HTW Chur
H. Knoll

HS 2011
Musterlösungen

bgMat3: Potenzreihen: Lösungen

Aufgabe 1

Entwickeln Sie folgende Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe und bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius:

a) $f(x) = (1+x)^n$ (Binomische Reihe)

b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Lösung:

a) Zu beachten ist, dass n vorgegeben und damit fest ist. Als Laufzahl wird hier k verwendet.

$f(x) = (1+x)^n$ $\qquad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ $\qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{n}{1} = n$

$f''(x) = n \cdot (n-1)(1+x)^{n-2}$ $\qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$

...

$f^{(k)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot .. \cdot (n-k+1)(1+x)^{n-k}$ $\qquad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot .. \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

...

$f^{(n)}(x) = n!$ $\qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k$$

Die Summe hat $n+1$ Summanden, da alle Ableitungen von f nach der n-ten Ableitung Null sind. Somit ist der Konvergenzradius ∞. Eine Berechnung mit der Formel aus dem Formelbuch führt hier wegen der endlichen Anzahl Summanden nicht zum Ziel.

b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ $\qquad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{-1}{1} = -1$

$f''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}$ $\qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2!}{2!} = 1$

$f'''(x) = \frac{-3!}{(1+x)^4}$ $\qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{-3!}{3!} = -1$

$f^{(4)}(x) = \frac{4!}{(1+x)^5}$ $\qquad a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{n!} = \frac{4!}{4!} = 1$

...

$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^n+1}$ $\qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \frac{n!}{n!} = (-1)^n$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^5 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

Konvergenzradius: $r = \lim\limits_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim\limits_{k \to \infty} \left| \frac{(-1)^k k}{(-1)^{k+1}(k+1)} \right| = 1$

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$f'(x) = -2\,\frac{x}{(1+x^2)^2}$ $\qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 0$

$f''(x) = 2\,\frac{3\,x^2-1}{(1+x^2)^3}$ $\qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{-2}{2!} = 1$

$f'''(x) = -24\,\frac{x\left(x^2-1\right)}{(1+x^2)^4}$ $\qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = 0$

$f^{(4)}(x) = 24\,\frac{5\,x^4-10\,x^2+1}{(1+x^2)^5}$ $\qquad a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{n!} = \frac{4!}{4!} = 1$

...

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + -... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Konvergenzradius: Diese Reihe ist eine geometrische Reihe mit dem Quotient $q = -1$. Somit gilt nicht $|q| < 1$ und damit ist die Reihe nicht konvergent. $r = 0$.

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ $\qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 0$

$f''(x) = \frac{2\,x^2+1}{(-1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

$f'''(x) = -3\,\frac{x\left(2\,x^2+3\right)}{(-1+x^2)^3\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = 0$

$f^{(4)}(x) = 3\,\frac{8\,x^4+24\,x^2+3}{(-1+x^2)^4\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{n!} = \frac{9}{4!} = \frac{3}{8}$

...

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{10}{32}x^6 + ...$$

Um den Konvergenzradius zu bestimmen, braucht man das allgemeine Glied. Dieses ist hier aber nicht leicht zu bestimmen.

Aufgabe 2

Die Reihen von 1b), 1c) und 1d) können integriert werden. Dadurch erhält man die Logarithmusreihe, die Arcustangensreihe und die Arcussinusreihe. Bestimmen Sie diese Reihen.

Lösung:

a) $\int \frac{dx}{1+x} = \int (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)dx = \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k\right)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln|x+1|$

b) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 + - \ldots)\,dx = \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan x$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{10}{32}x^6 + ...\right)\,dx = x + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{3}{5\cdot 8}x^5 + \frac{10}{7\cdot 32}x^7 + ... \arcsin x$

Aufgabe 3

Entwickeln Sie die Funktion f in eine Potenzreihe an der Stelle $x_0 = 0$ und geben Sie die ersten vier nicht verschwindenden Glieder an:

a) $f(x) = e^{\sin x}$

b) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

c) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$

d) $f(x) = \sqrt{x+4}$

Lösung:

a) $f(x) = e^{\sin x}$ $\qquad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$ $\qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1} = 1$

$f''(x) = e^{\sin x} \cdot (\cos^2 x - \sin x)$ $\qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}$

$f'''(x) = e^{\sin x} \cos x \cdot (\cos^2 x - 3\sin x - 1)$ $\qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{0}{3!} = 0$

