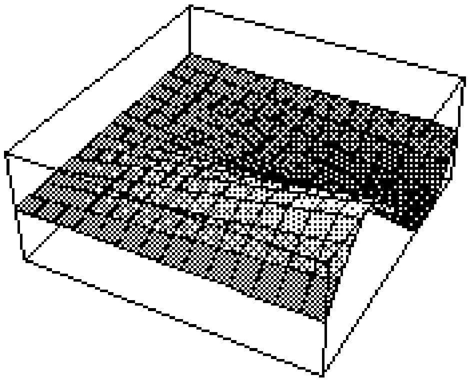
Differential und -Integralrechnung von Funktionen mehrerer Variablen

Funktionen von zwei Variablen

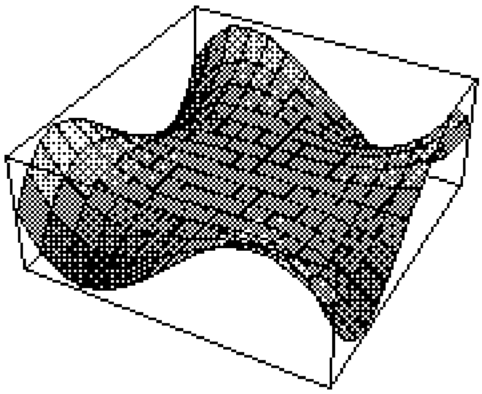
Gegeben sei die Funktion z = f(x,y), d.h. der Wert von z ist abhängig von der gleichzeitigen Einstellung der Werte von x und y. Solche Funktionen sind im 3-dimensionalen Raum als Flächen darstellbar.

Beispiele:

$z = x \bullet \sin y$
$(0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2\pi)$



$z = x^3y - xy^3 + 2x - y + 5$
$(-5 \le x \le 5,\ -5 \le y \le 5)$



Wird eine Variable fest gehalten, so bleibt nur mehr eine Funktion von der anderen Variablen übrig. Im Bild bedeutet dies einen vertikalen Schnitt durch die Kurve entlang des festgehaltenen Variablenwerts. Dieser Schnitt lässt sich als 2-dimensionale Kurve aufzeichnen. An die Schnittkurve können z.B. Tangenten gelegt werden, wobei für die Tangentensteigung die bekannten Grundsätze der Differentialrechnung gelten.

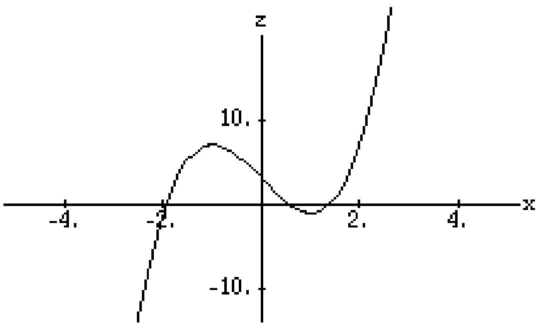
Beispiel:

$z = x^3y - xy^3 + 2x - y + 5$

Für y = 2 erhält man:
$z = 2x^3 - 8x + 2x - 2 + 5 = 2x^3 - 6x + 3$

$\frac{dz}{dx} = 6x^2 - 6$

Die Abbildung zeigt die Schnittkurve für y = 2



Partielle Ableitungen

z = f(x,y)

Partielle Ableitung nach x:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = z_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Partielle Ableitung nach y:
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y = z_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Beispiel:

$z = x^3y - xy^3 + 2x - y + 5$

$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3 + 2$

$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2 - 1$

Höhere partielle Ableitungen

Wie die 1. Ableitung können auch höhere partielle Ableitungen gebildet werden. Es gilt:

$$z_{xx} = f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z_x}{\partial x}$$
$$z_{yy} = f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z_y}{\partial y}$$

Es gibt aber auch die gemischten 2. Ableitungen z_{xy} und z_{yx}

$$z_{xy} = f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z_x}{\partial y}$$

$$z_{yx} = f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial z_y}{\partial x}$$

Für weitere Ableitungen kann man analog vorgehen.

Ableitungsregeln

Die bei den Funktionen von einer Variablen gefundenen Regeln gelten auch für die partiellen Ableitungen. Insbesondere kann auch die Kettenregel auf die partiellen Ableitungen übertragen werden.

