NTB,
Interstaatliche Hochschule
für Technik, Buchs
H. Knoll

HS 2011
Musterlösungen

DWW 1: Definition, Klassifikation und Beispiele: Lösungen

Beispiele aus Mischvorgängen

Bei Mischvorgängen ist generell zu beachten, dass mengenartige Grössen (wie z.B. Masse, Volumen) addiert werden können und damit die Gesamtmenge bestimmt wird.

Aufgabe 19

At time $t = 0$, a tank contains 50 pounds (lbs) of salt dissolved in 80 gals of water. Suppose that water containing $\frac{1}{3}$ lb of salt per gallon (gal) is being added to the tank at a rate of 6 gal/min, and that the well-stirred solution is being drained from the tank at the same rate. Find an ODE for the amount s(t) of salt in the tank at time t.

Lösung:
Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich 50 lbs Salz im Tank mit dem Volumen $V_0 = 80$ gals in Wasser gelöst.
Es wird nun Salzlösung mit der Konzentration von $\frac{1}{3}$ lb/min zugeführt. Geichzeitig fliesst dasselbe Volumen Flüssigkeit ab, aber mit der jeweils aktuellen Salzkonzentration.

pro Minute zugeführte Salzmenge $= \frac{1}{3} \cdot 6$ lb.
pro Minute abgeführte Salzmenge $= \frac{s(t)}{V_0} \cdot 6$ lb.

Die pro Zeitspanne Δt gemessene Salzmengenänderung Δs ist:
$\Delta s = \Delta s_{zu} - \Delta s_{ab} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \Delta t - \frac{s(t)}{V_0} \cdot 6 \cdot \Delta t$

Die Salzmengenänderungsrate ist dann: $\dot{s} = \frac{1}{3} \cdot 6 - \frac{s(t)}{V_0} \cdot 6$
Damit ist die DGL schon gefunden. Man kann sie noch etwas umschreiben:
$\dot{s} + \frac{6}{80} \cdot s(t) = 2$

Aufgabe 20

A room having dimensions 10 ft × 15 ft × 8 ft originally contains 0.001 % of carbon monoxide (CO). Suppose that at time t = 0, fumes containing 5 % CO begin entering the room at a rate of 0.12 ft^3/min, and that the well-circulated mixture is eliminated from the room at the same rate. Find an ODE for the volume $c(t)$ of CO in the room at time t.

Lösung:
Das Gesamtvolumen $V_0 = 10 \cdot 15 \cdot 8$ ft^3 $= 1200$ ft^3.
Pro Minute zugeführte Menge von 5%-igem CO: $\frac{5}{100} \cdot 0.12$ ft^3
Pro Minute abgeführte Menge von CO der Konzentration $c(t)$: $c(t) \cdot V_0 \cdot 0.12$ ft^3

In der Zeitspanne Δt wird die Menge CO im Raum um folgenden Wert verändert:
$\Delta V_{CO} = \Delta V_{zu} - \Delta V_{ab} = \frac{5}{100} \cdot 0.12 \cdot \Delta t - c(t) \cdot V_0 \cdot 0.12 \cdot \Delta t$
Die Änderungsrate für das CO-Volumen ist dann:
$\dot{V}_{CO}(t) = \frac{5}{100} \cdot 0.12 - c(t) \cdot V_0 \cdot 0.12$

Wenn $c(t)$ die momentane Konzentration von CO im Raum ist, dann gilt: $c(t) = \frac{V_{CO}(t)}{V_0}$ und $\dot{c}(t) = \frac{\dot{V}_{CO}(t)}{V_0}$
Oben eingesetzt erhält man:
$V_0 \cdot \dot{c}(t) = \frac{5}{100} \cdot 0.12 - c(t) \cdot V_0 \cdot 0.12$

und etwas geordnet:
$\dot{c}(t) + c(t) \cdot \frac{0.12}{V_0} = \frac{5}{100} \cdot 0.12$
$\dot{c}(t) + 0.0001 \cdot c(t) = 0.006$

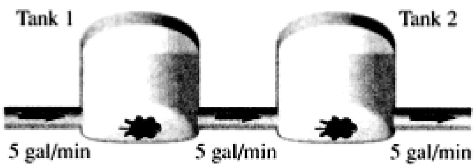
Aufgabe 21

Shown in the figure below is a two-tank system in which water flows in and out of the tanks at a rate of 5 gal/min. Each tank contains 50 gal of water. 1 lb of dye is thoroughly mixed into the water in tank 1 at time $t = 0$. Let $x(t)$ denote the amount of dye in tank 1 after t minutes and $y(t)$ the amount in tank 2.

a) Find the ODE for the amount of dye in tank 1.

b) Show that $x(t) = e^{?0.1t}$ is a particular solution of this ODE.

c) Find the ODE for the amount of dye in tank 2.



