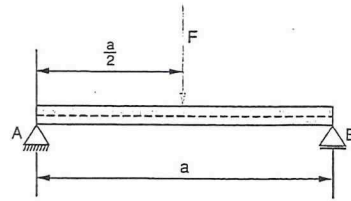


3.2 Biegelinie

Beispiel:

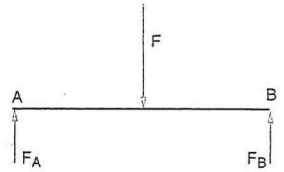
Ein elastischer Stab der Länge a ruht auf zwei Auflagepunkten (A und B) und wird in seiner Mitte mit einer Einzelkraft F lotrecht belastet (vgl. Figur). Welche Form nimmt der (massenlose) Stab unter der Belastung an, wenn wir voraussetzen, dass sowohl seine Materialeigenschaften als auch sein Querschnitt über die gesamte Stablänge unverändert bleibt?



Lösung:

Aufstellen der DG:

Wird ein elastischer Stab wie in der nebenstehenden Figur gebogen, so wird die Stabunterseite dabei gedehnt, die Staboberseite jedoch gestaucht. Irgendwo dazwischen können wir uns eine Linie denken, die spannungslos bleibt und deshalb bei der Verformung des Stabs ihre Länge nicht ändert. Die Mechanik spricht in diesem Fall von der sogenannten **neutralen Faser**. Diese neutrale Faser beschreibt unter Last die sogenannte **elastische Linie** oder **Biegelinie**. Bei der Lösung unserer Aufgabe wird uns nur interessieren, wie diese Biegelinie aussieht. Es interessiert uns hier aber nicht – wie etwa beim lotrechten Wurf – wie die Biegelinie sich unter der Krafteinwirkung zeitlich ändert, sondern lediglich wie sie in ihrem stabilen Endzustand aussieht. Und dieser Endzustand ist physikalisch ein Gleichgewichtszustand. Wann aber befindet sich der Stab im Gleichgewicht? Wenn er sich nicht mehr "rührt", wenn also die Summe der auf ihn einwirkenden Kräfte (die „Resultierende“) Null ist. Auf den Stab wirken drei Kräfte: die Einzellast F und die beiden Auflagekräfte F_A und F_B , die aus Symmetriegründen gleich sind: $F_A = F_B$



Gleichgewicht herrscht bei:

$$F_A + F_B - F = 0$$

$$2F_A = F$$

$$F_A = F_B = \frac{F}{2}$$

Und nun ziehen wir die Erkenntnisse der Festigkeitslehre zu Rate. Diese teilt uns mit, dass die örtliche Krümmung $\kappa(x)$ der Biegelinie proportional zum dort wirksamen Drehmoment (bzw. Biegemoment) $M(x)$ ist, solange sich der Stab im elastischen Bereich befindet:

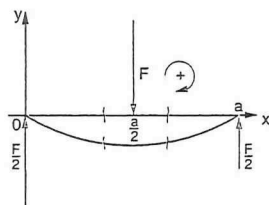
$\kappa(x) \sim M(x)$
Das ist anschaulich klar: umso stärker eine verbiegender Kraft auf eine Stelle einwirkt, desto stärker krümmt sich der Stab unter ihr! Jetzt ist der Augenblick gekommen, wo wir unsere Biegelinie in ein Koordinatensystem verlegen müssen. Wir wählen hierzu unser gewohntes xy -System. Dann können wir die Krümmung κ einer Kurve $y = f(x)$ darstellen als:

$$\kappa(x) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Angesichts dieser Formel haben wir nun die Chance, unsere ursprüngliche Problemstellung deutlich zu vereinfachen. Denn wir sehen aus obiger Formel, dass wir eine gute Näherung für die Krümmung κ erhalten können: $|y'| = 0$ bzw. $|y'| \ll 1 \Rightarrow \kappa \approx y''$

Das bedeutet, dass es vertretbar ist, y'' als Näherung für die Krümmung κ zu betrachten, solange der Kurvenanstieg y' der Biegelinie sehr klein im Vergleich zu 1 bleibt. Diese Bedingung muss natürlich entlang der gesamten Biegelinie erfüllt sein.

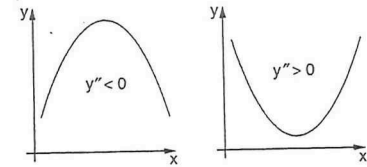
Dadurch vereinfacht sich nun unsere Beziehung wesentlich: $y'' = \kappa \cdot M(x)$



Übrigens beträgt die Größe des Proportionalitätsfaktors k laut Festigkeitslehre $\frac{1}{EJ}$

E Elastizitätsmodul des Stabmaterials, ein stoffabhängiger Parameter
 J Flächenträgheitsmoment des Stabquerschnitts bezüglich der horizontalen Schwerachse

