Menge der natürlichen Zahlen

Axiome von Peano:

1. **1 ist eine natürliche Zahl.**
2. **Jede Zahl a hat einen bestimmten Nachfolger a^+ in der Menge der natürlichen Zahlen.**
3. **Stets ist $a^+ \neq 1$, d.h. es gibt keine Zahl mit dem Nachfolger 1.**
4. **Aus $a^+ = b^+$ folgt a = b., d.h. zu jeder Zahl gibt es keine oder genau eine, deren Nachfolger jene Zahl ist.**
5. **"Prinzip der vollständigen Induktion": Jede Menge von natürlichen Zahlen, welche die Zahl 1 enthält und welche zu jeder Zahl a, die sie enthält, auch deren Nachfolger a^+ enthält, enthält alle natürlichen Zahlen.**

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

Rechengesetze

Kommutativgesetz:	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz:	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributivgesetz:	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Menge der ganzen Zahlen

Die Gleichung x + a = 0 (a   N) ist in der Menge der natürlichen Zahlen nicht lösbar. Deshalb wird der Zahlenbereich mit den negativen Zahlen erweitert. Zusammen mit den natürlichen Zahlen und 0 ergibt sich so die Menge der ganzen Zahlen.

Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...} = {0, ±1, ±2, ±3, ...}

Menge der rationalen Zahlen

Innerhalb der Menge der ganzen Zahlen ist die Addition, die Subtraktion und die Multiplikation unbeschränkt ausführbar. Die Division jedoch führt in vielen Fällen nicht zu einem Ergebnis in Z. Aus diesem Grund muss die Menge der ganzen Zahlen durch die Bruchzahlen erweitert werden. So ergibt sich die Menge der rationalen Zahlen.

Q = {x = $\frac{p}{q}$: p   Z und q   Z\{0}}

Menge der reellen Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen vereinigt die Menge der rationalen Zahlen mit der Menge der irrationalen Zahlen. Als Beispiele für irrationale Zahlen können die Wurzeln wie $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{17}$, die Kreiszahl π, aber auch die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen oder die Logarithmen genannt werden.

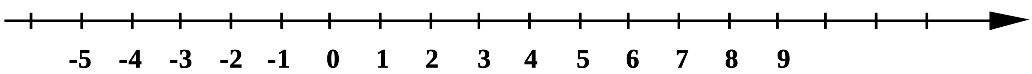
Stellt man reelle Zahlen als Dezimalbrüche dar, so sind die abbrechenden und die nichtabbrechenden, periodischen Dezimalbrüche rational, die nichtabbrechenden, nicht periodischen Dezimalbrüche sind irrational. Das konmmt daher, dass abbrechende, wie auch nichtabbrechende, periodische Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche der Form $\frac{p}{q}$ umgewandelt werden können.

Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten folgende Gesetze:

Kommutativgesetz (KG):	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz (AG)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributivgesetz (DG)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Der Zahlenstrahl

Zur graphischen Darstellung der reellen Zahlen wird oft der Zahlenstrahl verwendet.



Menge der komplexen Zahlen

Bekanntlich hat die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine reelle Lösung. Durch Erweiterung des Zahlenbereichs kann man aber dafür sorgen, dass es auch für diese Gleichung Lösungen gibt. Wir führen daher die komplexen Zahlen ein.

Die Gleichung $x^2 + 1$ wird umgeformt:

$x^2 = -1$

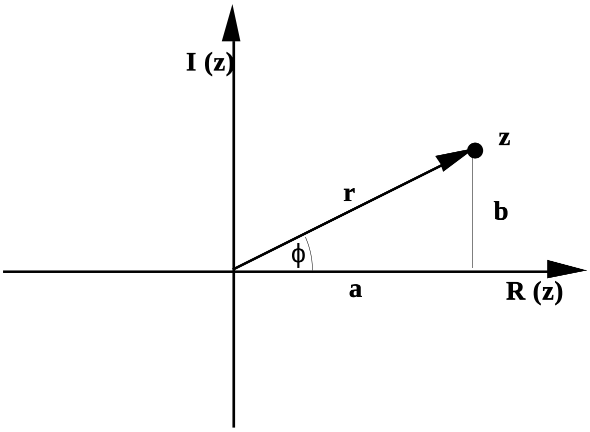
Formal gesehen wären die Lösungen:

$x_1 = \sqrt{-1}$ **und** $x_2 = -\sqrt{-1}$

Wir bezeichnen $\sqrt{-1}$ mit i und nennen dieses i die imaginäre Einheit. Die Vielfachen von i, welche mit einem reellen Faktor gebildet werden können, bilden die Menge der imaginären Zahlen.
$:= \{z \mid z = k \cdot i \quad k \quad R \setminus \{0\}\}$

Die Menge der komplexen Zahlen wird jetzt definiert als:
$C := \{z \mid z = a + bi \quad a, b \quad R\}$

