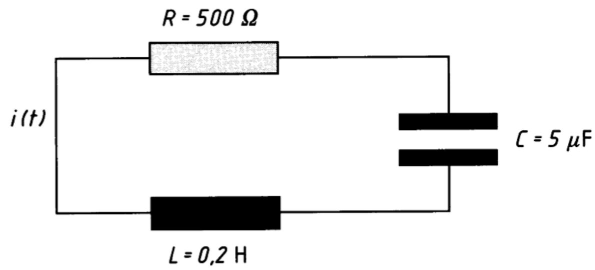
NTB,
Interstaatliche Hochschule
für Technik, Buchs
H. Knoll

HS 2011
Musterlösungen

DWW 6: Schwingungen: Lösungen

Aufgabe 6

Ein Kondensator mit der Kapazität $C = 5\,\mu$F wird zunächst auf $u_0 = 100$ V aufgeladen und anschliessend über einen ohmschen Widerstand von $R = 500\,\Omega$ und eine Spule mit der Induktivität $L = 0.2$ H entladen. Berechnen Sie die allgemeine Lösung für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke $i = i(t)$ in diesem Reihenschwingkreis (vgl. Papula FS, Seite 284 unten).



Zusatzaufgabe: Berechnen Sie die partikuläre Lösung, indem Sie den Strom i(t) der allgemeinen Lösung aufintegrieren: $q(t) = \int i\,dt$. Skizzieren Sie dann die partikuläre Lösung.

Lösung:
DGL: $R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} + L \cdot \frac{di}{dt} = 0$
ableiten ergibt: $R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t) + L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} = 0$
$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = 0$
mit den gegebenen Werten:
$\frac{d^2i}{dt^2} + 2500 \cdot \frac{di}{dt} + 10^6 \cdot i(t) = 0$
Exponentialansatz: $i = e^{\lambda t}$
Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 2500\lambda + 10^6 = 0$
$\lambda_{1/2} = \frac{-2500 \pm \sqrt{2500^2 - 4 \cdot 10^6}}{2} = \frac{-2500 \pm 1500}{2}$
$\lambda_1 = -500$
$\lambda_2 = -2000$

$i(t) = C_1 e^{-500t} + C_2 e^{-2000t}$
$\frac{di}{dt} = -500 C_1 e^{-500t} - 2000 C_2 e^{-2000}$

Ladungsfunktion:
$q(t) = \int i(t)\,dt = \int C_1 e^{-500t} + C_2 e^{-2000t}\,dt = \frac{C_1}{-500} e^{-500t} + \frac{C_2}{-2000} e^{-2000t} + C_3$
Stromfunktion und Ladungsfunktion müssen der ursprünglichen DGL (Maschenregel) genügen. Setzt man ein, ergibt sich:
$R\left(C_1 e^{-500t} + C_2 e^{-2000t}\right) + \frac{1}{C}\left(\frac{C_1}{-500} e^{-500t} + \frac{C_2}{-2000} e^{-2000t} + C_3\right) + L\left(-500 C_1 e^{-500t} - 2000 C_2 e^{-2000}\right) = 0$
$C_1 e^{-500t}\left(R - \frac{1}{500C} - 500L\right) + C_2 e^{-2000t}\left(R - \frac{1}{500C} - 500L\right) + \frac{C_3}{C} = 0$
Mit den Angaben für R, L und C ergeben die Werte in den Klammern Null. Somit muss $C_3 = 0$ sein.

Anfangswertproblem:
$i(0) = 0$
$q(0) = C \cdot u_0 = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 5 \cdot 10^{-4}$

$0 = C_1 + C_2$
$5 \cdot 10^{-4} = -\frac{C_1}{500} - \frac{C_2}{2000}$

$0 = C_1 + C_2$
$1 = -4C_1 - C_2$

$1 = -3C_1$
$C_1 = -\frac{1}{3}$
$C_2 = -C_1 = \frac{1}{3}$

$i(t) = -\frac{1}{3}e^{-500t} + \frac{1}{3}e^{-2000t}$

Aufgabe 11

Ein schwingfähiges mechanisches Feder-Masse-System mit den Kenngrössen $m = 20$ kg, r =40 kg/s, $k = 100$ N/m wird durch eine von aussen einwirkende Kraft $F(t) = 20 \cdot \sin(\omega t)$ N zu erzwungenen Schwingungen angeregt.

a) Wie lautet die Schwingungsgleichung?

