Es soll jetzt der Gesamtgewinn maximiert werden, wobei aber zu beachten ist, dass die Arbeitszeit pro Woche (s) limitiert ist.

Als Zielfunktion wird der Gesamtgewinn G angesetzt. Er ist:

$$G = g_1x_1 + g_2x_2$$

Die Nebenbedingungen werden einerseits durch die maximale Laufzeit der Maschinen und andererseits durch die Tatsache, dass Stückzahlen nicht negativ sind bestimmt.

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 &\le s \\ a_2x_1 + b_2x_2 &\le s \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Für die konkrete Lösung seien nun folgende Zahlenwerte gegeben:
$a_1 = 2$ min $b_1 = 4$ min $g_1 = 4$ Fr.
$a_2 = 6$ min $b_2 = 2$ min $g_2 = 3$ Fr. $s = 2400$ min

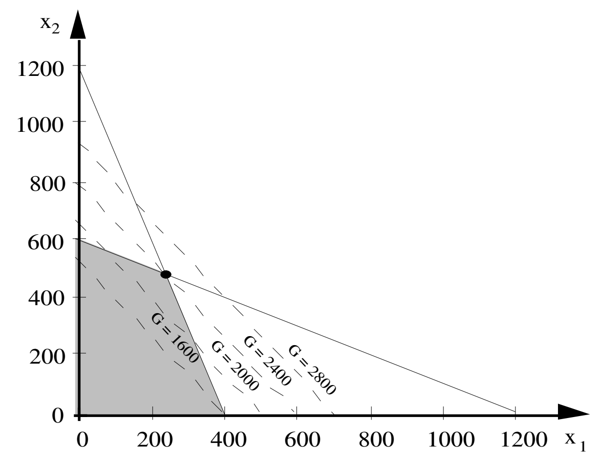
Damit ergeben sich folgende Gleichungen und Ungleichungen:

$$G = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 2400 \\ 6x_1 + 2x_2 &\le 2400 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Graphische Lösung:

Das Ungleichungssystem der Nebenbedingungen beschreibt in der x_1/x_2-Ebene einen von Geraden begrenzten Bereich. Die Zielfunktion lässt sich für einen festen Wert von G durch eine Gerade darstellen. Für verschiedene Werte von G hat die Gewinngerade dieselbe Steigung. Nur die Achsenabschnitte ändern sich. Nun wird jene Gewinngerade eingezeichnet, welche den Bereich der Nebenbedingungen berührt und für den Gewinn G den grössten Wert ergibt. Gewinngeraden, welche durch den Nebenbedingungsbereich hindurchgehen, lassen verschiedene Kombinationen für die Produktionsmengen zu, Gewinngeraden, welche den Nebenbedingungsbereich nicht schneiden, sind mit nicht realisierbaren Gewinnwerten ausgestattet. Als Lösung kann aus der Zeichnung für $x_1= 240$, für $x_2 = 480$ und für $G = 2400$ abgelesen werden.



Eine analytische Lösung für dieses Problem ist nicht so einfach. Gerade die Unsicherheit, die in den Ungleichungen steckt, lässt sich nicht so kurz fassen. Das zur Lösung von linearen Optimierungsaufgaben gebräuchliche Rechenverfahren, die *Simplexmethode* wird hier aber nicht behandelt.

Allgemeine Formulierung des Problems für Maximierung:

Zielfunktion $G = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$

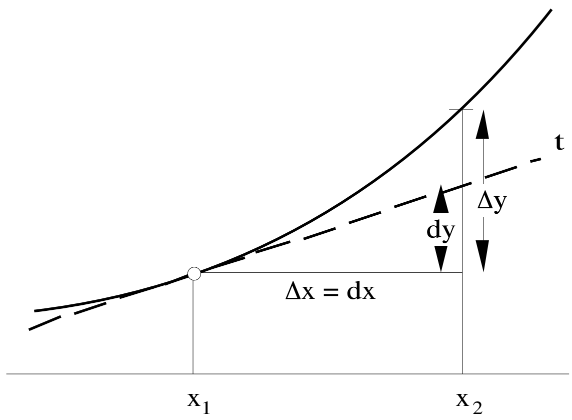
Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0$$

Für den Fall der Minimierung der Zielfunktion müssen in den Nebenbedingungen Abschätzungen nach unten (mit ≥ statt ≤) angegeben werden.

