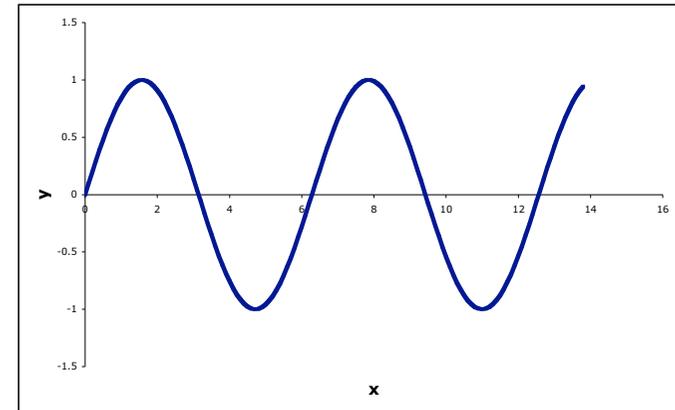


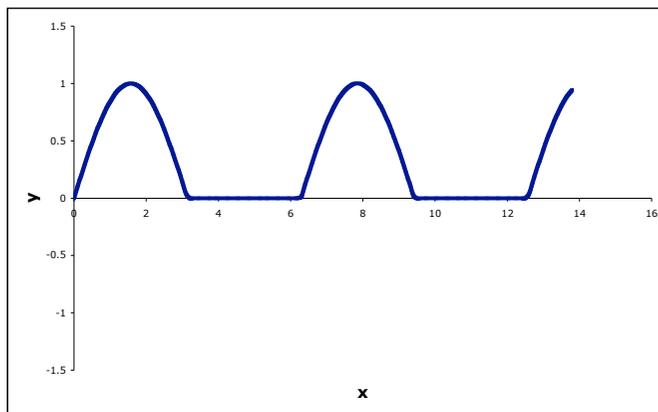
## Fourier-Reihen

- Was ist eine Fourier-Reihe?
- Wozu braucht man Fourier-Reihen?
- Die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion
  - Überblick über periodische Funktionen
  - Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Fourier-Reihe
  - Aufgaben

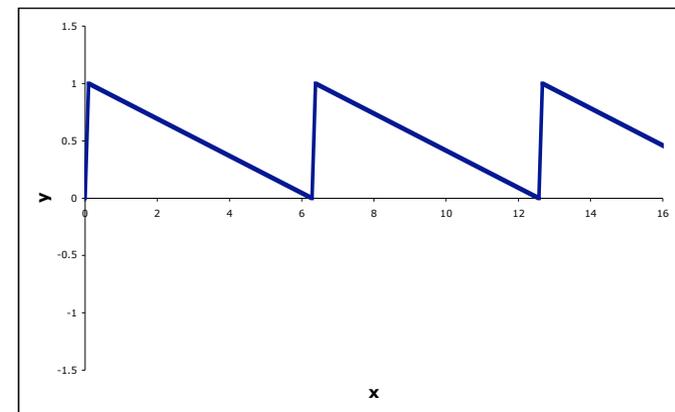
## Periodische Funktionen 1



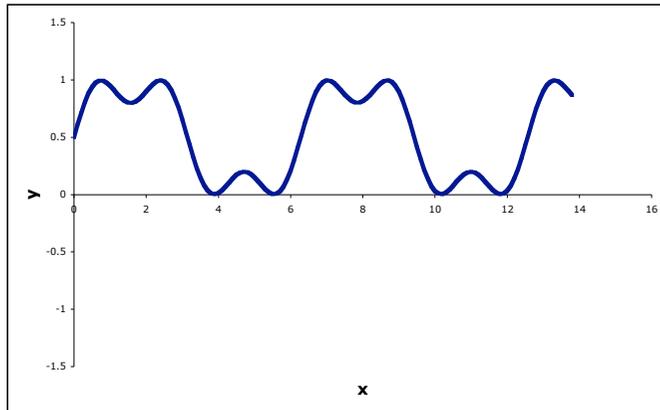
## Periodische Funktionen 2



## Periodische Funktionen 3



## Periodische Funktionen 4



## Fourier-Reihe einer periodischen Funktion

Eine Periodische Funktion mit der Gleichung  $y = f(x)$  und der Periode  $p = 2\pi$  kann unter bestimmten Voraussetzung in eine unendliche trigonometrische Reihe entwickelt werden:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

## Berechnung der Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

## Voraussetzungen

Dirichletsche Bedingungen

- Das Periodenintervall lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen  $f(x)$  stetig und monoton ist.
- In den Unstetigkeitsstellen existiert sowohl der linksseitige wie auch der rechtseitige Grenzwert.

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Fourier-Reihe für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

## Symmetriebetrachtungen

Die Fourier-Reihe einer geraden Funktion enthält nur gerade Reihenglieder, d.h. neben dem konstanten Glied nur die Cosinusglieder ( $b_n = 0$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Die Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion enthält nur ungerade Reihenglieder, d.h. nur die Sinusglieder ( $a_n = 0$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

## Weitere Besonderheiten

- Die Integration darf über ein beliebiges Periodenintervall der Länge  $2\pi$  erstreckt werden (z.B. auch über das Intervall  $(-\pi, \pi)$ ).
- Durch Abbruch der Fourier-Reihe nach endlich vielen Gliedern erhält man eine Näherungsfunktion für  $f(x)$ .
- Die Fourier-Entwicklung kann auch auf periodische Funktionen mit Perioden  $\neq 2\pi$  übertragen werden.