{R}{L} \bullet \hat{\imath} \bullet \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{u}}{L} \bullet \sin(\omega t)$

$$\hat{\imath}\omega \bullet \cos(\omega t) \bullet \cos(\varphi) - \hat{\imath}\omega \bullet \sin(\omega t) \bullet \sin(\varphi) + \frac{R}{L} \bullet \hat{\imath} \bullet \sin(\omega t) \bullet \cos(\varphi) + \frac{R}{L} \bullet \hat{\imath} \bullet \cos(\omega t) \bullet \sin(\varphi) = \frac{\hat{u}}{L} \bullet \sin(\omega t)$$

Koeffizientenvergleich:

$\sin(\omega t)$: $\quad -\hat{\imath}\omega \bullet \sin(\varphi) + \frac{R}{L} \bullet \hat{\imath} \bullet \cos(\varphi) = \frac{\hat{u}}{L}$

$\cos(\omega t)$: $\quad \hat{\imath}\omega \bullet \cos(\varphi) + \frac{R}{L} \bullet \hat{\imath} \bullet \sin(\varphi) = 0$

Beide Gleichungen werden quadriert und addiert. Dabei fällt φ heraus, und die Gleichung kann auf î gelöst werden:

$$(\hat{\imath}\omega L)^2 \bullet \sin^2(\varphi) - 2\hat{\imath}^2\omega\, LR \bullet \sin(\varphi)\cos(\varphi) + (R\hat{\imath})^2 \bullet \cos^2(\varphi) = \hat{u}^2$$

$$(\hat{\imath}\omega L)^2 \bullet \cos^2(\varphi) + 2\hat{\imath}^2\omega\, LR \bullet \sin(\varphi)\cos(\varphi) + (R\hat{\imath})^2 \bullet \sin^2(\varphi) = 0$$

$$(\hat{\imath}\omega L)^2\left[\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right] + (R\hat{\imath})^2\left[\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right] = \hat{u}^2$$

$$\hat{\imath}^2 = \frac{\hat{u}^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\hat{\imath} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Aus der zweiten Gleichung kann φ berechnet werden:

$$\tan(\varphi) = -\frac{\omega L}{R}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{\omega L}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL heisst:

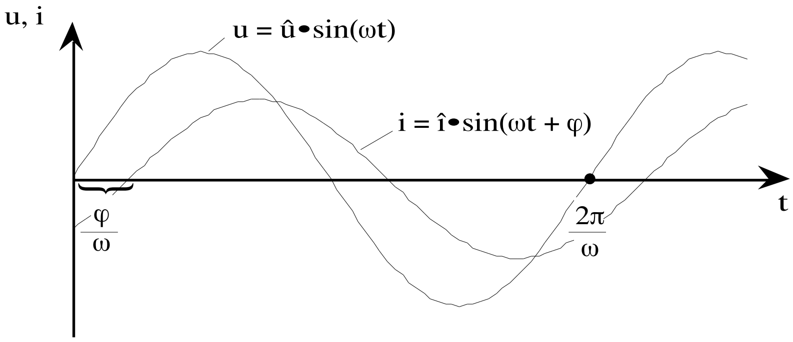
$$i_p(t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \bullet \left(\sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)\right)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL heisst:

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \bullet \left(\sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)\right) + C \bullet e^{-\frac{R}{L}t}$$

Physikalische Interpretation:

Die partikuläre Lösung stellt einen Wechselstrom mit der Amplitude $\hat{\imath}$ und dem Phasenwinkel φ dar. R ist der ohmsche und ωL der induktive Widerstand des Stromkreises. Der Scheinwiderstand des Wechselstromkreises beträgt $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$. Der Wechselstrom läuft der angelegten Wechselspannung $u(t) = \hat{u} \bullet \sin(\omega t)$ um den Phasenwinkel φ hinterher, φ ist die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom.



Die Lösung der homogenen DGL ergibt einen exponentiell abklingenden Gleichstrom i_h, der den Wechselstrom i_p überlagert. Dieser Gleichstrom spielt aber nach einer kurzen Einschwingphase praktisch keine Rolle mehr. Für hinreichend grosse t kann dieser Teil ganz weggelassen werden und der Strom wird nur mehr durch die partikuläre Lösung $i_p(t)$ angegeben.