Differentiale



Eine Funktion f(x) ist differenzierbar und hat die Ableitung f '(x). Geometrisch bedeutet die 1. Ableitung bekanntlich die Steigung der Tangente. Der Zweck des Differenzierens ist es ja immer gewesen, für ein sehr kleines Stück die Kurve durch ihre Tangente zu ersetzen. Mit der 1. Ableitung kann die Tangentengleichung gebildet werden. Für einen sehr kleinen Fortschritt von x - wir nennen ihn hier dx oder Δx - wird sich das y nicht sehr viel anders verändern, wenn wir die ursprüngliche Funktion oder ihre Tangente im Startpunkt verfolgen. Mit Δy bezeichnen wir die effektive Veränderung des Funktionswertes bei einem Fortschritt um dx, dy soll die Veränderung des y-Wertes an der Tangente messen.

$y = f(x)$
$y' = f'(x)$
$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$dy = f'(x) \bullet dx$

Beispiel 1:

$y = x^2,\ x_1 = 2,\ \Delta x = dx = 0{,}01$

$y' = 2x$

$y'(2) = 4$

$\Delta y = (2.01)^2 - 2^2 = 4{,}0401 - 4 = 0{,}0401$

$dy = f'(2) \bullet dx = 4 \bullet 0{,}01 = 0{,}04$

Beispiel 2:

$y = \ln x,\ x_1 = 0{,}1,\ \Delta x = dx = 0{,}01$

$y' = \frac{1}{x}$

$y'(0{,}1) = \frac{1}{0{,}1} = 10$

$\Delta y = \ln 0{,}11 - \ln 0{,}1 = 0{,}095310$

$dy = f'(0{,}1) \bullet 0{,}01 = 10 \bullet 0{,}01 = 0{,}1$

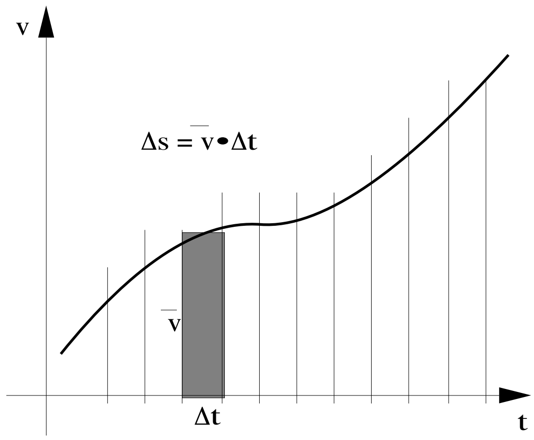
Bei genügend kleinem Wert von dx = Δx ist der Unterschied zwischen Δy und dy sehr klein. Für praktische Probleme liegt dieser Unterschied meist unterhalb der Genauigkeitsschwelle der Messwerte.

Bestimmtes Integral

Einführung

1. Weg-Zeit-Funktion:

Bei der gleichförmigen Bewegung aber auch bei der gleichmässig beschleunigten Bewegung kann man den in einer Zeitspanne Δt zurückgelegten Weg noch recht einfach berechnen. Bei einer nichtlinearen Geschwindigkeits-Zeit-Funktion gibt es aber Probleme. Die Geschwindigkeit ist ja die Änderung des Weges Δs während einer kleinen Zeitspanne Δt: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Für Δs gilt: $\Delta s = v \bullet \Delta t$