Kettenregel:

$z = f(u,v)$ mit $u = u(x)$ und $v = v(x)$

$z = f(u(x),v(x)) = F(x)$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial u} \bullet \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \bullet \frac{dv}{dx}$$

Verallgemeinerung

$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$z_{x1} = \frac{\partial z}{\partial x_1}$ $\quad z_{x2} = \frac{\partial z}{\partial x_2}$ $\quad \dots \quad$ $z_{xn} = \frac{\partial z}{\partial x_n}$

Totales Differential

$z = f(x,y)$

$dz = f_x(x,y)\, dx + f_y(x,y)\, dy$

Explizite und implizite Darstellung von Funktionen

implizit: $F(x,y) = 0$, $\quad F(x, y, z) = 0$

Durch die angegebenen Gleichungen wird eine Beziehung zwischen den Variablen ausgedrückt. In vielen Fällen (nicht immer) ist eine Auflösung der Gleichung nach y bzw. nach z möglich. Die so erhaltene Form heisst explizite Darstellung der Funktion.

explizit: $y = f(x)$ $\quad z = f(x,y)$

Funktionen können auch in der impliziten Form abgeleitet werden.

$F(x,y) = 0$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Beispiel:

Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oder $F(x,y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

$F_x = 2b^2x$ $\quad F_y = 2a^2y$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2b^2x}{2a^2y} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

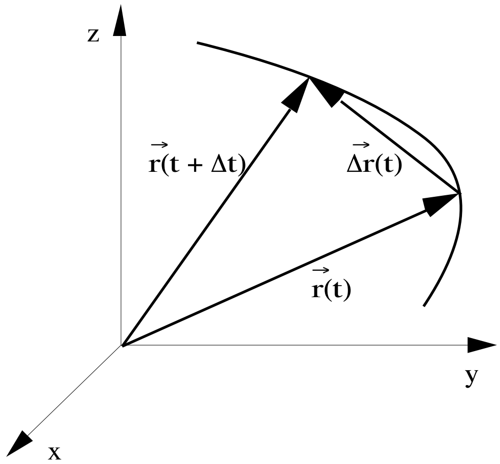
Kontrolle: Lösen der Ellipsengleichung auf $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ und dann ableiten.

Vektoranalysis

Bisher haben wir mit Vektoren mit festen Komponenten gearbeitet. Die Komponenten eines Vektors können aber genauso gut auch von einer oder mehreren Variablen abhängig sein. Dann stellt sich die Frage, ob man so einen Vektor auch differenzieren kann.

Gegeben ist ein Vektor $\vec{r}$, dessen Komponenten Funktion einer Variablen t sind:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



Lässt man t durch alle reellen Zahlen laufen, wird die Spitze des Vektors $\vec{r}$ eine Kurve im Raum beschreiben.

$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

$$\dot{\vec{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta(t)} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Ableitungsregeln

Summe und Differenz	$(\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2)^{\bullet} = \dot{\vec{r}}_1 \pm \dot{\vec{r}}_2$
Vielfaches	$(\lambda \bullet \vec{r})^{\bullet} = \dot{\lambda} \bullet \vec{r} + \lambda \bullet \dot{\vec{r}}$
Skalares Produkt	$(\vec{r}_1 \bullet \vec{r}_2)^{\bullet} = \dot{\vec{r}}_1 \bullet \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \bullet \dot{\vec{r}}_2$
Vektorprodukt	$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)^{\bullet} = \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_2$

Beispiel:

Schiefer Wurf

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x}t + x_0 \\ v_{0y}t + y_0 \\ -\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t + z_0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \int \vec{v}\, dt$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ -gt + v_{0z} \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \int \vec{a}\, dt$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Felder

Gradient eines Skalarfeldes

Es sei u eine Ortsfunktion, d.h. u ist eine Funktion der Variablen x, y und z, welche die Koordinaten eines Punktes im Raum sind. Diese Ortsfunktion u beschreibt ein Skalarfeld.

$u = u(x,y,z)$

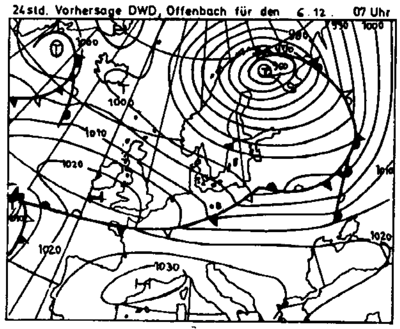
Die partiellen Ableitungen von u nach x, y und z geben die Steigung von u in der jeweiligen Koordinatenrichtung an. Der aus diesen partiellen Ableitungen zusammengesetze Vektor gibt die Steigung von u an. Sein Betrag ist umso grösser, je kleiner der Abstand der Niveauflächen (Flächen mit gleichem u-Wert) ist. Der Vektor steht senkrecht zu den Niveauflächen, er ist also so gerichtet, dass er die stärkste Änderung anzeigt. Dieser Vektor heisst Gradient von u.

$$\text{grad } u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{dx} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Beispiele:

Temperaturgradient: Ein Körper wird erwärmt. In jedem Punkt des Körpers kann eine bestimmte Temperatur gemessen werden. Der Temperaturgradient gibt die Geschwindigkeit der Temperaturänderung im Körper an und zeigt mit seiner Richtung den Wärmefluss im Körper an.