$f^{(4)}(x) = e^{\sin x} \left(\sin x - 7\,\cos^2 x + 3 - 6\,\sin x \cos^2 x + \cos^4 x\right)$ $\qquad a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{-3}{4!} = -\frac{1}{8}$

$f(x) = e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + ...$

b) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ $\qquad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ $\qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{0}{1} = 0$

$f''(x) = \frac{2-\cos^2 x}{\cos^3 x}$ $\qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2}$

$f'''(x) = \frac{\sin x(6-\cos^2 x)}{\cos^4 x}$ $\qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{0}{3!} = 0$

$f^{(4)}(x) = \frac{\cos^4 x - 20\cos^2 x + 24}{\cos^5 x}$ $\qquad a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{5}{4!} = \frac{5}{24}$

$f^{(5)}(x) = \frac{\sin x(\cos^4 x - 60\cos^2 x + 120)}{\cos^6 x}$ $\qquad a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{0}{5!} = 0$

$f^{(6)}(x) = \frac{-\cos^6 x + 182\cos^4 x - 840\cos^2 x + 720}{\cos^7 x}$ $\qquad a_6 = \frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{61}{6!} = \frac{61}{720}$

$f(x) = \frac{1}{\cos x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + ...$

c) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ $\qquad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{0}{1} = 0$

$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$ $\qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1} = 1$

$f''(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}$ $\qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$f'''(x) = \frac{2 - 2\sin x - \cos^2 x}{\cos^3 x}$ $\qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

$f^{(4)}(x) = \frac{6\sin x - \sin x\cos^2 x + 4\cos^2 x - 6}{\cos^4 x}$ $\qquad a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{-2}{4!} = -\frac{1}{12}$

$f(x) = \ln(1 + \sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + -...$

d) $f(x) = \sqrt{x+4}$ $\qquad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{2}{1} = 2$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$ $\qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4}$

$f''(x) = -\frac{1}{4\,(x+4)\sqrt{x+4}}$ $\qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{-1}{32 \cdot 2} = -\frac{1}{64}$

$f'''(x) = \frac{3}{8\,(x+4)^2\sqrt{x+4}}$ $\qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{3}{256 \cdot 3!} = \frac{1}{512}$

$f(x) = \sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{512}x^3 - +...$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale näherungsweise mittels Taylor-Polynomen:

a) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

b) $\int\limits_0^{x} e^{-t^2}\,dt$

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\sqrt{t}\;dt$

d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t}\sin\sqrt{t}\;dt$

Lösung:

a) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$
Entwicklung an der Stelle $x_0 = 0$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 + \frac{5}{16}x^9$
Integrieren: $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 + \frac{5}{16}x^9\right)\, dx = \left[x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{5}{16} \cdot \frac{x^{10}}{10}\ \right]_0^{\frac{1}{2}} =$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{128} + \frac{3}{7'168} + \frac{5}{163'840} - 0 = 0.5083$

b) $\int\limits_0^x e^{-t^2} dt$ Entwickeln an der Stelle $t_0 = 0$
$e^{-t^2} \approx 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{24}t^8$
Integrieren: $\int\limits_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{24}t^8\right)\ dt = \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{t^7}{7} + \frac{1}{24} \cdot \frac{t^9}{9}\right]_0^x =$
$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{42}x^7 + \frac{1}{216}x^9$

c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\sqrt{t}\ dt$
Entwickeln an der Stelle $t_0 = 0$
$\cos\sqrt{t} \approx 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{24}t^2 - \frac{1}{720}t^3$
Integrieren: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{24}t^2 - \frac{1}{720}t^3\right)\ dt = \left[t - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{1}{24} \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{1}{720} \cdot \frac{t^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$
$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{72} \cdot \frac{\pi^3}{64} - \frac{1}{2'880} \cdot \frac{\pi^4}{256} = 0.1751$

d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t}\sin\sqrt{t}\ dt$
Entwickeln an der Stelle $t_0 = 0$
$\sqrt{t}\sin\sqrt{t} \approx t - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{120}t^3 - \frac{1}{5040}t^4$
Integrieren: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{t}\sin\sqrt{t} \approx t - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{120}t^3 - \frac{1}{5040}t^4\right)dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{1}{120} \cdot \frac{t^4}{4} - \frac{1}{5040} \cdot \frac{t^5}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{18} \cdot \frac{\pi^3}{8} + \frac{1}{480} \cdot \frac{\pi^4}{16} - \frac{1}{25200} \cdot \frac{\pi^5}{32} = 1.0307$