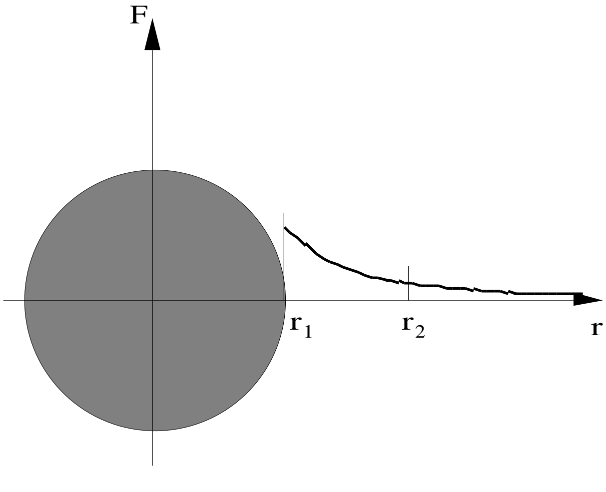


Am besten wird das gesamte Zeitintervall in kleine Spannen Δt zerlegt. Die jeweils in diesen Zeitspannen Δt zurückgelegten Strecken Δs werden summiert. Für eine sehr feine Einteilung erhält man auch sehr viele Summanden und das Ergebnis wird dem genauen Wert für den Weg sehr nahe kommen.

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i$$

2. Arbeit im Gravitationsfeld:

Bei der Brechnung der Hubarbeit im Gravitationsfeld bei grösserer Hubhöhe kann man die Änderung der Gravitationskraft mit dem Abstand r nicht mehr vernachlässigen: $F(r) = \gamma \frac{mM}{r^2}$



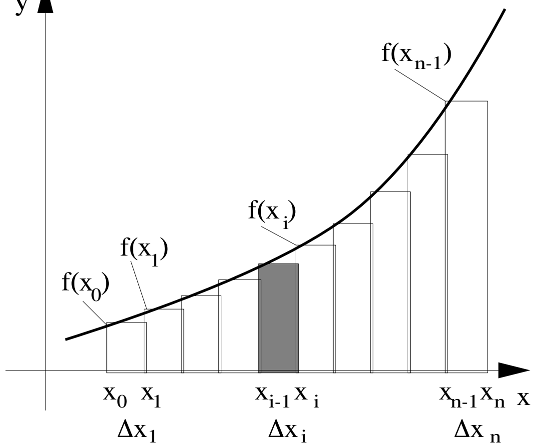
Auch hier kann die Gesamtarbeit W als Summe der einzelnen Arbeitsportionen ΔW berechnet werden. $\Delta W = F(r)\Delta r$

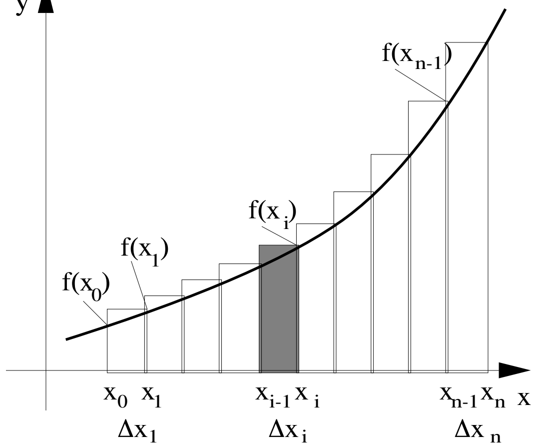
$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F_i(r)\Delta r_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma \frac{mM}{r_i^2} \Delta r_i$$

Geometrisch bedeuten diese Summierungen eine Berchnung der Fläche zwischen einer Kurve und der Abszisse im entsprechenden Abszissenabschnitt.

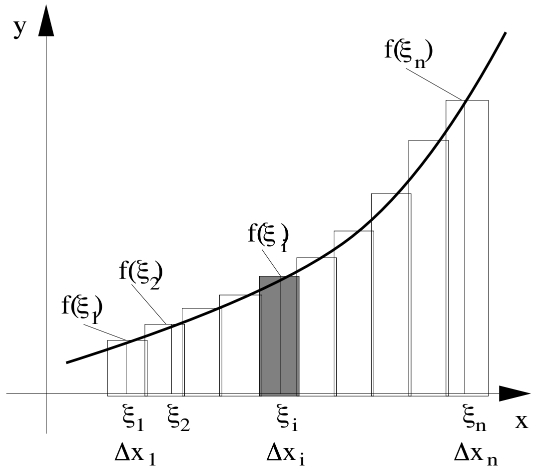
Flächenberechnung und bestimmtes Integral

Gegeben ist eine in einem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige Funktion f(x). Gesucht ist der Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse im Intervall [a, b]. Zunächst sei zudem vorausgesetzt, dass f(x) streng monoton steigend sei und für alle x aus dem Intervall [a, b] $f(x) \geq 0$ gelte.