Gauss'sche Zahlenebene



$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\qquad a = r \cdot \cos \phi$

$\tan \phi = \frac{b}{a}$ $\qquad b = r \cdot \sin \phi$

$\rightarrow z = a + bi = r(\cos \phi + i \cdot \sin \phi) = r \text{ cis } \phi$

Konjugiert komplexe Zahl

Die zu $z = a + bi$ konjugiert komplexe Zahl ist $\overline{z} = a - bi$

Rechenregeln

$z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$
$z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$

Gleichheit

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \quad b_1 = b_2$

Addition

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Kommutativgesetz: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
Assoziativgesetz: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

Subtraktion

$z_1 + z = z_2$
$a_1 + b_1 i + a + bi = a_2 + b_2 i$
$a_1 + a = a_2, \qquad b_1 + b = b_2$
$a = a_2 - a_1 \qquad b = b_2 - b_1$
$z = z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)i$

Multiplikation

$z_1 \bullet z_2 = (a_1 + b_1 i) \bullet (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Interessant ist bei der Multiplikation von komplexen Zahlen die Darstellung mit Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} z_1 \bullet z_2 &= r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \bullet r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) = \\ &= r_1 r_2[(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) + i(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2)] = \\ &= r_1 r_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin (\phi_1 + \phi_2)] \end{aligned}$$

Kommutativgesetz: $z_1 \bullet z_2 = z_2 \bullet z_1$
Assoziativgesetz: $(z_1 \bullet z_2) \bullet z_3 = z_1 \bullet (z_2 \bullet z_3)$

Distributivgesetz: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Beispiel: $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + i$. Es ist $z_1 \bullet z_2$ zu bestimmen.

$r_1 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $\phi_1 = \text{acrtan}\left(\frac{-4}{3}\right) = 306{,}87°$

$r_2 = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\phi_2 = \arctan\left(\frac{1}{-2}\right) = 153{,}43°$

$\phi_1 + \phi_2 = 460{,}30°$

$z_1 \bullet z_2 = 5\sqrt{5}(\cos 460.30° + i \sin 460.30°) = -2 + 11i$

Potenzieren

$z^2 = z \bullet z = r^2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi)$

$$\begin{aligned} z^3 &= z^2 \bullet z = r^2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi) \bullet r(\cos \phi + i \sin \phi) = \\ &= r^3[(\cos 2\phi \cos \phi - \sin 2\phi \sin \phi) + i(\cos 2\phi \sin \phi + \sin 2\phi \cos \phi)] = \\ &= r^3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi) \end{aligned}$$

$z^n = r^n(\cos \phi + i \sin \phi)^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$

Beispiel: $z = 3 - 4i$. Es ist z^{13} zu bestimmen.

$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $\phi = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) = 306{,}87°$

$z^{13} = 5^{13}(\cos 13 \bullet 306{,}87° + i \sin 13 \bullet 306{,}87°) = 1{,}0644 \bullet 10^9 + 5{,}975510^8 i$

Moivre'sche Formel: $(\cos \phi + i \bullet \sin \phi)^n = \cos n\phi + i \bullet \sin n\phi$ (n N)

Eulersche Relation: $\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$ (ohne Beweis)

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

Der Quotient von zwei komplexen Zahlen ist also wieder eine komplexe Zahl. Die Disvision kann aber einfacher mit der Polarkoordinatendarstellung durchgeführt werden. Wenn für das Produkt $z_1 = z \bullet z_2 = r r_2[\cos(\phi + \phi_2) + i \sin (\phi + \phi_2)]$ gilt, kann man z als Qutient von z_1 und z_2 berechnen: $z = \frac{z_1}{z_2}$, wobei für die Radien $r = \frac{r_1}{r_2}$ und für die Winkel $\phi = \phi_1 - \phi_2$ gilt. Also:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)]$$

Beispiel: $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + i$. Es ist $\frac{z_1}{z_2}$ zu bestimmen.

$r_1 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $\phi_1 = \text{acrtan}\left(\frac{-4}{3}\right) = 306{,}87°$

$r_2 = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\phi_2 = \arctan\left(\frac{1}{-2}\right) = 153{,}43°$

$\phi_1 - \phi_2 = 153{,}44°$

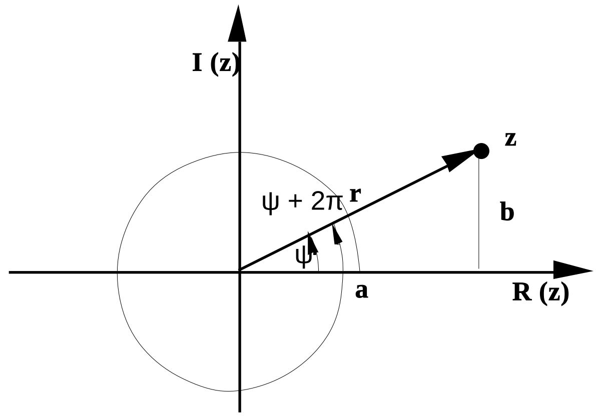
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos 153{,}44° + i \sin 153{,}44°) = -2 + i$

oder:

$$\frac{3 - 4i}{-2 + i} = \frac{(3 - 4i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = \frac{-6 - 3i + 8i - 4}{4 + 1} = \frac{-10 + 5i}{5} = -2 + i$$