Lösung:
Die beiden Tanks haben je ein volumen von $V_0 = 50$ gal.
Zufluss, Durchfluss und Abfluss sind mit 5 gal/min gegeben.
Zu Beginn ($t = 0$) befindet sich 1 lb Farbstoff im Tank 1.
Wir bezeichnen die Menge Farbstoff (gemessen in lb) zum Zeitpunkt t im Tank 1 mit $x(t)$ und im Tank 2 mit $y(t)$.

Pro Minute fliessen 5 gal Wasser in den Tank 1 und $5 \cdot \frac{x(t)}{50}$ lb Farbstoff aus dem Tank.
Diese Menge Farbstoff fliesst pro Minute in den Tank 2, aus dem $5 \cdot \frac{y(t)}{50}$ lb Farbstoff abfliessen.

Für den Tank 1 gilt: Die Änderungsrate an Farbstoff ist gleich dem negativen Abflussstrom an Farbstoff.
$\dot{x}(t) = -5 \cdot \frac{x(t)}{50}$ mit $x(0) = 1$
$\dot{x} = -0.1x$

Für den Tank 2 gilt: Die Änderungsrate an Farbstoff ist gleich dem Zuflussstrom minus dem Abflussstrom.
$\dot{y}(t) = 5 \cdot \frac{x(t)}{50} - 5 \cdot \frac{y(t)}{50}$ mit $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$
$\dot{y} = 0.1x - 0.1y$
Für $x(t)$ braucht man allerdings noch die Lösung der ersten DGL, damit man dann auf $y(t)$ lösen kann. Diese Lösung für $x(t)$ ist in der Aufgabe b) angegeben. Durch Einsetzen in die 1. DGL kann diese Lösung überprüft werden.

Aufgabe 22

Many common drugs (such as forms of penicillin) are eliminated from the blood-stream at a rate that is proportional to the amount y still present. Find the ODE for $y(t)$ if

a) y_0 milligrams are injected directly into the bloodstream.

b) the drug is fed intravenously into the bloodstream at a rate of I milligrams per minute.

Lösung:
Die Änderungsrate $\dot{y}$ des Fremdstoffes (z. B. Penicillin) ist also proportional zum momentanen Bestand y dieses Stoffes. Daraus folgt für die Aufgabe a) unmittelbar die Gleichung:

a) $\dot{y} = -k \cdot y$ mit $y(0) = y_0$

b) $\dot{y} = I - k \cdot y$ mit $y(0) = 0$

Aufgabe 23

A cell is in a liquid containing a solute, such as potassium, of constant concentration c_0. If $c(t)$ is the concentration of the solute inside the cell at time t, then Fick's principle for passive diffusion across the cell membrane asserts that the rate at which the concentration changes is proportional to the concentration gradient $c_0?c(t)$. Find the ODE for $c(t)$.

dissolved aufgelöst; to stir umrühren; to drain entwässern, abfliessen lassen; fume Rauch; dye Farbe, Farbstoff; blood Blut; to feed zuführen; intravenously intravenös; potassium Kalium.

Lösung:
Die zeitliche Änderungsrate einer Grösse ist gleich iher Ableitung nach t.
$\dot{c}(t) = k \cdot (c_0 - c(t)$

Gemischte Beispiele

Aufgabe 27

Eine chemische Reaktion ist von folgendem Typ: Ein Atom A vereinigt sich mit einem Atom B zu einem Molekül AB: A + B → AB. Zu Beginn der Reaktion gibt es nur a Atome A und b Atome B, und zum Zeitpunkt t sind $x(t)$ Moleküle AB entstanden. Die Zunahme von x ist proportional zur Anzahl Atome A und proportional zur Anzahl Atome B.

Lösung:
Die zeitliche Änderungsrate $\dot{x}(t)$ der Moleküle ist proportional zur Anzahl der noch vorhandenen Atome der beiden Sorten. Noch vorhanden sind aber nur mehr $a - x(t)$ bzw. $b - x(t)$ Atome der jeweiligen Sorte. Somit erhält man folgende DGL
$\dot{x}(t) = k \cdot (a - x(t))(b - x(t))$ mit $x(0) = 0$