Die Fläche wird in Streifen mit der Breite Δx_i eingeteilt. Werden jeweils mit den grössten Funktionswerten Rechtecke gebildet, nennt man die Summe der Rechtecksflächen Obersumme O_n. Entsprechend ist die Untersumme U_n die Summe der Rechtecke mit den jeweils kleinsten Funktionswerten in den einzelnen Streifen. Wählt man in jedem Streifen einen beliebigen Funktionswert $f(\xi_i)$ aus, erhält man eine sogenannte Zwischensumme F_n.



Es gilt: $U_n \le F_n \le O_n$

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$$

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Nun wird die Einteilung verfeinert, d.h. die Anzahl der Streifen wird vergrössert, wobei aber die Streifen selbst schmäler werden. Durch diese Verfeinerung werden Obersumme, Untersumme und Zwischensumme einen besseren Näherungswert für die gesuchte Fläche geben als zuvor. Bildet man den Grenzwert mit $n \to \infty$, wobei aber die Breite aller Streifen Δx_i nach Null gehen soll, erhalten wir einen genauen Wert für die gesuchte Fläche. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Wir werden jetzt die oben getroffenen Einschränkungen was das Vorzeichen von f(x) und die Monotonie betrifft fallen lassen. Es sei also f(x) eine in einem abgeschlossenen Intervall [a, b] stetige Funktion. Es wird eine Einteilung in n Streifen mit der Breite Δx_i vorgenommen. In jedem Streifen wird ein x-Wert ξ_i ausgewählt. Der Funktionswert an der Stelle ξ_i ist dann $f(\xi_i)$. Die n-te Zwischensumme F_n ist somit:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Existiert der Grenzwert mit n nach ∞ und Δx_i nach Null, so ist dieser Grenzwert das 'Integral der Funktion f(x) in den Grenzen von a bis b'.

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

f(x) heisst Integrand, das Intervall von a bis b ist der Integrationsweg, a und b heissen Integrationsgrenzen und x ist die Integrationsvariable.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt = \ldots$$

Das bestimmte Integral wird ganz allgemein als Grenzwert einer Produktsumme definiert. Für bestimmte Eigenschaften von f(x) (siehe oben) kann das Integral zur Berechnung von Flächen verwendet werden. In der Physik werden aber auch andere Grössen als Integral definiert.

Für die beiden Beispiele zur Einführung erhalten wir jetzt:

Weg-Zeit-Funktion:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Arbeit im Gravitationsfeld:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F_i(r)\Delta r_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma \frac{mM}{r_i^2}\Delta r_i = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2}\,dr$$

Integrationsregeln

Konstanter Faktor: $\int_a^b c \bullet f(x)dx = c \bullet \int_a^b f(x)dx$

Summe und Differenz: $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Zerlegung des Integrationsintervalls: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Vorzeichen des Integrals:

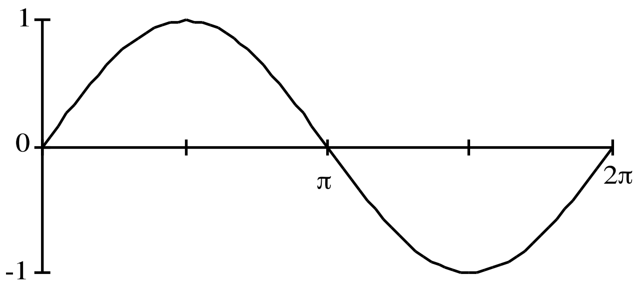
$a < b \wedge f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad I > 0$
$a < b \wedge f(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad I < 0$
$a > b \wedge f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad I < 0$, weil alle $\Delta x_i < 0$ sind
$a > b \wedge f(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad I > 0$

Vertauschen der Grenzen: $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Begründung für diese Regeln: Das Integral ist als Grenzwert definiert worden. Für Grenzwerte gelten bestimmte Rechenregeln, auf die hier verwiesen wird.