Druckgradient: Auf der Wetterkarte werden die Luftdruckwerte eingezeichnet. Sogenannte Isobaren verbinden die Punkte mit denselben Luftdruckwerten. Ein dichter Verlauf der Isobaren zeigt ein starkes Druckgefälle auf kleiner Distanz an. Der Druckgradient verläuft senkrecht zu den Isobaren. Er zeigt die Windrichtung an und aus seinem Betrag lässt sich auf die Windstärke schliessen.



Bodenvorhersagekarte für den 6.12.79, 7⁰⁰ Uhr

Erläuterung im 2-dimensionalen Raum:

$F(x,y) = 0$ ist die Gleichung einer ebenen Kurve. Die Steigung der Tangente y' kann berechnet werden:

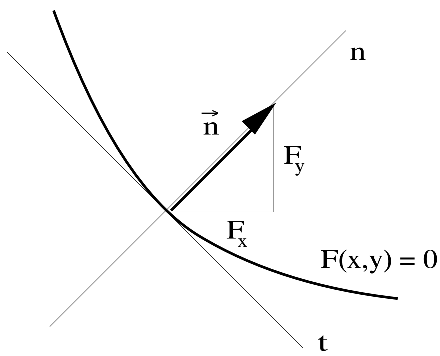
$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

Die Normale hat die Steigung

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{F_y}{F_x}$$

Ein Normalvektor zur gegebenen Kurve hat also die Komponenten

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}.$$



Dieser Vektor ist aber der Gradient von F:

$$\text{grad } F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}.$$

Divergenz eines Vektorfeldes

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Als Divergenz des Vektorfeldes $\vec{v}$ wird der Skalar div $\vec{v}$ definiert:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Physikalisch bedeutet die Divergenz eine Quellstärke je Volumeneinheit. Ist div $\vec{v} > 0$, so enthält das Feld Quellen, ist div $\vec{v} < 0$, so enthält es Senken. Ein Feld mit div $\vec{v} = 0$ ist quellen- und senkenfrei.

Beispiel:

Bei einer nichtzusammendrückbaren Flüssigkeit kann aus einem Volumenelement nur soviel Flüssigkeit herauskommen, wie hineingeströmt ist. Für solche Flüssigkeiten lautet die Kontinuitätsgleichung div $\vec{v} = 0$.

Rotation eines Vektorfeldes

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Als Rotation des Vektorfeldes $\vec{v}$ wird der Vektor rot $\vec{v}$ definiert:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & v_x \\ \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & v_y \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & v_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die partiellen Ableitungssymbole $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ in der Determinante werden als Operatoren verstanden, die jeweils auf eine Komponente des Vektorfeldes $\vec{v}$ angewendet werden.

Physikalisch ist die Rotation eines Vektorfeldes zur Winkelgeschwindigkeit einer Drehung proportional.

Ein Vektorfeld heisst wirbelfrei, wenn für jeden Vektor $\vec{v}$ des Feldes gilt : rot $\vec{v} = \vec{o}$

Nabla-Operator ∇

Ein Operator wird als Differentialoperator bezeichnet, wenn zu seiner Definition Differentialquotienten benützt werden. Ein häufig benützter Operator ist der Nabla-Operator ∇:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Mit dem Nabla-Operator kann man den Gradienten eines Skalarfeldes u = u(x,y,z) aufschreiben:

$$\text{grad } u = \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} u(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{v}$ ist:

$$\text{div } \vec{v} = \nabla\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Das Vektorprodukt von Nabla mit dem Vektorfeld $\vec{v}$ ergibt die Rotation von $\vec{v}$:

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & v_x \\ \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & v_y \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & v_z \end{vmatrix}$$

Das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit sich selbst ergibt den Laplace-Operator Δ:

$$\nabla \bullet \nabla = \nabla^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

Die Maxwell-Gleichungen und das elektromagnetische Feld

Zur Beschreibung von elektrischen Vorgängen im Vakuum benötigt man vier Grundgrössen, die elektrische Ladungsdichte σ, die elektrische Stromdichte $\vec{i}$, die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die magnetische Induktion $\vec{B}$. Durch die Maxwell-Gleichungen sind diese vier Grundgrössen miteinander folgendermassen verknüpft (ε_0 elektrische Feldkonstante, μ_0 magnetische Feldkonstante):

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

James Clerc Maxwell (1831 - 1879) begründete 1860 die vollständige Theorie der elektromagnetischen Vorgänge. Er sagte die Existenz von Radiowellen voraus und deutete das Licht als elektromagnetische Welle.