In der obigen Zeichnung haben wir bereits angedeutet, im Uhrzeigersinn wirkende Biegemomente positiv zu zählen. (Das ist aber nur eine Vereinbarung.) Diese Momente haben die Wirkung, einen realen Stab nach unten zu krümmen. y'' muss passend dazu negativ sein. Damit dies geschieht, fügen wir in der Gleichung noch ein negatives Vorzeichen ein. (Sonst würde die abwärts gerichtete Kraft F eine sich nach oben krümmende Biegelinie bewirken, was offenbar unsinnig wäre.)



$$y'' = -\frac{M(x)}{EJ}$$

Damit haben wir die DG der Biegelinie teilweise aufgestellt. Ihre rechte Seite ist uns noch nicht näher bekannt. Trotzdem kann über diese DG bereits ausgesagt werden, dass sie in 1. Gräd (linear) und Ordnung (2) mit jener des lotrechten Wurfs übereinstimmt. Bestimmen wir nun auch die rechte Seite unserer DG. Wir drücken den Momentenverlauf $M(x)$ mit Hilfe der drei Kräfte F, F_A, F_B , der Stablänge a und der jeweiligen Stelle x aus. Sehen wir uns beide Stabhälften getrennt voneinander an.

Aus der Elementarphysik wissen wir:
Moment = Kraft mal Abstand
Unter dem „Abstand“ wird dabei der Normalabstand der Wirkungslinie der Kraft vom betrachteten Punkt verstanden.

Linke Stabhälfte ($0 \leq x \leq \frac{a}{2}$):

Rechte Stabhälfte ($\frac{a}{2} \leq x \leq a$):

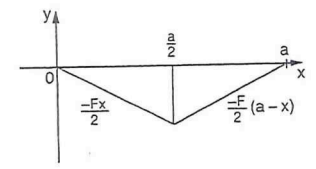
- Wir wählen eine beliebige Stelle x auf dem Stab und vereinbaren zweierlei:
- (1) Sämtliche (Biege-)Momente, die auf die Stelle x im Uhrzeigersinn einwirken, sollen positiv gezählt werden.
 - (2) Von links auf die Stelle x einwirkende (Biege-)Momente werden ignoriert.

Die rechte Seite ist – entsprechend der Arbeitsanweisung und in Analogie zur linken Seite – auf einem separaten Blatt zu vervollständigen (vgl. Aufgabe 405.):

$$M_L(x) = +F\left(\frac{a}{2} - x\right) - F_A(a - x) = F\left(\frac{a}{2} - x\right) - \frac{F}{2}(a - x) = -\frac{Fx}{2}$$

$$M_R(x) = \dots = \frac{F}{2}(a - x)$$

Aus diesen beiden Ergebnissen ist ersichtlich, dass wir $M(x)$ nicht mit einer einzigen Funktionsgleichung für das gesamte Intervall $0 \leq x \leq a$ darstellen können. Wir können diese Schwierigkeit aber umgehen, indem wir zwei getrennte DGen aufstellen.



$$y''_L = -\frac{M(x)}{EJ} = \frac{Fx}{2EJ}$$

$$y''_R = -\frac{M(x)}{EJ} = -\frac{F(a-x)}{2EJ}$$

Dami wir le

Besti

- 1
- 2

Rand

Die a die n Bedir

1. De sic
2. De x: nit

y_L

Wir s

$$0 = \gamma$$

$$B = C$$

Die z nebe

$$0 = \gamma$$

$$A = :$$

Durc allge

$$y_L =$$

$$y_L =$$

Solang verläuft Eine gt der Ste

Damit haben wir beide DGen der Biegelinie aufgestellt, die wir lediglich 2-mal integrieren müssen.

DG des Typs:

$$y^{(n)} = f(x)$$

Lösung:

$$① \quad y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

⋮

$$② \quad y = \underbrace{\int \dots \int}_n f(x) dx \dots dx + \sum_{i=1}^n C_i x^{i-1}$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung

$$① \quad y_L = \frac{Fx^2}{4EJ} + A$$

$$② \quad y_L = \frac{Fx^3}{12EJ} + Ax + B$$

$$① \quad y_R = \dots$$

$$② \quad y_R = \dots$$

Randwertproblem:

Die allgemeinen Integrale der beiden DGen enthalten insgesamt vier Integrationsparameter A, B und C, D, die mit jeweils zwei Randbedingungen bestimmt werden können. Naheliegender sind die folgenden vier Bedingungen:

1. Der Stab ruht auf dem linken Stützpunkt auf, der sich im Koordinatenursprung befindet: $y_L(0) = 0$

2. Da die Biegelinie einen bezüglich der Achse $x = \frac{a}{2}$ symmetrischen Verlauf nehmen muss und nicht knicken darf, gilt:

$$y_L\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

3. Der Stab ruht auf dem rechten Stützpunkt auf: $y_R(a) = 0$

4. Da die Biegelinie einen bezüglich der Achse $x = \frac{a}{2}$ symmetrischen Verlauf nehmen muss und nicht knicken darf, gilt:

$$y_R\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

Wir setzen die erste (dritte) Randbedingung in die Lösungsfunktion ein:

$$0 = \frac{F}{12EJ} \cdot 0 + A \cdot 0 + B$$

$$B = 0$$

Die zweite (vierte) Randbedingung wird in die Ableitungsfunktion y' eingesetzt, die während der Integration nebenbei entstanden ist. Ein eigenes Ableiten ist daher nicht nötig:

$$0 = \frac{F}{4EJ} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + A$$

$$A = \frac{-Fa^2}{16EJ}$$

Durch die Bestimmung der beiden Integrationsparameter A und B (C und D) greifen wir jeweils aus dem allgemeinen Integral ein partikuläres heraus:

$$y_L = \frac{Fx^3}{12EJ} - \frac{Fa^2}{16EJ} \cdot x + 0$$

$$y_L = \frac{Fx}{48EJ} (4x^2 - 3a^2)$$

$$y_R = \dots$$

$$y_R = \frac{F}{48EJ} (-4x^3 + 12ax^2 - 9a^2x + a^3)$$

Solange die Einzelkraft F mittig angreift, wird die Biegelinie symmetrisch verlaufen und die maximale Durchbiegung f in der Stabmitte auftreten. Eine gute Probe besteht nun darin, zu überprüfen, ob beide Funktionen an der Stelle $x = \frac{a}{2}$ jeweils den gleichen Wert annehmen (vgl. Aufgabe 406.).

Diese symmetrischen Verhältnisse verschwinden, sobald der Stab asymmetrisch belastet wird. Wie diese geänderte Ausgangssituation das Randwertproblem beeinflusst, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel:

Wie ändern sich die Randbedingungen im vorigen Beispiel, wenn die Einzelkraft F außerhalb der Mitte an der Stelle x_F angreift?

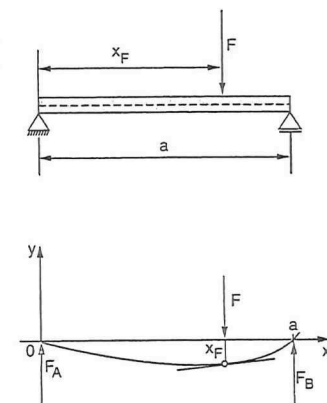
Lösung:

1. Randbedingung: bleibt unverändert: $y_L(0) = 0$

2. Randbedingung: Da die Biegelinie überall stetig sein muss, also auch an der Stelle x_F der Krafteinwirkung keine Unstetigkeitsstelle aufweisen darf, müssen dort die Funktionswerte übereinstimmen: $y_L(x_F) = y_R(x_F)$

3. Randbedingung: bleibt unverändert: $y_R(a) = 0$

4. Randbedingung: Die Biegelinie darf an der Stelle x_F keinen Knick aufweisen. Daher müssen auch die ersten Ableitungen übereinstimmen: $y'_L(x_F) = y'_R(x_F)$



Warum wäre es falsch, im letzten Beispiel die beiden Ableitungen in der 4. Randbedingung Null zu setzen? (Vgl. Aufgabe 407. b)).

AUFGABEN

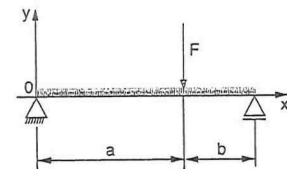
405. Es sind Momentenverlauf, DG und allgemeines Integral der DG für die rechte Hälfte des mittig belasteten Trägers (vgl. Seiten 158f.) zu ermitteln.

406. Wie groß ist die maximale Durchbiegung des mittig belasteten Trägers (vgl. Seite 159)? Bestimmen Sie die Funktionswerte für beide Stabhälften.

407. a) Wie lautet die Biegelinie für einen außermittig durch eine Einzelkraft F belasteten Stab?

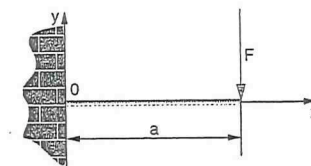
b) Warum wäre es falsch, bei einem asymmetrisch belasteten Stab als 4. Randbedingung (vgl. obiges Beispiel) $y'_L(a) = y'_R(a)$ Null zu setzen?

c) Bestimmen Sie die maximale Durchbiegung der Biegelinie.



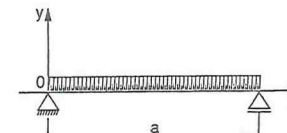
408. a) Wie lautet die Biegelinie eines einseitig eingespannten Trägers?

b) Bestimmen Sie die maximale Durchbiegung der Biegelinie.



409. a) Wie lautet die Biegelinie eines Stabes unter Gleichlast (Streckenlast q)?

b) Bestimmen Sie die maximale Durchbiegung der Biegelinie.



4. Ei

4.1 Ti

Einfac
gebrä
folgen

Bei:

Wie

Lös

Bei

Lös

Koc

y' =

Der

rech

Obw
und v
mit u

Es g
beick
alget

Form
in de
ande

Diff
unter

Gleic
entst
zusa

Aufg
schr
Löst

Lö

1

1

1

1

1

1

1

1