Beispiel:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = 0$$



Wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, haben die beiden Teilflächen dieselbe Grösse. Die beiden Teilintegrale haben aber unterschiedliches Vorzeichen, sodass das Gesamtintegral Null wird.

Achtung: Bei Flächenberechnungen darf nicht über Nullstellen wegintegriert werden.

Das unbestimmte Integral

$\int_a^b f(x)dx$ ist das bestimmte Integral einer Funktion f(x) in den Grenzen a bis b. Der Wert dieses Integrals hängt von der Grösse der Grenzen a und b ab. Wir werden jetzt eine Grenze variieren lassen. Der Wert des Integrals hängt dann von dieser variablen Grenze ab, er ist eine Funktion dieser Grenze.

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ $\Phi(x)$ ist ein unbestimmtes Integral der Funktion f.

$\Psi(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ $\Psi(x)$ ist ein anderes unbestimmtes Integral der Funktion f.

Wenn die untere Grenze variabel ist, sind die Verhältnisse gleich.

Satz: Zwei unbestimmte Integrale derselben Funktion f unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summand.

Beweis:

$$\Phi(x) - \Psi(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_\alpha^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^\alpha f(t)dt) = \int_a^\alpha f(t)dt = C = \text{konstant}$$

Es sei $F(x) = \Phi(x) + C$. Die Funktion F(x) ist ein unbestimmtes Integral. Lässt man C durch alle reelle Zahlen laufen, erhält man alle unbestimmten Integrale zur Integrandfunktion f. Wir definieren allgemein das unbestimmte Integral:

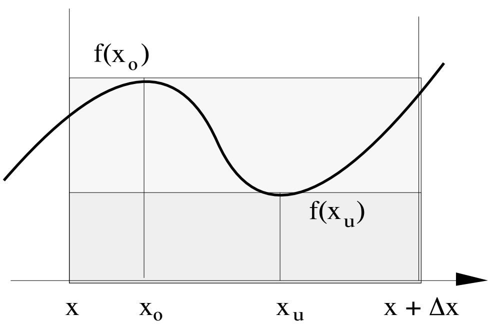
$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C}$$

Kernsatz der Differential und Integralrechnung

Es sei f(x) eine stetige Funktion und F(x) die Integralfunktion $F(x) = \int f(x)dx$.

Satz: Die 1. Ableitung der Integralfunktion F(x) ist gleich ihrer Integrandfunktion f(x).
oder:
Das Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens.

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt\right] = \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$



x_u sei jene Stelle, an der der Funktionswert am kleinsten im Intervall $(x, x + \Delta x)$ ist, x_o ist die Stelle mit dem grössten Funktionswert.

Für $\Delta x > 0$ und $f(x) \geq 0$ gilt:

$$f(x_u)\Delta x \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leq f(x_o)\Delta x \quad | :\Delta x$$

$$f(x_u) \leq \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leq f(x_o)$$

$$\Delta x \to 0: \quad f(x) \qquad f(x) \qquad f(x)$$

Für $\Delta x < 0$ und $f(x) \leq 0$ kann die Überlegung, die zum Grenzwert führt, analog gemacht werden.

Die 1. Ableitung der Funktion F(x) ist dann $F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(x)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Stammfunktion

Die Integralfunktion $F(x) = \int f(x)dx$ heisst Stammfunktion der Funktion f(x), weil gilt: $F'(x) = f(x)$.

Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integral

$$F(x) = \Phi(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$$

$$F(a) = \Phi(a) + C = \int_a^a f(t)dt + C = C$$

$$F(b) = \Phi(b) + C = \int_a^b f(t)dt + C = \int_a^b f(t)dt + F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Das bestimmte Integral kann berechnet werden, indem man zuerst die Stammfunktion zur Integrandfunktion bestimmt und die Differenz aus den Werten der Stammfunktion nach Einsetzen der oberen und unteren Integrationsgrenzen bildet. Regeln für die planmässige Suche nach den Stammfunktionen können aus den Ableitungsregeln gewonnen werden.

Grundintegrale

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \neq -1$

$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$

$\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$

$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$

Aus den Ableitungsregeln können weitere Integralformeln entnommen werden.