Die Wurzeln von Potenzgleichungen

Die Gleichung $z^n = a + bi = r \text{ cis } \psi$ hat in der Menge der komplexen Zahlen immer n Lösungen. Das Berechnen der Wurzeln ist die Umkehrung des Potenzierens.
Ist $z^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$, so kommt man zu z indem aus r^n die n-te Wurzel gezogen wird. Den Winkel erhält man als n-ten Teil von $n\phi$. Dabei sind aber n verschiedene Lösungen möglich. Ein Winkel $n\phi$ kann als gegebener Winkel ψ aber genau so als $\psi + 2\pi$ oder $\psi + 4\pi$ usw. aufgefasst werden.
($n\phi = \psi + (k-1)\bullet 2\pi$, k = 1, 2, … n)



Es gilt also:

$z^n = a + bi = r(\cos \psi + i \sin \psi)$

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\psi + (k-1)\bullet 2\pi}{n} + i \sin \frac{\psi + (k-1)\bullet 2\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{(k-1)\bullet 2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{(k-1)\bullet 2\pi}{n}\right)\right)$$

mit k = 1, 2, …, n

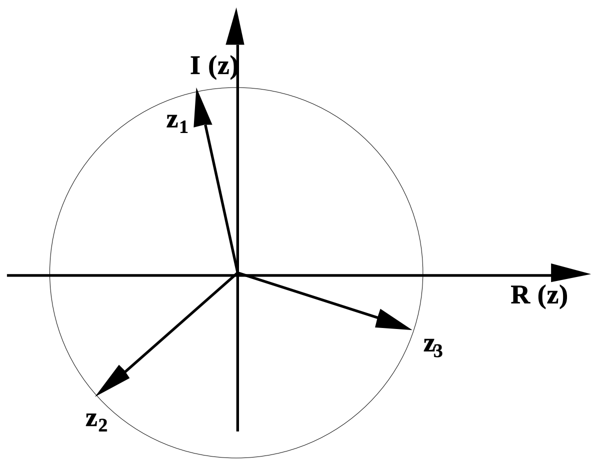
Beispiel: $z^3 = 3 - 4i$. Es sind alle Wurzeln zu bestimmen.

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5,\ \phi = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) = 306{,}87°$$

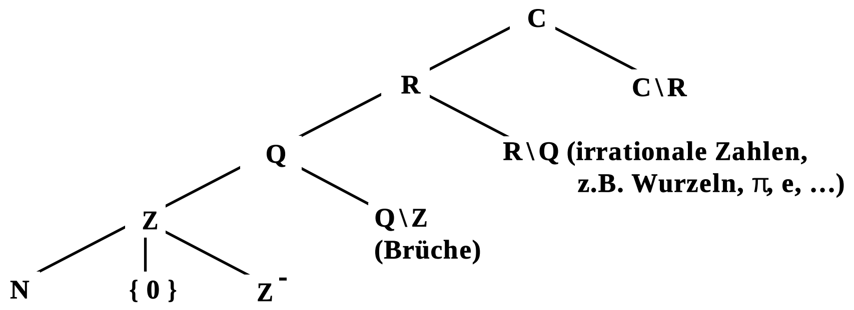
$$z_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos \frac{306{,}87°}{3} + i \sin \frac{306{,}87°}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\,(\cos 102{,}29° + i \sin 102{,}29°) = -0.3640 + 1.6708i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos \frac{306{,}87° + 360°}{3} + i \sin \frac{306{,}87° + 360°}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\,(\cos 222{,}29° + i \sin 222{,}29°) = -1.2650 - 1.1506i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos \frac{306{,}87° + 720°}{3} + i \sin \frac{306{,}87° + 720°}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\,(\cos 342{,}29° + i \sin 342{,}29°) = 1.6289 - 0.5202i$$



Zahlenmengen: Übersicht



Menge der natürlichen Zahlen	**N = {1, 2, 3, ...}**
Menge der ganzen Zahlen	**Z = {0, ±1, ±2, ±3, ...}**
Menge der rationalen Zahlen	**Q =** $\{\frac{z}{n}$ **: z Z, n N}**
Menge der reellen Zahlen	**R**
Menge der komplexen Zahlen	**C = {z : z = a + bi, a R, b R}**