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung.

c) Wie lautet die stationäre Lösung der Schwingungsgleichung?

d) Berechnen Sie die stationäre Lösung für die Erregerkreisfrequenz $\omega = 1\text{s}^{-1}$

Lösung:

a) $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t) \cdot \sin(\omega t)$
$20\ddot{x} + 40\dot{x} + 100x = 20 \cdot \sin(\omega t)$
$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin(\omega t)$

b) homogene DGL: $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ Exponentialansatz: $x = e^{\lambda t}$

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$
$\lambda_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2j$
$x_h = e^{-t}(A\sin(2t) + B\cos(2t))$

partikuläre Lösung: Ansatz $x = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$
$\dot{x} = C_1\omega\cos(\omega t) - C_2\omega\sin(\omega t)$
$\ddot{x} = -C_1\omega^2\sin(\omega t) - C_2\omega^2\cos(\omega t)$

$-C_1\omega^2\sin(\omega t) - C_2\omega^2\cos(\omega t) + 2C_1\omega\cos(\omega t) - 2C_2\omega\sin(\omega t) + 5C_1\sin(\omega t) + 5C_2\cos(\omega t) = \sin(\omega t)$

Koeffizientenvergleich:

$\sin(\omega t)$: $-C_1\omega^2 - 2C_2\omega + 5C_1 = 1$

$\cos(\omega t)$: $-C_2\omega^2 + 2C_1\omega + 5C_2 = 0$

$C_1(5-\omega^2) - 2C_2\omega = 1$
$2C_1\omega + C_2(5-\omega^2) = 0$ $C_1 = -\frac{C_2(5-\omega^2)}{2\omega}$

$-\frac{C_2(5-\omega^2)^2}{2\omega} - \frac{4C_2\omega^2}{2\omega} = 1$
$C_2 = \frac{-2\omega}{(5-\omega^2)^2+4\omega^2}$
$C_1 = \frac{(5-\omega^2)}{(5-\omega^2)^2+4\omega^2}$
$x = x_h + x_p = e^{-t}(A\sin(2t) + B\cos(2t)) + \frac{(5-\omega^2)}{(5-\omega^2)^2+4\omega^2}\sin(\omega t) + \frac{-2\omega}{(5-\omega^2)^2+4\omega^2}\cos(\omega t)$

c) Die stationäre Lösung der DGL ist gleich der partikulären Lösung der inhomogenen DGL also:
$x_p = \frac{(5-\omega^2)}{(5-\omega^2)^2+4\omega^2}\sin(\omega t) + \frac{-2\omega}{(5-\omega^2)^2+4\omega^2}\cos(\omega t)$
Für grosse Werte von t ist der Einschwingvorgang zu Ende, die homogene Lösung ist praktisch auf Null gesunken und spielt deshalb keine Rolle mehr.

d) Für $\omega = 1$ erhält man:
$x_p = \frac{(5-1)}{(5-1)^2+4}\sin(t) + \frac{-2}{(5-1)^2+4}\cos(t) = \frac{4}{20}\sin(t) + \frac{-2}{20}\cos(t) = \frac{1}{5}\sin(t) - \frac{1}{10}\cos(t)$

Umfomren auf $x(t) = A\sin(\omega t - \varphi)$

$x(t) = A\sin(t-\varphi) = A\sin(t)\cos(\varphi) - A\cos(t)\sin(\varphi)$
Koeffizientenvergleich:

$\sin(t)$: $\quad A\cos(\varphi) = \frac{1}{5}$

$\cos(t)$: $\quad -A\sin(\varphi) = -\frac{1}{10}$

$\tan(\varphi) = \left(\frac{1}{10} : \frac{1}{5}\right) = 0.5 \qquad \varphi = \arctan 0.5 = 0.4636$ rad
$A^2 = (\frac{1}{5})^2 + (\frac{1}{10})^2 = \frac{1}{25} + \frac{1}{100} = \frac{1}{20} = 0.05$
$A = 0.2236$

$x(t) = 0.2236\sin(t - 0.4636)$